Guía de Ejercitación 4. Variable aleatoria continua

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria continua. Hallar para qué valores de $k \in \mathbf{R}$, cada una de las siguientes funciones representa una densidad de probabilidad. En cada caso, hallar la función de distribución $F_X(x)$ correspondiente; representar ambas funciones en forma gráfica y calcular:

el valor esperado $E(X)$, $E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$;

la mediana $\tilde{x}$, $P(X < \tilde{x}) = P(X > \tilde{x}) \Rightarrow F_X(\tilde{x}) = 0{,}5$,

y la varianza $V(X)$, $V(X) = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$.

a) $f_X(x) = \begin{cases} k(1+2x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x < 0 \vee x > 2 \end{cases}$

b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{3x} & 0 \le x \le k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 2. Determinar cuáles de las siguientes funciones describen funciones de distribución válidas. En los casos que así se cumpla, calcular la función de densidad de probabilidad asociada y graficar $F_X(x)$ y $f_X(x)$.

a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0{,}25x + 0{,}50 & -2 \le x < 1 \\ 0{,}50x + 0{,}25 & 1 \le x < 1{,}5 \\ 1 & x \ge 1{,}5 \end{cases}$

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}5 + 0{,}5\,\mathrm{sen}\left[\pi(x-1)/2\right] & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 3. La proporción de impurezas, X, de determinadas muestras de mineral de cobre es una variable aleatoria que tiene una densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases},$$

cuyo gráfico se presenta conjuntamente al de la función de distribución $F_X(x)$.

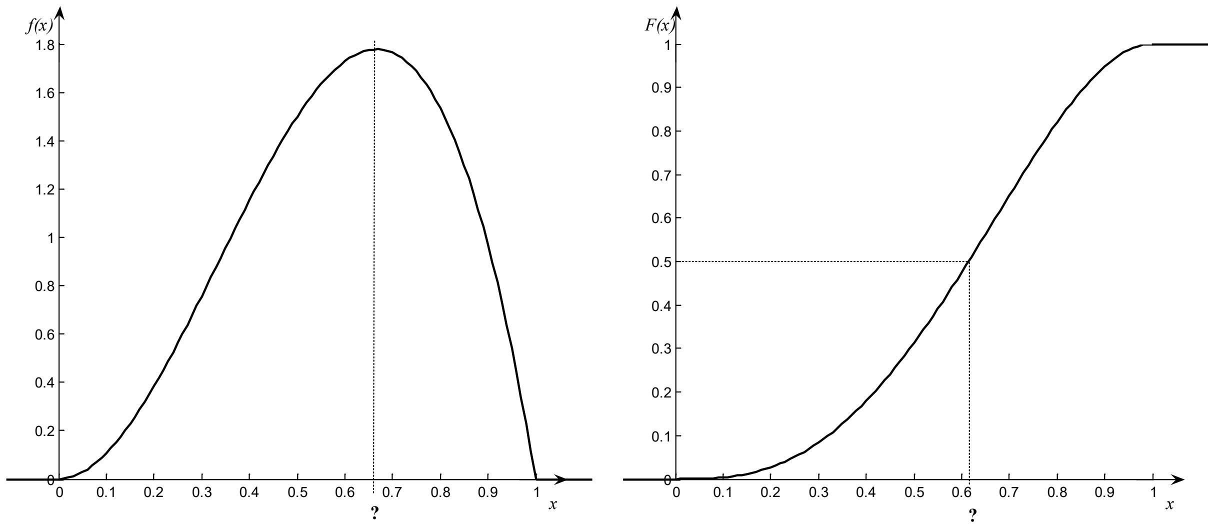


Figura Ejercicio 3. Función de densidad de probabilidad y función de distribución para X

a) Calcular la moda –valor X que hace máxima a $f_X(x)$– y, en forma aproximada, la mediana de la distribución.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra contenga más del 50% de impurezas?

c) Si sabe que al seleccionar una muestra la misma tiene una proporción de impurezas mayor a 0,3, ¿cuál es la probabilidad de que contenga más de 0,5?

d) Si, en forma independiente, se seleccionan cuatro muestras, ¿cuál es la probabilidad de que por exactamente una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0,5?

Ejercicio 4. La función de densidad de la variable aleatoria X correspondiente a la temperatura medida en grados que mantienen ciertas conservadoras después de 5 horas es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left(1 - x^2\right) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Calcular la probabilidad de que una conservadora tenga la capacidad de solidificar el agua.
b) Estimar la cantidad de conservadoras, entre 2500, que conservan una temperatura mayor que medio grado bajo cero.
c) Estimar la temperatura máxima superada por 1500 entre 2500 conservadoras.
d) Si los registros realizados de la temperatura en grados de un lote grande de conservadoras llevaron al histograma que se presenta a continuación, ¿parece razonable que sea el mismo tipo de máquinas cuya distribución de temperaturas fue la modelada en los ítems anteriores? Justificar.

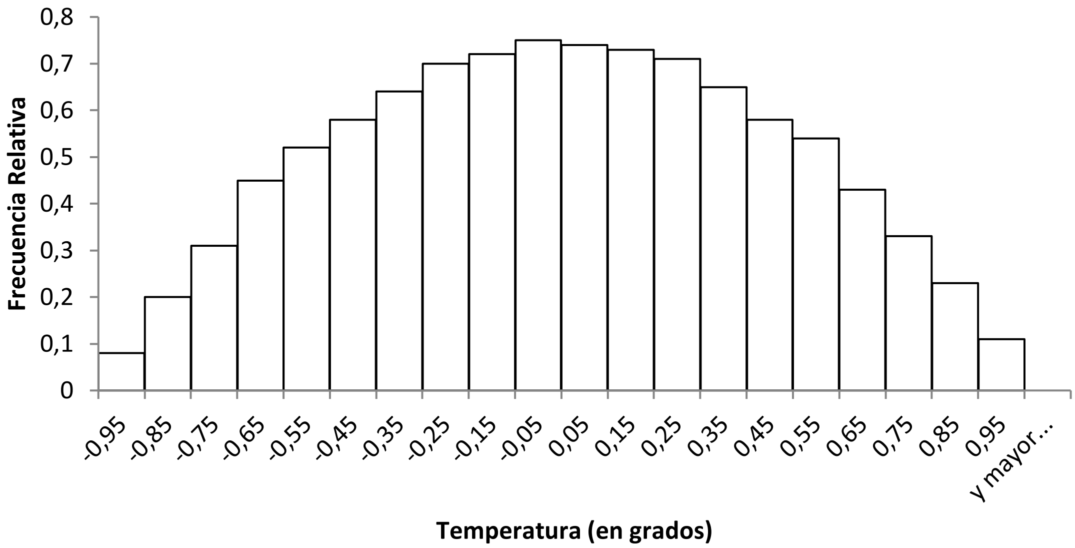


Figura Ejercicio 4 – Histograma en frecuencia relativa de la temperatura de las conservadoras del lote

Ejercicio 5. El costo de producción de ciertas varillas de metal es de \$12 por unidad. El diámetro de una varilla elegida al azar es una variable aleatoria. Históricamente se sabe que el 10% de las varillas se descartan porque tienen un diámetro menor que 9,9 cm. El 15% de las varillas se venden como de segunda calidad a \$20 por unidad pues tienen un diámetro mayor que 10,1cm. Las varillas cuyo diámetro está comprendido entre 9,9 cm y 10,1 cm se venden como de primera calidad y pasan a la sección de almacenado. Al llegar a esta sección se hace una medición más cuidadosa de su diámetro y si resulta menor que 10,0 cm se clasifica como varilla delgada y se vende a \$24, y, en caso contrario, se clasifica como varilla gruesa y se vende a \$36. Se sabe que el diámetro X de una varilla elegida al azar de las que llega a la sección de almacenado es una variable aleatoria con la siguiente función densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 100(x - 9{,}9) & 9{,}9 \leq x < 10{,}0 \\ 100(10{,}1 - x) & 10{,}0 \leq x \leq 10{,}1 \\ 0 & x < 9{,}9 \vee x > 10{,}1 \end{cases}.$$

¿Cuál es la utilidad esperada por varilla producida?
Sugerencia: Realizar un árbol de probabilidad sobre la situación planteada en el enunciado y dibujar $f_X(x)$.

Ejercicio 6. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo real $[a,b]$:

$$X \sim U(a;b) \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases} k & a\le x\le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Hallar el valor de k, la función de distribución $F_X(x)$ y graficarla.

b) Deducir el valor esperado $E(X)=\mu_X$ y la $V(X)=\sigma_X^2$.

c) Comprobar que la probabilidad de que X no difiera en más de un desvío estándar de su valor esperado es $\frac{1}{\sqrt{3}}$, esto es $P(|X-\mu_X|\le\sigma_X)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, cualesquiera sean los valores reales de a y de b con $a<b$.

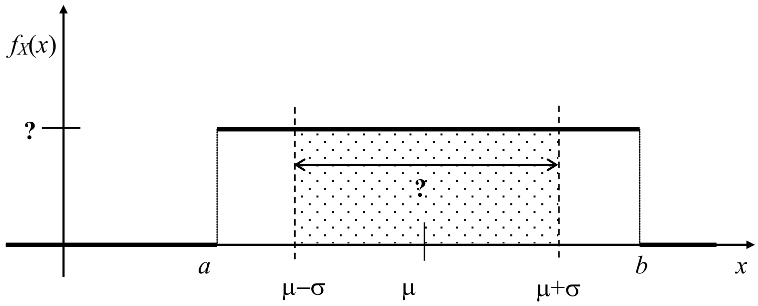


Figura Ejercicio 6. Función de densidad de probabilidad de $X\sim$U(a,b)

d) Esquematizar un diagrama de caja y bigote de una colección de datos que fuera consistente con una variable aleatoria $X\sim U(0;2)$. Construir un esquema “idealizado”.

Ejercicio 7. Aplicaciones de la variable aleatoria con distribución uniforme.

a) Los tornillos de una cadena de producción se diseñan para que tengan una longitud nominal de 760 mm. Un dispositivo de pruebas pasa-falla elimina todos los tornillos más pequeños de 650 mm y más largos de 920 mm. Los tornillos que pasan la prueba pueden venderse y se sabe que sus longitudes quedan descritas mediante una función de densidad de probabilidad uniforme. Cierto comprador pide todos los tornillos que pueden fabricarse con una tolerancia del $\pm 5\%$ alrededor de su longitud nominal. ¿Qué fracción de la salida de la cadena de producción comprará?

b) Una máquina que marca números telefónicos al azar selecciona aleatoriamente los últimos cuatro dígitos entre 0000 y 9999 (incluidos ambos). Si la variable aleatoria X definida como el número seleccionado se trata como si fuese continua (aun cuando sólo hay 10000 posibilidades discretas) y uniformemente distribuida, encontrar $P(0300<X\le 1300)$. ¿ Existe o no diferencia en la respuesta dada con $P(0300\le X\le 1300)$? Justificar.

Ejercicio 8. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha\in\mathbf{R}_{>0}$, $X\sim$Exp(α) con función de densidad de probabilidad $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$.

a) Demostrar que su función de distribución es $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$.

b) Calcular el valor esperado $E(X)$, la varianza $V(X)$ y la mediana $\tilde{x}$.

c) Demostrar que $P(X\ge x+x_0/X\ge x_0)=P(X\ge x)$ donde x y x_0 son dos valores no negativos. Interpretar el significado de esta igualdad, que se conoce como propiedad de “carencia de memoria” de la variable aleatoria y es independiente del valor $\alpha\in\mathbf{R}_{>0}$.

d) Hallar la probabilidad de que X tome valores superiores a su valor esperado y constatar que es independiente del valor del parámetro $\alpha\in\mathbf{R}_{>0}$.

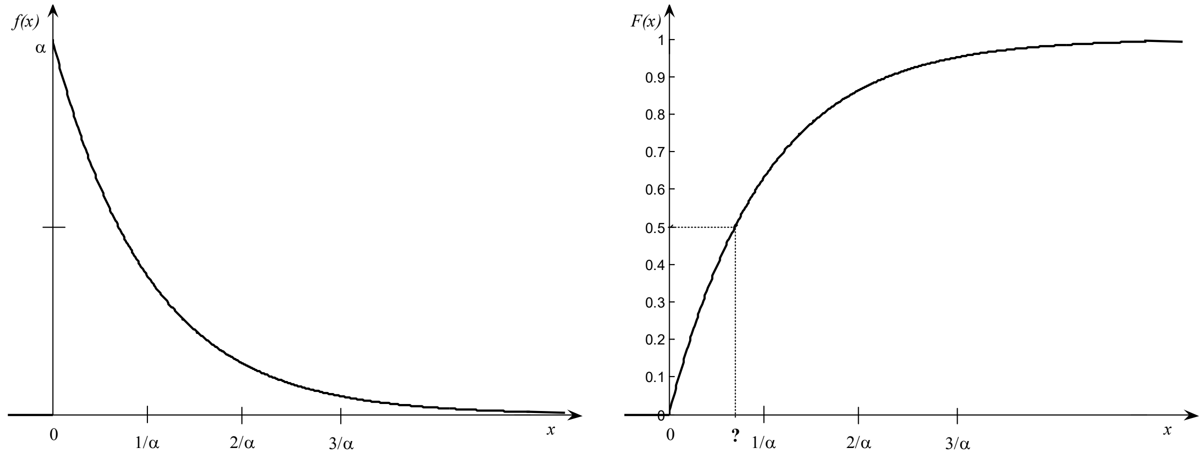


Figura Ejercicio 8. Función de densidad de probabilidad y función de distribución de $X \sim \text{Exp}(\alpha)$.

e) El tiempo hasta la primera falla de elementos, siempre que se produzcan por causas exclusivamente aleatorias (proceso de Poisson), no por desgaste o por fatiga se puede modelar con una distribución exponencial. La vida o número de horas de funcionamiento de cierto tubo electrónico es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro $\alpha=0{,}02$, $X \sim \text{Exp}(\alpha=0{,}02)$. Calcular la probabilidad de que la vida de uno de estos tubos:
i. sea de a lo sumo 30 horas; **ii.** esté entre 30 y 100 horas; **iii.** sea superior a 100 horas.

Ejercicio 9. Variable Aleatoria con Distribución Exponencial y Proceso de Poisson Asociado.

a) Sea X_t una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda=\alpha t$ (un proceso de Poisson de tasa de ocurrencia $\alpha>0$). Si T es la variable aleatoria continua correspondiente al tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos, demostrar que $P(T<t)=(1-e^{-\alpha t})$ con $t\geq 0$, y así la variable aleatoria T tiene distribución exponencial de parámetro α.

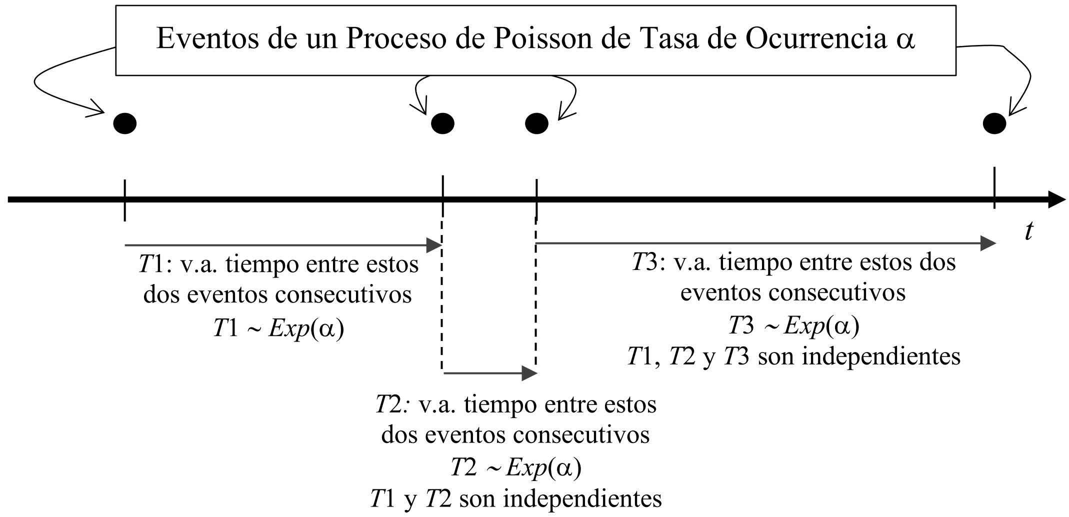


Figura esquemática del Ejercicio 9.

b) El tiempo de atención de un trámite, en una oficina pública, tiene distribución Exponencial con media 20 minutos. Se entregan 25 turnos a primera hora. Calcular la probabilidad que en las 8 horas de trabajo se pueda atender a todos los interesados.

Ejercicio 10. Sea T la variable aleatoria continua que define el tiempo medido en días de duración de ciertos chips de memoria RAM (no disipa energía) y que obedece a una ley de probabilidad exponencial con parámetro $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, tal que $f_T(t)=\alpha e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$ y nula en otro caso.

a) Se tiene el registro de que el 95% de los chips de una partida producida de este tipo duran por lo menos 400 días. Proponer, a partir de este conocimiento, el parámetro α que completa el modelo para T.

b) Con el valor de α hallado en la parte **a)**, calcular la probabilidad de que un chip funcione entre 500 y 600 días.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el chip funcione entre 500 y 600 días si lleva 1 año de funcionamiento?

Ejercicio 11. La duración, en horas, del bulbo de 40W de una lámpara incandescente tipo globo −fabricada con cubierta o difusor en cristal y filamento de tungsteno− obedece a una ley de probabilidad de tipo exponencial con parámetro $\alpha=0{,}001$.

a) Una empresa que produce este tipo de bulbos desea garantizarlos durante cierto tiempo. ¿Cuántas horas debe amparar la garantía de que el bulbo funcione, para que haya una probabilidad de 0,95 de que funcione por lo menos el número de horas garantizado?

b) Un arreglo utiliza cinco de estos bulbos y funciona mientras funcionen todos ellos. Los bulbos funcionan (y fallan) en forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo opere, por lo menos 100 horas? ¿Y 1000 horas?

c) Otro arreglo también utiliza cinco de estos bulbos y funciona mientras lo hagan por lo menos tres de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo funcione aún al término de 1000 horas?

Ejercicio 12. Cierto tipo de fusible tiene una vida útil que puede ser considerada como una variable aleatoria con distribución Exponencial. Hay dos procesos por medio de los cuales se puede manufacturar. El proceso I conduce a una vida media de 100 horas y tiene un costo por fusible de C pesos. El proceso II resulta en una vida media de 150 horas pero el costo por fusible es el doble que con el proceso I. Si el fusible dura menos de 200 se incurre en una pérdida de K pesos. ¿Qué proceso es preferible? ¿Depende de la relación entre K y C? En caso afirmativo, indicar las condiciones bajo las cuales es preferible el proceso I o el proceso II.

Ejercicio 13. Variable Aleatoria con Distribución de Rayleigh. La función de densidad de una variable aleatoria X con distribución de Rayleigh y la función de distribución correspondiente, son:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}(x-a)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} & x\ge a\\ 0 & x<a\end{cases},\quad F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} & x\ge a\\ 0 & x<a\end{cases},\ a\in\mathbf{R} \text{ y } b\in\mathbf{R}_{>0}.$$

Es, al igual que la distribución exponencial, un caso particular de la distribución de Weibull (ver apéndice II).

a) Hallar la mediana de X, esto es el valor $\tilde{x}$ que verifica que $P(X\le\tilde{x})=P(X>\tilde{x})$. Ubicar este valor en el gráfico correspondiente a $F_X(x)$ (ver figura).

b) Demostrar que el valor máximo de la función de densidad se produce en $x=a+b$, este valor se llama moda de X. Hallar el valor de la función $F_X(x)$ en este valor, ubicar en el gráfico (ver figura) y demostrar que dicho valor no depende de los parámetros a y b.

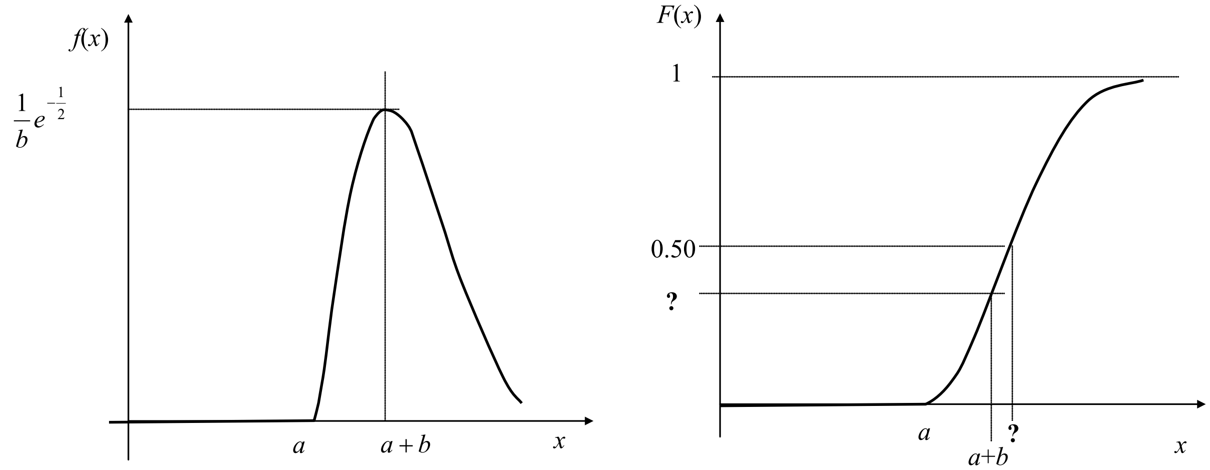


Figura Ejercicio 13. Función de densidad y función de distribución de X con distribución de Rayleigh

Ejercicio 14. Aplicaciones de la distribución de Rayleigh.

a) El tiempo de vida de un sistema mecánico expresado en semanas es una variable aleatoria de Rayleigh X con $a=0$ y $b=400$.
   i. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema no dure una semana completa?
   ii. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vida del sistema sea mayor que un año?
   iii. Hallar la probabilidad de que el sistema funcione más de 26 semanas sabiendo que ya ha funcionado más de 20 semanas.

b) El esfuerzo vibratorio X, medido en lb/pulg^2, en la paleta de una turbina de viento a una velocidad de viento particular en un túnel de viento. El artículo "Blade Fatigue Life Assessment with Apllication to VAWTS" (*J. Solar Energy Engr.*, 1982, pp107-111) propone la distribución de Rayleigh como modelo para la distribución de X con $a=0$ y $b=100$. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor entre 100 y 200?

c) La envolvente (amplitud) de la señal de salida de radar que sólo está recibiendo ruido (no señal) es una tensión aleatoria de Rayleigh X, medida en volt, tal que $a=0$ y $b=2$ El sistema detecta un objetivo falso si X excede un nivel de umbral de V volt. ¿Cuál debe ser el valor de V para que la probabilidad de hacer una detección falsa sea igual a 0,001?

d) El modelo de Weibull se ha mostrado adecuado para la duración de cojinetes a bolillas y a rodillos, pues en estas piezas suelen tener importancia tanto las fallas por desgaste como las aleatorias, debidas estas últimas a vibraciones y golpes. Para un tipo a bolilla se ha establecido que los parámetros valen $a=0$ y $b=100$, expresándose la variable X en millones de revoluciones. Calcular el porcentaje con duraciones mayores a 120 millones de revoluciones.

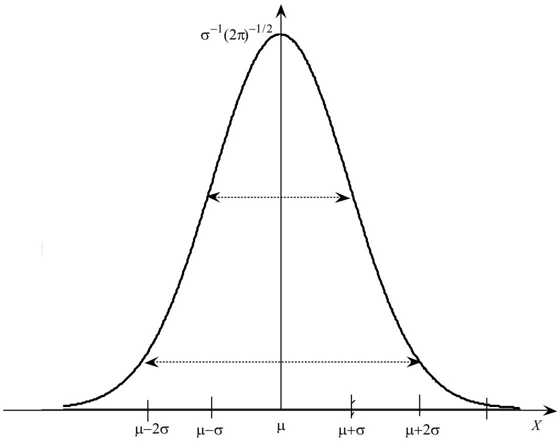
Ejercicio15. Variable Aleatoria con Distribución Normal. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros valor esperado μ_X y desviación estándar σ_X, $X\sim N(\mu_X;\sigma_X^2)$.

a) Demostrar que la función de densidad de probabilidad correspondiente

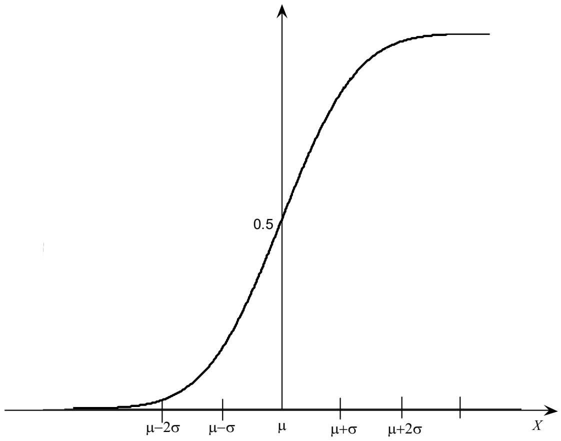
$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}$$

con $x\in\mathbf{R}$, $\mu_X\in\mathbf{R}$, $\sigma_X\in\mathbf{R}_{>0}$ presenta
   i. un máximo en $x=\mu_X$,
   ii. dos puntos de inflexión ubicados en $x=\mu_X-\sigma_X$ y en $x=\mu_X+\sigma_X$, y
   iii. es simétrica con respecto a la recta $x=\mu_X$, esto es $f_X(\mu_X-a)=f_X(\mu_X+a)$ $\forall a\in\mathbf{R}$.

b) Dar la expresión formal de la función de distribución acumulativa de X, $F_X(x)$.



Función de densidad de probabilidad de $X\sim N(\mu;\sigma^2)$



Función de distribución acumulativa de $X\sim N(\mu;\sigma^2)$

c) Para un valor esperado nulo y un desvío estándar unitario, esto es para la variable normal estándar o tipificada $Z\sim N(0;1^2)$, dar las expresiones correspondientes a la función de densidad $f_Z(z)$ y la función de distribución acumulativa $F_Z(z)=P(Z\leq z)=\Phi(z)$.

d) Proponer en $X\sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ un cambio de variable del tipo $aX+b$ de forma de obtener $Z\sim N(0,1^2)$.

e) Escribir las probabilidades $P(\mu_X - a\sigma_X < X < \mu_X + a\sigma_X)$ para a=1,2,3 en términos adecuados de $\Phi(z)$.

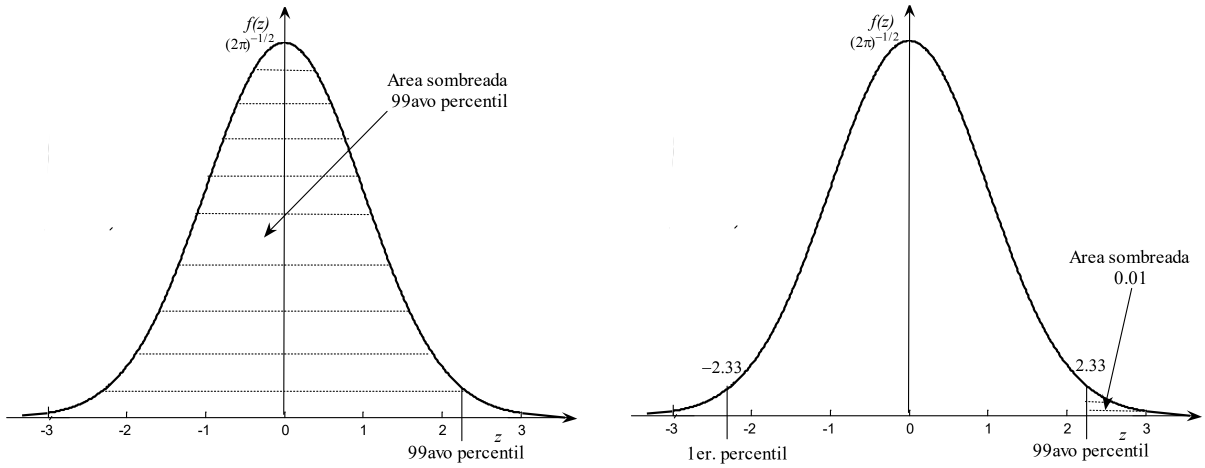
Ejercicio 16. Z representa una variable normal estándar $N(0;1^2)$.

a) Calcular: i. $P(Z\leq 1)$, ii. $P(Z>1)$, iii. $P(Z<-1{,}57)$, iv. $P(-1{,}5<Z\leq 0{,}5)$.

b) Hallar c tal que: i. $P(0\leq Z\leq c)$=0,49, ii. $P(|Z|\leq c)$=0,49, iii. $P(c\leq |Z|)$=0,49.

c) Para cualquier valor p entre 0 y 1 se puede hallar el (100p)avo percentil de la distribución. Por ejemplo, el 99avo percentil es aquel que deja en la curva $f_Z(z)$ un área encerrada a izquierda de 0,99. Se utilizará la siguiente notación: z_α denotará el valor en el eje de medición tal que deja a su derecha un área α en la curva $f_Z(z)$ esto es $P(Z\geq z_\alpha)=\alpha$ con $0<\alpha<1$. Así, el 99avo percentil es $z_{0,01}$; el primer percentil es el opuesto, $-z_{0,01}$. Utilizando esta nomenclatura, completar la siguiente tabla.

Percentil	90,00		97,50	99,00	99,50		99,95
α (área de cola derecha)		0,050		0,010		0,001	
z_α=100(1−α)avo percentil				2,33			



Relación entre los percentiles primero y 99avo en la variable aleatoria normal estándar

Ejercicio 17. Una empresa que produce jugos de fruta posee una máquina automática que llena los envases de 450 ml. Sin embargo, hay cierta variación que se produce en el llenado, poniendo al sistema fuera de control. Durante un intervalo muy grande se tuvo una cantidad promedio de entrega a cada envase de 450 ml con una desviación estándar de 28,125 ml. Si se supone que la cantidad servida en cada envase sigue una distribución normal, estimar la probabilidad de que la máquina suministre más de 478,125 ml de líquido en cualquier envase.

Ejercicio 18. Un radar tiende a sobreestimar la distancia de un aeroplano, y el error es una variable aleatoria normal con una media de 50 metros y una desviación estándar de 100 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia medida sea menor que la distancia verdadera?

Ejercicio 19. En los Juegos Olímpicos, la jabalina se lanza a distancias que siguen de forma aproximada una distribución normal, $X\sim N(\mu_X;\sigma_X^2)$ medida en metros, con μ_X=58 y σ_X=6, para la rama femenina. En la ronda de calificación para los juegos de París 2024, el lanzamiento de las candidatas tiene que superar los 64 metros para calificarse. El récord de lanzamiento mundial de 72,28 metros lo estableció la deportista checa Barbora Špotáková (1981-) en la ciudad alemana de Stuttgard el 13 de Septiembre de 2008.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lanzamiento supere la distancia de calificación?

b) En la ronda de calificación cada jugadora ejecuta tres lanzamientos independientes y queda calificada si el mejor de los tres supera la distancia de calificación. ¿Cuál es la probabilidad de ser descalificada en una ronda de calificación?

c) ¿Cuál es la probabilidad de batir el récord durante el próximo evento principal?

Ejercicio 20. Decisión entre dos procesos de fabricación en función del costo. Las especificaciones para un capacitor determinan que su "vida" debe oscilar entre 1500 y 4500 horas. Se sabe que su vida está normalmente distribuida con una media de 3000 horas. El ingreso proveniente por la venta de cada capacitor dentro de la especificación es de $9,00; una unidad fallada debe ser reemplazada a un costo de $3,00 para la empresa. Dos procesos de fabricación pueden producir capacitores con vidas útiles de medias satisfactorias (3000 horas). La desviación estándar para el proceso A es de 750 horas y para el proceso B es de 500 horas. Los costos de fabricación por unidad para el proceso A son la mitad de los del proceso B. ¿Qué valor del costo de fabricación por unidad es crítico en la medida de optar por el proceso A ó B?

Ejercicio 21. Detección de una señal binaria. Se transmite un mensaje binario como una señal S, la cual puede ser -1 ó 1 con igual probabilidad. El canal de comunicación corrompe la transmisión con un ruido aditivo W aleatorio con distribución normal de valor medio nulo, $\mu_W=0$, y varianza σ_W^2. El receptor concluye que fue transmitida la señal -1 si el valor recibido $X=S+W$ es menor que 0, o que fue transmitida la señal +1 si el valor recibido es mayor o igual a 0, como se esquematiza en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de error?

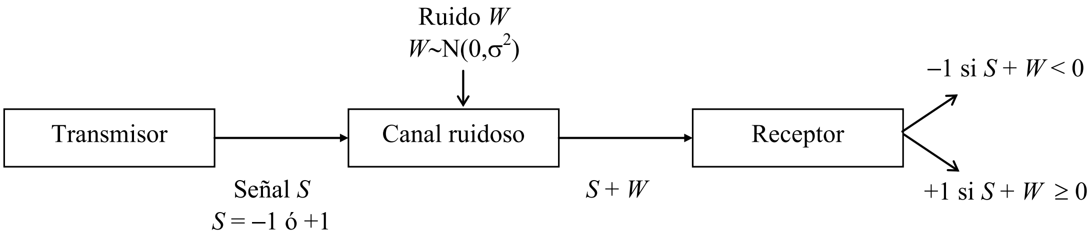


Figura Ejercicio 21. Detección de una señal binaria.

Ejercicio 22. La tensión de salida X del receptor de un sistema de comunicación digital binario presenta las características descritas a continuación. Cuando se está recibiendo un 0 binario, es una variable aleatoria normal (sólo ruido) con valor medio nulo y desviación estándar de 0,3. Cuando se recibe un 1 binario también es una variable aleatoria normal (ahora señal mas ruido) con valor medio 0,9 y desviación estándar 0,3. La lógica de decisión del receptor especifica que al final de un intervalo binario (bit), si $X>0{,}45$ se dice que ha recibido un 1. Si $X\leq 0{,}45$, se dice que es un 0 binario.

a) Si resulta que realmente se recibe un 0 binario, hallar las probabilidades de que
   i. se decida que es un 1 binario (error), y
   ii. se decida que es un 0 binario (decisión correcta).

b) Si resulta que realmente se recibe un 1 binario, hallar las probabilidades de que
   i. se decida que es un 1 binario (decisión correcta), y
   ii. se decida que es un 0 binario (error).

c) ¿Qué porcentaje de dígitos se interpretan correctamente cuando llega al receptor una señal donde el 60% son 0 y los restantes 1?

Ejercicio 23. Cierta característica de calidad X de un artículo se distribuye normalmente con media μ_X y desviación estándar σ_X. Los artículos de la producción se clasifican en A, B ó C según que el valor de X se halle a más de un σ_X por debajo de μ_X, a menos de un σ_X respecto de μ_X, o más de un σ_X por encima de μ_X. La probabilidad de que un artículo elegido al azar pase exitosamente una prueba de control de calidad es 0,5, 0,9 y 0,6 para A, B y C, respectivamente. Hallar el número esperado de artículos que aprobarán el control en una muestra de 100 artículos elegidos al azar de una producción de tamaño mucho mayor.

Ejercicio 24. En una empresa, en el 60% de los días la producción es menor de 150 kilos, el 35% de los días se producen entre 150 y 160 kilos, y en los mejores días se superan los 160 kilos. Con estos datos, si el volumen de producción diario (en peso) se modelase con una variable aleatoria normal X, ¿cuánto valdrían su media μ_X y su desvío estándar σ_X?