# Álgebra y Geometría Analítica

## Notación y algunas definiciones

### Conjuntos de números

**N** conjunto de los números naturales; $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$; **Z** conjunto de los números enteros;
**R** conjunto de los números reales; **C** conjunto de los números complejos.

**Desigualdades en R** Sean $a, b \in \mathbf{R}$ tales que $a < b$ entonces se satisfacen las siguientes leyes:

Ley de orden para la suma: $a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbf{R}$

Ley de orden para el producto: $\begin{cases} a \cdot c < b \cdot c & c \in \mathbf{R}_{>0} \\ a \cdot c = b \cdot c & c = 0 \\ a \cdot c > b \cdot c & c \in \mathrm{R}_{<0} \end{cases}$

**Valor absoluto en R** Si $a \in \mathbf{R}$, su valor absoluto se define por $|a| \equiv \begin{cases} a \text{ si } a \in \mathbf{R}_{\geq 0} \\ -a \text{ si } a \in \mathbf{R}_{<0} \end{cases}$

**Sumatoria** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ con $n \in \mathbf{N}$

En general toma la forma $\displaystyle\sum_{k=z_1}^{z_2} a_k$ con $z_1, z_2 \in \mathbf{Z} \;\wedge\; z_1 \leq z_2$; número de sumandos: $z_2 - z_1 + 1$

**1)** Índice mudo: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{r=1}^{n} a_r$

**2)** Corrimiento de índice: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+z}^{n+z} a_{k-z}, z \in \mathbf{Z}$

**3)** Propiedad distributiva con respecto a la suma de sumatorias: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

**4)** Extracción de factores constantes: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

**5)** Descomposición en dos sumatorias: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=h+1}^{n} a_k$ con $1 \leq h < n$

**6)** Casos particulares: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$;

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{con} \, q \neq 1.$$

**Productoria** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ con $n \in \mathbf{N}$

En general toma la forma $\displaystyle\prod_{k=z_1}^{z_2} a_k$ con $z_1, z_2 \in \mathbf{Z} \wedge z_1 \leq z_2$; número de factores: $z_2 - z_1 + 1$

**1)** Índice mudo: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{r=1}^{n} a_r$

**2)** Corrimiento de índice: $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1+z}^{n+z} a_{k-z}\,, z \in \mathbf{Z}$

**3)** Propiedad distributiva con respecto al producto de productorias: $\prod_{k=1}^{n}(a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$

**4)** Extracción de factores constantes: $\prod_{k=1}^{n}(\alpha \cdot a_k) = \alpha^n \prod_{k=1}^{n} a_k$

**5)** Descomposición en dos productorias: $\prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{h} a_k\right)\left(\prod_{k=h+1}^{n} a_k\right)$ con $1 \le h < n$

<u>**Factorial**</u> Sea $n \in \mathbf{N_0}$, $n! \equiv \begin{cases} 1 \, si \, n = 0 \\ n \cdot (n-1)! \, si \, n \in \mathbf{N} \end{cases}$, asi $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

<u>**Número combinatorio**</u> $C_{m,n} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{m!}{(n!)[(m-n)!]} m, n \in \mathbf{N_0}\ m \ge n$ ; $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbf{N}$

**1)** Números combinatorios complementarios: $C_{n,m} = C_{n,n-m}$.

**2)** $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$; **3)** $C_{n,1} = n$; **4)** $C_{n,m} = C_{n-1,m-1} + C_{n-1,m}$.

**Triángulo de Tartaglia** Cada elemento intermedio de una fila se obtiene sumando los dos elementos que se encuentran en la fila inmediatamente anterior, a partir de un triángulo inicial de 1, y los extremos de cada fila siempre valen 1.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_{0,0} & & & \\ & & C_{1,0} & & C_{1,1} & & \\ & C_{2,0} & & C_{2,1} & & C_{2,2} & \\ C_{3,0} & & C_{3,1} & & C_{3,2} & & C_{3,3} \\ & & & \vdots & & & \end{array} \equiv \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

<u>**Binomio de Newton**</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k\right] = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n b^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b^1 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} a^1 b^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a^0 b^n, n \in \mathbf{N_0}$$

Por ej.: $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3$; $(a-b)^3 = 1 \cdot a^3 b^0 - 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 - 1 \cdot a^0 b^3$

<u>**Delta de Kronecker**</u> Para $i, j \in \mathbf{N}$, $\delta_{i,j} \equiv \begin{cases} 0 & \text{cuando } i \ne j \\ 1 & \text{cuando } i = j \end{cases}$