ANEXO Guía de Ejercitación 4 – Álgebra y Geometría Analítica – UTN FRH

Tema 1: Subespacios fundamentales de una matriz real

Aplicación de conceptos desarrollados sobre espacios y subespacios vectoriales, en particular los de dimensión y ortogonalidad, al estudio de los cuatro subespacios fundamentales de una matriz real.

Aclaración previa de notación. En este apartado se considerará equivalentes las expresiones $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ con $X\in\mathbf{R}^{\mathbf{nx1}}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ con $Y\in\mathbf{R}^{\mathbf{mx1}}$, $\mathbf{0}$ con la matriz columna nula del orden que corresponda. Si $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$, escribiremos con r al rango de A.

En una matriz $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$ es posible identificar cuatro subespacios fundamentales que se definen a partir de sus elementos; ellos son:

-El espacio nulo de A que lo simbolizaremos por Nul(A), está formado por el conjunto de todos los vectores solución de la ecuación matricial $A{\cdot}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Puesto que $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$, es $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ y Nul(A) es un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. La dimensión de Nul(A) no puede ser superior a n.

-El espacio de las filas de A, que lo simbolizaremos por Fil(A), es el espacio generado por los vectores fila de A; como las filas de A tienen n componentes, Fil(A) es también un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ y su dimensión es r y tampoco puede superar a n.

-El espacio de las columnas de A, que denotaremos como Col(A), es el espacio generado por los vectores columnas de A. Como las columnas de A tienen m componentes, el espacio Col(A) es un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, su dimensión no puede superar a m.

-El espacio nulo izquierdo de A, que denotaremos como NulI(A), es el espacio nulo de A^{T}, es decir que es el espacio compuesto por todos los vectores solución de la ecuación matricial $A^T{\cdot}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$. Como $A^T\in\mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$, es $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ NulI(A) es un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ al igual que Col(A).

Observar que Fil(A) es el mismo que Col(A^T) y que Fil(A^T) es el mismo que Col(A).

Entre las dimensiones de los subespacios fundamentales de una matriz existe una relación importante que está dada por el siguiente teorema:

-El espacio de las filas y el espacio de las columnas de una misma matriz, tienen la misma dimensión que coincide con el rango r de la matriz.

-El espacio nulo de una matriz de orden $m{\times}n$ tiene dimensión $n-r$, siendo r la dimensión del espacio de las filas de dicha matriz.

-El espacio nulo izquierdo de una matriz de orden $m{\times}n$ tiene dimensión $m-r$, siendo r la dimensión del espacio de las filas de dicha matriz.

Otra característica importante de estos espacios fundamentales lo son las condiciones de ortogonalidad que hay entre ellos. Las mismas están enunciadas en el siguiente teorema:

-El espacio nulo de $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$ es el subespacio complemento ortogonal de su espacio fila en $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

-El espacio nulo izquierdo de $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$ es el subespacio complemento ortogonal de su espacio columna en $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$.

Esquemáticamente, un resumen de lo definido y las relaciones se puede presentar de la siguiente forma.

$$A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right)\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, r(A)=r$$

$$A=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\\vdots\\F_n\end{pmatrix}, F_i=\begin{pmatrix}a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{\mathbf{1\times n}}\ i=1,2,\cdots,m \text{ ó } \vec{f}_i=\left(a_{i,1},a_{i,2},a_{i,3},\cdots,a_{i,n}\right)\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$$

$$A=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_n\end{pmatrix}, C_j=\begin{pmatrix}a_{1,j}\\a_{2,j}\\\vdots\\a_{m,j}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times 1}}\ j=1,2,3,\cdots,n \text{ ó } \vec{c}_j=\left(a_{1,j},a_{2,j},\cdots,a_{m,j}\right)\in\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$$

$\text{Fil}(A)=gen\left\{\vec{f}_1;\vec{f}_2;\cdots;\vec{f}_n\right\}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{n}};\dim\left(\text{Fil}(A)\right)=r$

Subespacio generado por las filas de A

$\left(\text{Fil}(A)\right)^{\perp}=\text{Nul}(A)\subset\mathbf{R}^{\mathbf{n}},\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=n-r$

$\text{Nul}(A)=\left\{\vec{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}\ /\ A\cdot X=O, A\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, O\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times 1}}, X=\left(\vec{x}\right)^T\right\}$

$\text{Col}(A)=gen\left\{\vec{c}_1;\vec{c}_2;\cdots;\vec{c}_n\right\}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{m}};\dim\left(\text{Col}(A)\right)=r$

Subespacio generado por las columnas de A

$\left(\text{Col}(A)\right)^{\perp}=\text{NulI}(A)\subset\mathbf{R}^{\mathbf{m}},\dim\left(\text{NulI}(A)\right)=m-r$

$\text{NulI}(A)=\left\{\vec{y}\in\mathbf{R}^{\mathbf{m}}\ /\ A^T\cdot Y=O, A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times m}}, O\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times 1}}, Y=\left(\vec{y}\right)^T\right\}$

Tema 1: Ejercicio.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, desarrollar las siguientes cuestiones.

1) Hallar los cuatro espacios fundamentales de la matriz A. Definirlos mediante la o las ecuaciones de pertenencia al subespacio. Para cada uno de ellos dar una base y su respectiva dimensión.

2) Verificar la ortogonalidad de los subespacios fundamentales de la matriz A que pertenezcan al mismo espacio vectorial.

3) Indicar si cada uno de los siguientes vectores pertenece o no a cada uno de los subespacios hallados.

$\vec{a}=(-1,1,3);\vec{b}=(6,0,2);\vec{c}=(-1,-1,1);\vec{d}=(0,0,4,0);\vec{e}=(4,0,0,0);\vec{f}=(0,-2,0,2);\vec{g}=(1,1,1,1)$

Repetir las preguntas anteriores para la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 5 & 7\\-1 & -3 & -4\\1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

Tema 2: Matriz de cambio de base

Introducir la idea que suele ser necesario el empleo de bases diferentes para un mismo espacio vectorial y mostrar la forma en que es posible pasar de una base a otra en forma matricial.

Según el problema específico en que estén involucrados espacios vectoriales, suele ser conveniente el empleo de diferentes bases para representar los vectores de dichos subespacios, a fin de simplificar los cómputos o bien poner de manifiesto características especiales de sus vectores. Surge entonces la necesidad de estudiar en qué forma se puede pasar de la expresión de un vector como combinación lineal de los vectores de una base a la expresión del mismo vector en otra base. Para ello supongamos en principio que un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ está representado en la base canónica o estándar (recordar que los vectores de esta bases son de la forma $\boldsymbol{e}_{\mathrm{i}}=(0\ 0\ 0\ \cdots\ 1\ \cdots\ 0\ 0\ 0)$, es decir tienen todas las componentes nulas excepto la i-ésima que es uno. Por cuestiones prácticas expresaremos los vectores como matrices columnas), entonces:

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3 + \cdots + v_n\,\boldsymbol{e}_n = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{BC}$$

será la expresión de $\boldsymbol{v}$ en la base canónica.

Si $BW = \{\boldsymbol{w}_1; \boldsymbol{w}_2; \boldsymbol{w}_3; \cdots ; \boldsymbol{w}_n\}$ es otra base de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, al ser $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ tendrá también su expresión en la base BW y que será:

$$\boldsymbol{v} = c_1\,\boldsymbol{w}_1 + c_2\,\boldsymbol{w}_2 + c_3\,\boldsymbol{w}_3 + \cdots + c_n\,\boldsymbol{w}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{BW}$$

Se puede reemplazar $\boldsymbol{w}_i$ por sus coordenadas en la base canónica en forma matricial usando esta nomenclatura

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ \vdots \\ w_{n,1} \end{pmatrix}_{BW} , \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ \vdots \\ w_{n,2} \end{pmatrix}_{BW} , \ldots , \boldsymbol{w}_n = \begin{pmatrix} w_{1,n} \\ w_{2,n} \\ \vdots \\ w_{n,n} \end{pmatrix}_{BW} .$$

Así la expresión para $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ queda:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{BW} = c_1 \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ \vdots \\ w_{n,1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} w_{1n} \\ w_{2n} \\ \vdots \\ w_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 w_{1,1} + c_2 w_{1,2} + \cdots + c_n w_{1,n} \\ c_1 w_{21} + c_2 w_{2,2} + \cdots + c_n w_{2,n} \\ \vdots \\ c_1 w_{n,1} + c_2 w_{n,2} + \cdots + c_n w_{n,n} \end{pmatrix} .$$

En forma equivalente:

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,n} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{n,n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=W\cdot\boldsymbol{c}$$

Es decir que en forma matricial es $\boldsymbol{v} = W\cdot\boldsymbol{c}$, donde W es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base W y la llamaremos matriz de la base W, mientras que $\boldsymbol{c}$ es la matriz columna de los coeficientes de la combinación lineal que expresa $\boldsymbol{v}$ en la base W (son las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base W). De ello surge fácilmente $\boldsymbol{c}=W^{-1}\cdot\boldsymbol{v}$ que nos permite pasar de las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base canónica a las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base W. La matriz $M = W^{-1}$ es la matriz de cambio de base de BC a BW. (¿Por qué podemos asegurar que W es no singular?).

Para el caso en que ninguna de las bases involucradas sea la estándar, es decir:

$BW = \{\boldsymbol{w}_1; \boldsymbol{w}_2; \boldsymbol{w}_3; \cdots; \boldsymbol{w}_n\}$ y $BU=\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ bases de $\mathbf{R}^n$, se puede proceder de la siguiente forma: expresamos $\boldsymbol{v}$ en ambas bases

$$\boldsymbol{v} = c_1\,\boldsymbol{w}_1 + c_2\,\boldsymbol{w}_2 + c_3\boldsymbol{w}_3 + \cdots + c_n\,\boldsymbol{w}_n \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = b_1\,\boldsymbol{u}_1 + b_2\,\boldsymbol{u}_2 + b_3\,\boldsymbol{u}_3 + \cdots + b_n\,\boldsymbol{u}_n$$

$$c_1\,\boldsymbol{w}_1 + c_2\,\boldsymbol{w}_2 + c_3\,\boldsymbol{w}_3 + \cdots + c_n\,\boldsymbol{w}_n = W\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{y} \quad b_1\,\boldsymbol{u}_1 + b_2\,\boldsymbol{u}_2 + b_3\,\boldsymbol{u}_3 + \cdots + b_n\,\boldsymbol{u}_n = U\cdot\boldsymbol{b}$$

$W\cdot\boldsymbol{c} = U\cdot\boldsymbol{b}$ con lo que $\boldsymbol{b} = U^{-1}\cdot W\cdot\boldsymbol{c}$ ó $\boldsymbol{c} = W^{-1}\cdot U\cdot\boldsymbol{b}$ nos permiten pasar de una base a la otra (De nuevo, ¿por qué podemos asegurar que tanto U como W son no singulares?).

La matriz $M = U^{-1}\cdot W$ será la matriz de cambio de BW a BU y $\boldsymbol{b} = M\cdot\boldsymbol{c}$.

La matriz $S= W^{-1}\cdot U$ será la matriz de cambio de BU a BW y $\boldsymbol{c} = S\cdot\boldsymbol{b}$.

Notar que $S=M^{-1}$. Observar detenidamente cómo se construyen U, W, M y S.

Tema 2. Ejercicios.

1) En $\mathbf{R}^3$ obtener la matriz de cambio de base que permite pasar de la base canónica $\{\boldsymbol{i};\boldsymbol{j};\boldsymbol{k}\}$ a la base $BW=\{(1,0,1);(1,1,0);(0,1,1)\}$. Expresar el vector $\boldsymbol{i}$ en la base BW. Interpretar gráficamente el problema. Las coordenadas dadas se entienden en la base canónica.

2) En $\mathbf{R}^2$ encontrar la matriz de cambio de la base $BW=\{(1,1);(-1,1)\}$ a la base $BU=\{(1,2);(1,-2)\}$. Obtener las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}=(-2, 3)$ en ambas bases. Representar gráficamente todos los vectores. Todas las coordenadas que se han dado en este ejercicio son en la base canónica.