Autovalores y autovectores

Vectores que mantienen la dirección

Si A $es\ una\ matriz\ de\ n\ x\ n, y\ X\ es\ un\ vector\ de\ R^n,$ $distinto\ del\ vector\ nulo\ .$

Entonces se denomina autovector de A, si AX es múltiplo escalar de X, es decir:

$$A \cdot X = \lambda\, X$$

autovector autovalor

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Autovalor
$\lambda = 3$

X= autovector

Para hallar los autovalores partimos de la definición: $A \in R^{nxn}, X \in R^{n}$

$$\boxed{A \cdot X = \lambda\, X} \Rightarrow A \cdot X - \lambda\, X = O$$

$(A - \lambda\, I)\, X = O$ por propiedad distributiva

Esta expresión representa a un sistema lineal homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas, como no nos interesa la solución trivial, buscamos $X \neq \overline{O}$, por lo tanto el $\det(A - \lambda I) = 0$

Ejemplo : Dada la siguiente matriz correspondiente a una transformación lineal de $R^3 \rightarrow R^3$, hallar sus autovalores.

A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Si resolvemos por la segunda columna:

$(2 - \lambda)[-\lambda(3 - \lambda) + 2] = 0$

$\lambda = 2$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = 1\; y\; \lambda = 2$

autovalores

$\lambda = 1\; y\; \lambda = 2$

La suma de los autovalores coincide con la traza de la matriz.

Y la multiplicación de los autovalores con el determinante.

PARA HALLAR LOS AUTOVECTORES, RESOLVEMOS EL SISTEMA HOMOGÉNEO $(A - \lambda\, I)\, X = O$

- $si\ \lambda = 1$
- $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad y = z$, $x = -2z$
- *Por ser la solución de un sistema homogéneo forman un subespacio.*
- $\bar{x}_{\lambda=1} = (-2\mathrm{z}, \mathrm{z}, \mathrm{z})$ $\quad \dim(\lambda = 1) = 1$
- $base_{\lambda=1} = \{(-2, 1, 1)\}$

- $si\ \lambda = 2$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $x = -z$
- $\bar{x}_{\lambda=2} = (-\mathrm{z}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

  $\dim(\lambda = 2) = 2$
- $base_{\lambda=2} = \{(-1, 0, 1)\,;(0, 1, 0)\}$

Ejercicio 12.

Adquirir el método del cálculo de autovalores y autovectores.

Para cada una de las siguientes transformaciones lineales determinar los autovalores y sus correspondientes subespacios de autovectores asociados y, en caso de ser posible, encontrar una matriz de pasaje que diagonalice a la matriz asociada de la transformación. Ortonormalizar la base de autovectores de la transformación y, en caso de ser posible, escribir una matriz de pasaje ortogonal.

$f(e_1)$ $f(e_2)$ $f(e_3)$

$f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3, 2x_2+3x_3, 3x_3)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I)=0 \qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)]=0$$

Ecuación característica

$P(\lambda) = (1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)]$

$$P(\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$

Polinomio característico

$-1+6-11+6=0$

$-8+24-22+6=0$

Autovalores: $\underline{\lambda=1}, \lambda=2 \ y \ \lambda=3$

Resolvemos el sistema homogéneo para los valores de λ hallados

$(A-\lambda I)x=0$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

$si\ \lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)_{\frac{1}{2}F_3}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$y=0$, $z=0$

$\bar{x}_{\lambda=1}=(\mathrm{x},0,0)$

$base_{\lambda=1}=\{(1,0,0)\}$

$\dim(\lambda=1)=1$

$si\ \lambda=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$x=2y$, $z=0$

$\bar{x}_{\lambda=2}=(2\mathrm{y},\mathrm{y},0)$

$base_{\lambda=2}=\{(2,1,0)\}$

$\dim(\lambda=2)=1$

$si\ \lambda=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)_{-F_1}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 1 & 0\\ -6 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)_{\frac{1}{5}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 1 & 0\\ -6/5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2/5 & 0 & 1 & 0\\ -6/5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$y=6/5x$, $z=2/5x$

$\bar{x}_{\lambda=3}=(\mathrm{x},6/5\mathrm{x},2/5\mathrm{x})$

$base_{\lambda=3}=\{(1,6/5,2/5)\}$

$\dim(\lambda=3)=1$

El conjunto de todos los autovalores correspondientes a un autovalor λ, se denomina subespacio propio correspondiente al autovalor λ.

$$V_\lambda = \{\bar{x} \in R^n \ / \ f(\bar{x}) = \lambda\, \bar{x}\} = \{\bar{x} \in R^n \ / \ A\bar{x} = \lambda\, \bar{x}\}$$

$$V_\lambda = \{\bar{x} \in R^n / (A - \lambda I)\, \bar{x} = \bar{0}\}$$

$$V_\lambda = \text{Nú}(A - \lambda I)$$

Dim $V_\lambda = n - rango(A - \lambda I)$

La ***multiplicidad algebraica*** *del autovalor* λ coincide con el orden de λ como raíz del polinomio característico.

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq ma \leq n$$

$$\dim V_\lambda = multiplicidad\ geométrica$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Si $A^2 = A$ y λ es autovalor de A, entonces $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

H

$A \in R^{nxn}$

$A^2 = A$

λ *es autovalor de* $A \Rightarrow A\bar{x} = \lambda\bar{x}$

T

$\lambda = 0 \;\; o \;\; \lambda = 1$

D

$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ Por ser λ autovalor

$\underline{A^2\bar{x} = \lambda\bar{x}}$ *Por ser* $A^2 = A$

$$\left.\begin{aligned} A^2\bar{x} &= A\,(A\,\bar{x}) \\ A^2\bar{x} &= A\,\lambda\,\bar{x} \\ A^2\bar{x} &= \lambda\,(A\bar{x}) \; * \end{aligned}\right\}$$ Por H

$* \; A^2\bar{x} = \lambda\,\lambda\,\bar{x}$

$\underline{A^2\bar{x} = \lambda^2\,\bar{x}}$

$\lambda^2\,\bar{x} = \lambda\bar{x}$ igualando

$\lambda^2\,\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0}$

$\lambda^2\,\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0}$

$(\lambda^2 - \lambda)\,\bar{x} = \bar{0}$

No puede ser $\bar{0}$ por ser autovector

$(\lambda^2 - \lambda) = 0$

$\lambda\,(\lambda - 1) = 0$ $\boxed{\lambda = 0}$ o $\boxed{\lambda = 1}$

Calcula los autovalores, los subespacios propios y sus dimensiones

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el para la matriz C

$$\det(C - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & 1 \\ 0 & -\lambda & 7 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(C - \lambda I) = (5-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda)$$

$$(5-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\boxed{\lambda = 5}$ $\boxed{\lambda = -2}$

Son todos autovalores distintos entonces la multiplicidad algebraica de cada λ es 1, son todas raíces simples.

Hallamos los autovectores resolviendo el sistema homogéneo $(C - \lambda\, I)\, X = O$

$si\ \lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}F_3}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$5x - 8y = 0 \qquad \boxed{x = \frac{8}{5}y}$$

$$\bar{x}_{\lambda=0} = (\frac{8}{5}y, y, 0) \qquad \bar{x}_{\lambda=0} = (8y, 5y, 0)$$

¿Con los datos obtenidos , podríamos dar una base del núcleo de la transformación, sin realizar cálculos?

$$base_{\lambda=0} = \{(8, 5, 0)\}$$

Al reemplazar $\lambda = 0$ resolvemos el sistema $C\ X\ = 0$

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq ma \leq n$$

NULIDAD DE LA MATRIZ

$\dim Núcleo = 1$ $\qquad$ $base_{Núcleo} = \{(8,5,0)\}$

- Entonces si $\lambda = 0$ es un autovalor , la transformación NO ES INYECTIVA.

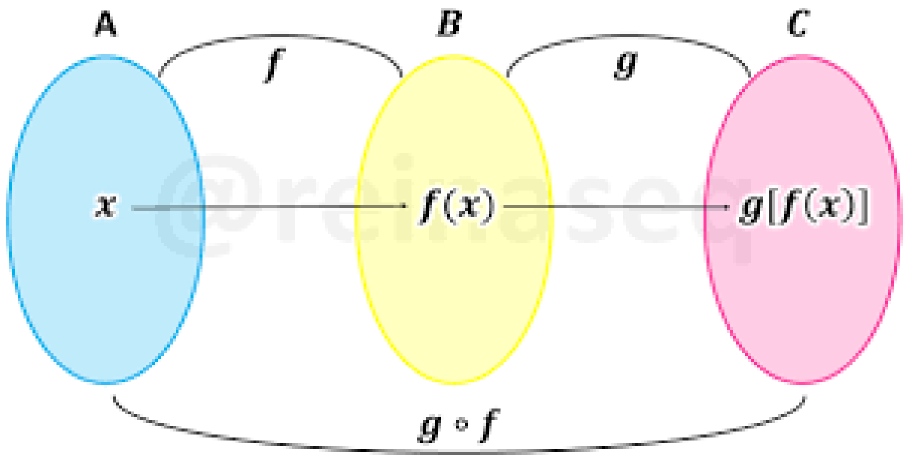
- El determinante de la matriz de la transformación es igual a 0.

- Siempre que la dimensión del núcleo de la transformación sea mayor que 0,
$\lambda = 0$ será un autovalor y la dimensión de su subespacio propio coincidirá con el rango de la matriz.

Matriz	Raíces	Autovalores	Subespacio propio	dim V_λ (mult. geo-métrica)
A	2 doble 9	2 doble 9	$V_2 = \langle (1,2,0), (0,6,1) \rangle$ $V_9 = \langle (1,1,1) \rangle$	2 1
B	-2 doble 1	-2 doble 1	$V_{-2} = \langle (-1, 1\ 0) \rangle$ $V_1 = \langle (1, -1, 1) \rangle$	1 1
C	-2 0 5	-2 0 5	$V_{-2} = \langle (-58, -49, 14) \rangle$ $V_0 = \langle (8, 5, 0) \rangle$ $V_5 = \langle (1, 0, 0) \rangle$	1 1 1
D	1 1-2i 1+2i	1	$V_1 = \langle (0, 0, 1) \rangle$	1

MATRIZ ASOCIADA A UNA COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean las transformaciones lineales
$f: A \to B \;\; y \; g: B \to C$, donde A, B, C son espacios vectoriales.



La composición lineal $g \circ f: A \to C$

Entonces la matriz de la composición:

$$M(g \circ f) = M_g \cdot M_f$$

Ejemplo: dadas las transformaciones $f: R^2 \to R^3 \ / \ f(x,y) = (x-y, y, 2x)$

$$g: R^3 \to R^2 / f(x,y,z) = (x-y, y+z)$$

Hallar $[f \circ g](\bar{x}) : \ R^3 \to R^3$

$[f \circ g](\bar{x}) = f(x-y, y+z) = (x-2y-z, y+z, 2x-2y)$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f \circ g](\bar{x}) = (M_f \cdot M_g)(\overline{x})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$[f \circ g](\bar{x}) = (x - 2y - z, y + z, 2x - 2y)$$

Hallar $[g \circ f](\bar{x}) : \ R^2 \to R^2$

$$[g \circ f](\bar{x}) = (M_g \cdot M_f)(\overline{x})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$[f \circ g](\bar{x}) = (x - 2y, 2x + y)$$

INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Si una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es **biyectiva**, entonces existe $T^{-1}: W \rightarrow V$, que también es una transformación lineal.

Luego de verificar que es biyectiva , calculamos la matriz inversa de la transformación.

Sea $T;\ R^3 \rightarrow R^3 / f(x, y, z) = (x - 2y, y + z, -3y)$

Calculamos el núcleo de *T:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que en esta matriz podemos pivotear tres veces, entonces el $Nu_T = (0, 0, 0)$ → ES INYECTIVA

Si la dimensión del núcleo es 0, la dimensión de la imagen será 3, entonces:

$Im(T) = R^3$ → ES SOBREYECTIVA

COMO VERIFICAMOS QUE ES BIYECTIVA, CALCULAMOS LA INVERSA

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{-1}{3}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$T^{-1}\colon R^3 \to R^3 / f(x,y,z) = (x - {}^2/_3\, z, {}^{-1}/_3\, z,\ y + {}^1/_3\, z)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $(T \circ T^{-1})(\overline{x}) = (T^{-1} \circ T)(\bar{x}) = (\bar{x})$

11.3) Dadas las siguientes transformaciones lineales, efectuar, con cada par de ellas, todas las composiciones posibles si:

$f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 : f(x_1,x_2)=(x_1-x_2,-2x_1+3x_2,x_2-2x_1)$,

$g:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : g(x_1,x_2,x_3)=(x_3-x_2,0,-3x_2+x_3)$,

$h:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 : h(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,-x_2+x_3)$.

$f\circ g$: no se puede realizar $F_{3x2}\cdot G_{3x3}$ no es posible la multiplicación

$g\circ f:\ R^2 \to R^3 \to R^3$ $G_{3x3}\cdot F_{3x2}=M_{3x2}$

$f\circ h:\ R^3 \to R^2 \to R^3$ $F_{3x2}\cdot H_{2x3}=M_{3x3}$

$h\circ f:\ R^2 \to R^3 \to R^2$ $H_{2x3}\cdot F_{3x2}=M_{2x2}$

$g\circ h$:no se puede realizar $G_{3x3}\cdot H_{2x3}$ no es posible la multiplicación

$h\circ g:\ R^3 \to R^3 \to R^2$ $H_{2x3}\cdot G_{3x3}=M_{2x3}$

$$F=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$g \circ f: R^2 \to R^3 \to R^3 \qquad G_{3x3} \cdot F_{3x2} = M_{3x2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (-2\mathrm{y}, 0{,}4\mathrm{x} - 8\mathrm{y})$$

$$h \circ f: R^2 \to R^3 \to R^2 \qquad H_{2x3} \cdot F_{3x2} = M_{2x2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(h \circ f)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (3\mathrm{x} - 4\mathrm{y}, -2\mathrm{y})$$

$$f \circ h: R^3 \to R^2 \to R^3 \qquad F_{3x2} \cdot H_{2x3} = M_{3x3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f \circ h)(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (\mathrm{x} - \mathrm{z}, 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 3\mathrm{z}, \quad -2\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z})$$

Ejercicio 2. Decidir si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, si es falsa proponer un contraejemplo. Sean A y B dos matrices inversibles de $\mathbf{R}^{n\times n}$.

a) Si $A^{-1}\cdot(C+X)\cdot B^{-1}=I$ entonces $X= A\cdot B - C$.

b) Si $X \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ es autovector de $A\cdot B^{-1}$ con autovalor $\lambda \neq 0$, entonces X es también autovector de $B\cdot A^{-1}$ pero con autovalor λ^{-1}.

c) El rango de $M = A\cdot B$ es menor que n.

a)

H

A y B son inversibles

$A^{-1}\cdot(C+X)\cdot B^{-1} = I$

T

$X = A\cdot B - C$

D

$A^{-1}\cdot(C+X)\cdot B^{-1} = I$

$A\cdot A^{-1}\cdot(C+X)\cdot B^{-1} = A\cdot I$

$I\cdot(C+X)\cdot B^{-1} = A$

$(C+X)\cdot B^{-1}\cdot B = A\cdot \mathrm{B}$

$(C+X)\cdot I = A\cdot \mathrm{B}$

$C+X = A\cdot \mathrm{B}$

$\boxed{X = A\cdot \mathrm{B} - \mathrm{C}}$

Verdadera

b) Si $X \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ es autovector de $A \cdot B^{-1}$ con autovalor $\lambda \neq 0$, entonces X es también autovector de $B \cdot A^{-1}$ pero con autovalor λ^{-1}.

H

A y B son inversibles
$(A \cdot B^{-1})\, X = \lambda\, X$

T

$(B \cdot A^{-1})\, X = \lambda^{-1}\, X$

D

$(A \cdot B^{-1})\, X = \lambda\, X$

$(B \cdot A^{-1})(A \cdot B^{-1})\, X = (B \cdot A^{-1})\lambda\, X$

$B \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B^{-1}\, X = (B \cdot A^{-1})\lambda\, X$

$B \cdot I \cdot B^{-1}\, X = (B \cdot A^{-1})\lambda\, X$

$(B \cdot B^{-1})\, X = (B \cdot A^{-1})\lambda\, X$

$X = (B \cdot A^{-1})\lambda\, X$

$\frac{1}{\lambda} X = (B \cdot A^{-1})\, X$

$\boxed{\lambda^{-1} X = (B \cdot A^{-1})\, X}$

Verdadera

c) El rango de $M = A \cdot B$ es menor que n.

Si A y B son inversibles su determinante es distinto de 0.

El rango de A y B es el mayor posible, igual a n.

$$\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A) \quad \text{y} \quad \mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(B).$$

Tanto a la matriz A como a la matriz B podemos transformarla en una matriz escalonada y su rango no varia.
En este caso el rango sería igual al de la identidad por ser matrices inversibles

$$r(M) = r(I) \cdot r(B)$$

$$r(M) = r(B)$$

$$r(M) = n$$

Falsa

3) Sean $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la simetría respecto del plano de ecuación $x + y + z = 0$ y $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una rotación en sentido antihorario de 120° alrededor del eje z.

a) Encontrar las matrices A_f y A_g de las transformaciones f y g expresadas en las bases canónicas.

b) Determinar los autovalores de A_f y sus respectivos autovectores. Justificar la respuesta.

c) Hallar una base ortonormal de autovectores de A_f.

d) Verificar o justificar adecuadamente que la matriz $A = (A_g)^3 \cdot (A_f)^3$ es involutiva.

a) $\overline{OP`} = \left(\frac{x_1 - 2x_2 - 2x_3}{3}, \frac{-2x_1 + x_2 - 2x_3}{3}, \frac{-2x_1 - 2x_2 + x_3}{3}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_g = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Determinar los autovalores de A_f y sus respectivos autovectores. Justificar la respuesta.

¿Será necesario hacer cálculos?

Los vectores paralelos al plano son autovalores asociados con $\lambda = 1$

Una base para $\lambda = 1$

$x + y + z = 0$

$x = -y - z = 0$

$\bar{x} = (-y - z, y, z)$

$Base_{\lambda=1}\{(-1,1,0)\ ;\ (-1,0,1)\}$

Los vectores paralelos a la recta normal al plano son autovectores asociados con $\lambda = -1$

$Base_{\lambda=-1}\{(1,1,1)\ \}$

c) Hallar una base ortonormal de autovectores de A_f.

Sólo tenemos que ortonormalizar la base del plano

$$Base_{\lambda=1}\{\underbrace{(-1,1,0)}_{\bar{u}_1} ; \underbrace{(-1,0,1)}_{\bar{u}_2}\}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2 - proy_{W_1}\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2 - proy_{W_1}\vec{u}_2\|} = \frac{\vec{u}_2 - \langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle.\vec{v}_1}{\|\vec{u}_2 - \langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle.\vec{v}_1\|} = \frac{(-1,0,1) - \left\langle(-1,0,1);\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\rangle.\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}{\left\|(-1,0,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\|}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{(-1,0,1) - \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\|} \quad \boxed{\frac{\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},1\right)}{\sqrt{\frac{6}{4}}}} \quad = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\boxed{Base\ de\ A_f = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}}$$

d) Verificar o justificar adecuadamente que la matriz $A = \left(A_g\right)^3 \cdot \left(A_f\right)^3$ es involutiva.

Sean f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la simetría respecto del plano de ecuación $x + y + z = 0$ y g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una rotación en sentido antihorario de 120° alrededor del eje z.

Ejercicio 4. Sea $S \subset \mathbf{R}^3$ el subespacio vectorial generado por el vector $\{\vec{u} = (1,2,-2)\}$ y sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre el subespacio $S^{\perp}$ (complemento ortogonal de S).

a) Hallar la forma explícita de f y su matriz asociada.

b) Hallar los autovalores y autovectores de f. Dar una interpretación geométrica de los mismos y mencionar que vínculo existe entre los subespacios de autovectores de f y el núcleo y la imagen de f.

Ejercicio 5. Sea el subespacio $S = \left\{\vec{v} \in \Re^3 \,/\, \vec{v} = \alpha\,(1,1,0) + \beta(0,0,1), \forall\alpha, \forall\beta \in \mathbf{R}\right\}$. Hallar el subespacio $S^{\perp}$ y luego definir una transformación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de forma tal que S sea el subespacio de los autovectores asociado con un autovalor λ=2 y que $Nu(f) = S^{\perp}$.

P3. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ siendo a, b y c parámetros reales. Si se sabe que la traza de M es 6 y que $\vec{v}_1 = (0,0,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,-1,2)$ son dos vectores propios de M,

a) Determinar la matriz M.

b) Calcular el valor de la expresión $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ utilizando los conceptos de valor y vector propio.