TRANSFORMACIONES LINEALES

UNA FUNCIÓN LINEAL

UNA T.L ES UNA FUNCIÓN f QUE TOMA UN VECTOR DE UN ESPACIO VECTORIAL V Y ME DEVUELVE COMO IMAGEN UN VECTOR DE UN ESPACIO VECTORIAL W.

$f: V \rightarrow W$ QUE CUMPLE LAS SIGUIENTES CONDICIONES DE LINEALIDAD:

1) $f(\overline{u}+\overline{v}) = f(\overline{u}) + f(\overline{v})$

2) $f(\lambda \overline{u}) = \lambda f(\overline{u})$

EJEMPLOS: indicar si las siguientes funciones son t.l

$$f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 / f(x,y) = (2x+y, x-y)$$

$f(1,5) = (2.1+5, 1-5)$
$f(1,5) = (7, -4)$

Para que la función dada sea T.L tiene que cumplir las condiciones de linealidad.

Observación:

Los términos de la ley de formación tienen que ser todos de grado 1, salvo que la imagen sea el vector nulo o alguna componente de dicha imagen sea 0

$\overline{u} = (x,y) \wedge \overline{v} = (x',y')$

$f(\overline{u}+\overline{v}) = f(\overline{u}) + f(\overline{v})$

$f(\overline{u}+\overline{v}) = f(x+x', y+y') = (2.(x+x') + y + y', x + x' - (y+y'))$

$f(\overline{u}+\overline{v}) = (2x + 2x' + y + y', x + x' - y - y')$ (1)

$= (2x+y, x-y) + (2x'+y', x'-y') = f(x,y) + f(x',y')$ *

$f(\overline{u}) + f(\overline{v}) = f(x,y) + f(x',y')$

$f(\overline{u}) + f(\overline{v}) = (2x+y, x-y) + (2x'+y', x'-y')$

$f(\overline{u}) + f(\overline{v}) = (2x + 2x' + y + y', x + x' - y - y')$ (2)

(1) = (2)

Cumple la primera condición.

$$f(\lambda\overline{u}) = \lambda f(\overline{u})$$

2) $f(\lambda\overline{u}) = f(\lambda x, \lambda y) = (2x\lambda + \lambda y, \lambda x - \lambda y)$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda(2x + y, x - y) = \lambda f(\overline{u})$$

La Transformación es lineal.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f(x,y) = (x.y, x - y, y)$

Al observar detectamos que en la primera componente del vector imagen no hay linealidad, por lo tanto no es T.L

Contraejemplo

$$\overline{u} = (1,2) \wedge \overline{v} = (2,3)$$

$$f(\overline{u} + \overline{v}) = f(3,5) = (15, -2, 5) \quad (1)$$

$$f(\overline{u}) + f(\overline{v}) = f(1,2) + f(2,3) = (2, -1, 2) + (6, -1, 3) = (8, -2, 5) \quad (2)$$

$$(1) \neq (2)$$

PROPIEDADES DE LAS T.L

a) $f(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$

b) $f\,(-\bar{v}) = -f(\overline{v})$

c) $f(\overline{u} - \overline{v}) = f\big(\overline{u} + (-\overline{v})\big)$ $f(\bar{u}) + f(-\bar{v})$
$f(\bar{u}) - f(\bar{v})$

$$= f(\overline{u}) + f(-\overline{v}) = f(\overline{u}) + (-1)f(\overline{v})$$
$$= f(\overline{u}) - f(\overline{v})$$

MATRIZ ASOCIADA A LA TRANSFORMACIÓN

- A CADA TRANSFORMACIÓN LINEAL LE CORRESPONDE UNA MATRIZ LLAMADA MATRIZ ASOCIADA A LA T.L CUYAS COLUMNAS SON LA IMAGEN DE LA BASE CANÓNICA DEL ESPACIO DE SALIDA.

- EJEMPLOS: **1)**

$: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f(x, y)(2x + y, x - 3y, x + 4y)$

$f(1,0) = (2,1,1) \qquad f(0,1) = (1,-3,4)$

$$\begin{array}{cc} f\binom{1}{0} & f\binom{0}{1} \end{array}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{3x2}$$

- **2)**

$f: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x + 3y - z, y + 2z, x + 3t)$

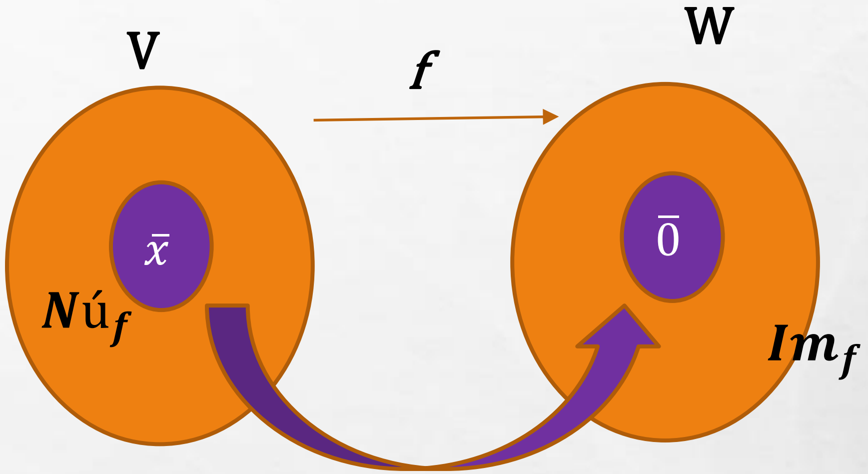
$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1) \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (3,1,0) \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1,2,0)$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,3)$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x4}$$

Observación: Los coeficientes de cada componente se ubican en cada fila.

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA T.L



Núcleo:

Son todos los vectores del conjunto de partida cuya imagen es el vector nulo.

$f: V \to W$

$$Nf = \left\{ \bar{x} \in V \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0} \right\}$$

Imagen:

Son todos los vectores del conjunto de llegada que tienen correspondencia con algún elemento del conjunto de salida.

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \bar{y} \in W \,/\, \exists \bar{x} \in V \wedge f(\bar{x}) = \bar{y} \right\}$$

Ejemplos:

1) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (x-y, x+z, x+y+z)$

$f(1,0,0) = (1,1,1)$

$f(0,1,0) = (-1,0,1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Núcleo $AX = 0$ Nulidad de A

NÚCLEO es un subespacio

$$Nf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$f(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$(x-y, x+z, x+y+z) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

SCD

$\Downarrow$

las columnas son LI

det(A) $\neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Mínimas ecuaciones:

$$\begin{cases} x + z = 0 \to x = 0 \\ y + z = 0 \to y = 0 \\ -z = 0 \to z = 0 \end{cases}$$

$$Nf = \{(0,0,0)\} = \bar{0}$$

SG pero LD

Base no tiene

Conclusión 1: El núcleo es el subespacio Nulidad de la matriz de la transformación

TEOREMA DE LAS DIMENSIONES

DIM (NF) + DIM (IMF) = DIM (V)

conjunto de solución

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

En el ejemplo anterior

0 + Dim (Imf) = 3

Dim (imf) = 3

Im(f) = $\mathbf{R}^3$

Coincide con el espacio de llegada.

$$B_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2x2} / f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-2y & x+z \\ -2y-z & 2x-2y+z \end{pmatrix}$

$\underset{4\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Núcleo</u> $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+z=0 \\ -2y-z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

$A\, X = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x-2y=0 \to x=2y \\ 2y+z=0 \to z=-2y \end{cases}$$

$(x,y,z) = \lambda(2,1,-2) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\bar{x}_{Nf} = \{(2y,y,-2y)\}$

$\boxed{B_{Nf} = \{(2,1,-2)\}\ \dim(Nf) = 1}$

$Nf = \{(2y,y,-2y)\} \forall y \in \mathbb{R}$

Geométricamente es una recta que pasa por el origen

Imagen

$Dim\,(N_f) + Dim\,(Im_f) = Dim\,(V)$

$$1 + Dim\,(Im_f) = 3$$
$$Dim\,(Im_f) = 2$$

Como no coincide con el conjunto de llegada hay que calcularla.

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2y & x+z \\ -2y-z & 2x-2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-2y = w_1 \\ x+z = w_2 \\ -2y-z = w_3 \\ 2x-2y+z = w_4 \end{cases}$$

Conclusión 2: La imagen es el subespacio Columna de la matriz de la transformación

Condiciones de la imagen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & w_2 \\ 0 & -2 & -1 & w_3 \\ 2 & -2 & 1 & w_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & w_1 \\ 0 & 2 & 1 & w_2 - w_1 \\ 0 & -2 & -1 & w_3 \\ 0 & 2 & 1 & w_4 - 2w_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & w_1 \\ 0 & 2 & 1 & w_2 - w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_3 + w_2 - w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 - 2w_1 - w_2 + w_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} w_3 + w_2 - w_1 = 0 \rightarrow w_3 = w_1 - w_2 \\ -w_1 - w_2 + w_4 = 0 \rightarrow w_4 = w_1 + w_2 \end{cases}$$

Condiciones de la imagen

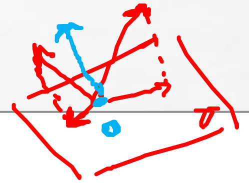
$$\begin{cases} w_3 + w_2 - w_1 = 0 \rightarrow w_3 = w_1 - w_2 \\ -w_1 - w_2 + w_4 = 0 \rightarrow w_4 = w_1 + w_2 \end{cases}$$

$$\bar{x}_f = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1 - w_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

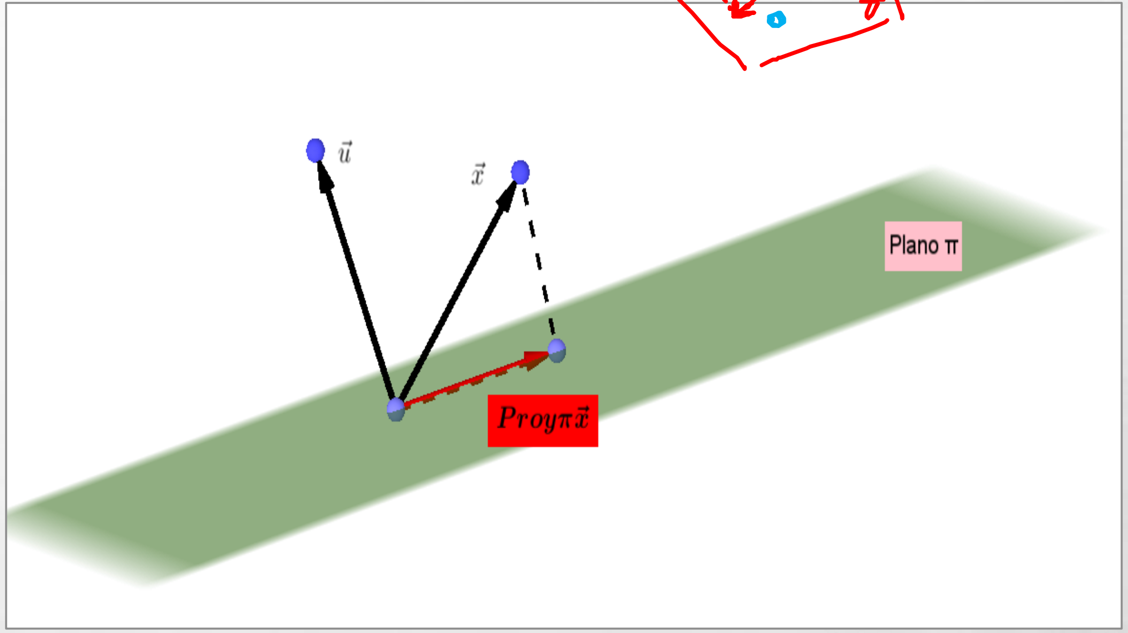
$$B_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3) $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = proy_\pi \overline{x}$

Si $\pi: \ x+y-2z=0$



Este ejercicio es geométrico ya que es una proyección ortogonal. Por otro lado, no sabemos quién es el plano π



Nf es la recta cuya dirección es la normal del plano

$\dim(Nf) = 1$ $\quad \vec{\eta}\ (1,1,-2)$

$B_{Nú} = \{(1,1,-2)\}$

Imagen es el plano π $\dim(Imf) = 2$

$x = 2z - y$

$\bar{x} = (2z-y, y, z)$ $\quad B_I = \{(2,0,1); (-1,1,0)\}$

Propiedades de lo observado:

1) El núcleo de una T.L es subespacio del espacio de salida.

*) Nf $\subset V$ x definición.

**) $\bar{0} \in Nf$ por la propiedad que dice:

$$f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$$

*****) L.C.I**

$$Si \quad \bar{x} \in Nf \rightarrow f(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$Si \quad \bar{y} \in Nf \rightarrow f(\bar{y}) = \bar{0}$$

$$sumamos \quad m.a.m$$

$$f(\bar{x}) + f(\bar{y}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{0}$$

$$(\bar{x} + \bar{y}) \in Nf$$

******) L.C.E**

$$Si \quad \bar{x} \in Nf \rightarrow f(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$multiplicamos \quad por\, \lambda$$

$$\lambda f(\bar{x}) = \lambda \bar{0}$$

$$\lambda f(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$f(\lambda \bar{x}) = \bar{0}$$

$$(\lambda \bar{x}) \in Nf$$

Demostramos que el núcleo de una T.L es subespacio del espacio de salida.

1) La imagen de una T.L es subespacio del espacio de llegada. Se puede demostrar en forma similar a lo realizado anteriormente.

Clasificación de las T.L

Como una T.L es una función se puede clasificar en inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

- **Inyectiva:**

$f: V \to W$ **ES INYECTIVA** $\boxed{\leftrightarrow Nf = \bar{0}}$

- **Sobreyectiva:**

$f: V \to W$ **ES SOBREYECTIVA** $\boxed{\leftrightarrow \operatorname{Im} f = W}$

- **Biyectiva:**

$f: V \to W$ **ES BIYECTIVA** $\Leftrightarrow$ **ES INYECTIVA y SOBREYECTIVA.**

Ejercicio 3.

Identificación de la calidad de suficiencia de la información aplicada a transformaciones lineales.
Reconocimiento de la incompatibilidad en la información.

3.3) ¿Es posible hallar una transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $f(1,-1,2)=(0,3,1)$ y $f(1,1,-4)=(0,-4,1)$ y $f(1,0,-2)=(0,-1,1)$? ¿Por qué?

LI
SC

necesito una base del conjunto de salida

SCD, $\det(A) \neq 0$

Tengo que verificar si los vectores :$\{(1,-1,2),(1,1,-4),(1,0,-2)\}$ son base

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} \qquad Det(B) = -8 + 6 = -2$$

Si ,es posible hallar una transformación, porque tengo en los datos una base del conjunto de salida.

Cualquier vector de R^3, *lo puedo escribir como C L* de la base dada

$$(x, y, z) = \alpha(1, -1, 2) + \beta\,(1, 1, -4) + \gamma(1, 0, -2)$$

Ej: $(-1, 2, -3) = -1/2 \quad \frac{3}{2} \quad -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 2 & -4 & -2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y+x \\ 0 & -6 & -4 & z-2x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 2 & 1 & y+x \\ 0 & 2 & 0 & 2x+4y+z \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 2 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & 0 & (2x+4y+z)/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (2x+2y+z)/2 \\ 0 & 0 & 1 & -x-3y-z \\ 0 & 1 & 0 & (2x+4y+z)/2 \end{array}\right)$$

$\alpha = 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 + (-3))/2$

$\alpha = 2x + 2y + z)/2$

$\beta = (2x + 4y + z)/2$

$\beta = (-2 + 8 - 3)/2$

$\gamma = -x - 3y - z$

$\gamma = 1 - 6 + 3$

3.3) ¿Es posible hallar una transformación lineal $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $f(1,-1,2)=(0,3,1)$ y $f(1,1,-4)=(0,-4,1)$ y $f(1,0,-2)=(0,-1,1)$? ¿Por qué?

$$\alpha = (2x+2y+z)/2$$
$$\beta = (2x+4y+z)/2$$
$$\gamma = -x-3y-z$$

3.3) ¿Es posible hallar una transformación lineal $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $f(1,-1,2)=(0,3,1)$ y $f(1,1,-4)=(0,-4,1)$ y $f(1,0,-2)=(0,-1,1)$? ¿Por qué?

$$(x,y,\ z) = \alpha(1,-1,2) + \beta\,(1,1,-4) + \gamma(1,0,-2)$$

Si aplicamos la función a cada miembro

$$f(x,y,\ z) = f\,[\alpha(1,-1,2) + \beta\,(1,1,-4) + \gamma(1,0,-2)\,]$$

$f(x,y,z) = \alpha\, f(1,-1,2) + \beta f(1,1,-4) + \gamma f(1,0,-2)$

$f(1,-1,2) = (0, (-2)(-1) + \frac{1}{2}\cdot 2, 1)$

$f(1,-1,2) = (0, 3, 1)$

$$f(x,y,z) = \frac{2x+2y+z}{2} f(1,-1,2) + \frac{(2x+4y+z)}{2} f(1,1,-4) + (-x-3y-z) f(1,0,-2)$$

$$f(x,y,z) = \frac{2x+2y+z}{2}(0,3,1) + \frac{(2x+4y+z)}{2}(0,-4,1) + (-x-3y-z)(0,-1,1)$$

$$f(x,y,z) = \left(0, \frac{6x+6y+3z}{2}, \frac{2x+2y+z}{2}\right) + \left(0, \frac{(-8x-16y-4z)}{2}, \frac{(2x+4y+z)}{2}\right) + (0, x+3y+z, -x-3y-z)$$

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (0, \quad -2y + \frac{1}{2}z, \quad x)}$$

TEOREMA DE LA EXIXTENCIA Y LA UNICIDAD DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

DADA LA T. L $f: V \rightarrow W$,SEA EL CONJUNTO B UNA BASE DEL ESPACIO VECTORIAL V , EXISTE Y ES ÚNICA LA T L.

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ \ldots \ldots .. \bar{v}_n\}$ **es base de V**

$$f: V \rightarrow W \quad \rightarrow f(\bar{v}_i) = \overline{w_i} \ \ \forall\, i = 1,2, \ldots \ldots \mathrm{n}$$

$\forall\, \bar{u} \ \in V \ \Rightarrow \ \bar{u} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots \ldots .. \quad \alpha_n \bar{v}_n$ **Por ser el conjunto B base**

Si aplicamos la función a cada miembro

$$f(\bar{u}) = f(\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots \ldots .. \quad \alpha_n \bar{v}_n)$$

$$f(\bar{u}) = f(\alpha_1 \bar{v}_1) + f(\alpha_2 \bar{v}_2) + \cdots \ldots .. \quad f(\, \alpha_n \bar{v}_{n)})$$

$$f(\bar{u}) = \alpha_1 f(\bar{v}_1) + \alpha_2 f(\bar{v}_2) + \cdots \ldots .. \quad \alpha_n f(\bar{v}_n)$$

Por ser T.L

Entonces la transformación lineal también va a ser única

Ejercicio 2: Sea $f: R^3 \to R^3$, la transformación lineal que proyecta ortogonalmente cualquier vector de R^3 sobre el subespacio complemento ortogonal de $S = \{(x,y,z) \in R^3 / y+z=0\}$, esto es sobre $S^{\perp}$. Halla la forma explicita de *f* y su matriz asociada.

- **SI F PROYECTA A TODO VECTOR DE R^3 SOBRE $S^{\perp}$., LOS VECTORES DIRECTORES DE S SE TRANSFORMAN EN EL NULO, ES DECIR**

$B_{Nuf} = \{((1,0,0)(0,-1,1)\} \Longrightarrow f(1,0,0) = (0,0,0) \wedge f(0,-1,1) = (0,0,0)$

- $B_{Imf} = \{(0,1,1)\} \implies f(0,1,1) = (0,1,1)$

HALLEMOS LA TRANSFORMACIÓN:

$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,-1,1) + \gamma(0,1,1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 2 & y+z \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1/2(y+z) \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1/2(y+z) \\ 0 & 1 & 0 & -1/2y+1/2z \end{array}\right)$$

$$f(x,y,z) = x \cdot f(1,0,0) + (-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) \cdot f(0,-1,1) + (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) \cdot f(0,1,1)$$

$$f(x,y,z) = (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)(0,1,1)$$

$$f(x,y,z) = (0; \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z; \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

https://view.genial.ly/60c0fc4d9ee5940d2351ce30/interactive-content-transformaciones