Transformaciones Lineales Geométricas

Mg. Lic. Jorge Kamlofsky

1. Introducción

Una transformación lineal (TL) geométrica se puede aplicar a un vector posición geométrico o a un conjunto de vectores posición geométricos. Por ser TL una transformación lineal, existirá una matriz operadora de la TL. Eso significa que esa matriz pre-multiplica a una matriz que contiene a los vectores posición (en columna), de modo que en una sola operación matricial se logra la transformación lineal geométrica de un vector o de un conjunto de vectores.

Ya sea en el caso de las imágenes digitales o en modelos tridimensionales, ese vector o conjunto de vectores puede contener a los vectores de un conjunto de puntos aislados, a los vectores del conjunto de vértices de un polígono, de los puntos del borde de un objeto, de los puntos de un objeto, de una porción o ventana de la imagen o bien a toda la imagen.

Dado que un polígono puede definirse a partir de sus vértices ordenados (y dado que este puede ser la simplificación de los bordes de un objeto), al polígono se lo puede definir como una matriz donde cada columna corresponde con el vector posición de cada vértice. De ese modo, puede aplicarse una TL sobre todo un polígono con una sola operación: el producto entre la matriz de transformación y la matriz del polígono.

A continuación se presentan ejemplos de su uso:

Ejemplo 1: Si se conoce que una cámara está rotada 5° en comparación con otra cámara que apunta al mismo objeto y luego se desean comparar sus imágenes, generalmente se comenzaría con alinear la orientación de la imágenes, rotando la primer imagen 5° en sentido opuesto.

Ejemplo 2: Otro ejemplo se presenta cuando se usan scanners automáticos de alimentación múltiple. En muchos casos, el mecanismo de transporte de las hojas posee algún desbalance mecánico. Resulta entonces, que todas las imágenes aparecen algo rotadas. Esto se corrige aplicando la correspondiente rotación inversa al total de las imágenes.

2. Introducción a Transformaciones Lineales

2.1. Definición

Sea T una función en un espacio vectorial V a un espacio vectorial W. Entonces T es una transformación lineal si cumple:

$$I.\ \forall\ \bar{u}\ \in V\ ,\forall\ \bar{v}\ \in W : T\left(\bar{u}+\bar{v}\right)=T\left(\bar{u}\right)+T\left(\bar{v}\right) \qquad (1a)$$

$$II.\ \forall\ \bar{u}\ \in V\ ,\forall\ c\ \in \mathbb{R}: T\left(c\,.\,\bar{u}\right)=c\,.\,T\left(\bar{u}\right) \qquad (1b)$$

2.2. Propiedad

La siguiente propiedad presenta a las matrices como operadores de transformaciones lineales.

$$Sea\ T:TL,\ X\in\mathbb{R}^{nxm},\ A\in\mathbb{R}^{mxn}/T\left(X\right)=A\,.\,X\Rightarrow A\ es\ la\ matriz\ asociada\ a\ la\ transformación\ lineal\ T. \qquad (2)$$

3. Transformaciones lineales geométricas:

3.1. Definición

Son transformaciones lineales que se realizan sobre uno o más vectores geométricos, en el plano o en el espacio. Puede hallarse información en Lengyel (2011) y detalles de implementación en Kamlofsky y Bergamini (2014b).

3.2. Escalados

Se llama escalado del vector X a la TL:

$$T\left(X\right)=E\,.\,X=X' \qquad (3a)$$

donde E es una matriz cuadrada, diagonal con elementos no nulos en la diagonal, de orden 2 o 3, dependiendo si la TL es en el plano o en el espacio y X' es el vector que resulta del escalado del vector X.

El escalado, es un proceso que puede revertirse mediante el uso de la matriz inversa al escalado E^{-1}, que al tratarse de una matriz diagonal cuadrada con elementos no nulos en la diagonal, existe, y su obtención es sencilla. Su cálculo se presenta más adelante.

Pre-multiplicando por E^{-1} a ambos miembros de la expresión (3.a):

$$\begin{aligned} &E^{-1}.E\,.\,X=E^{-1}.X \\ &I\,.\,X=E^{-1}.X' \\ &X=E^{-1}.X \end{aligned} \qquad (3b)$$

3.2.1. Escalado en el plano

Dados dos escalares no nulos a, b, se llama escalado del vector X en el plano a la TL:

$$T(X)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=X' \qquad (3c)$$

con:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

el vector posición del punto a transformar (que puede ser una matriz de puntos), y

$$E=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

la matriz de escalado, donde los escalares no nulos a, b escalan X en las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

Ejemplo 3: Sea el rectángulo X conformado por: X={A(0;0), B(2;0), C(2;1), D(0;1)}. Obtener X': el escalado de X, 3/2 veces en x y 2 veces en y.

Aplicando ecuación 3a y 3c:

$$X'=T(X)=E.X=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente: X'={A'(0;0), B'(3;0), C'(3;2), D'(0;2)}

Nota: Las expresiones matriciales de las transformaciones que se presentan en esta sección deben realizarse con vectores columna.

La ilustración 1 ilustra el ejemplo 3.

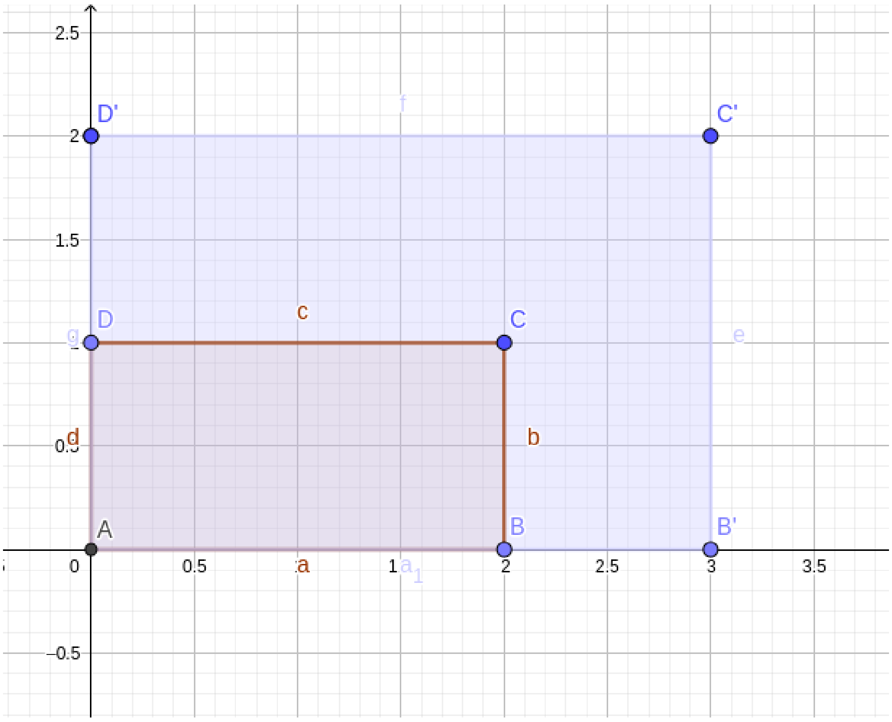

Ilustración 1: Escalado no uniforme en el plano de los vértices de un rectángulo

3.2.2. Inversa del escalado en el plano

Si E es la matriz de escalado en el plano (según 3c), su matriz inversa es:

$$E^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

Si todos los elementos de la diagonal de E son no nulos, es fácil ver que existe E^{-1}: la inversa de E.

$$E^{-1}.E=E.E^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

3.2.3. Escalados especiales en el plano

Algunos escalados especiales en el plano se dan para valores especiales de los escalares a y b:

Si $a = 1$ y $b = 1$: transformación identidad.

Si $a = -1$ y $b = 1$: simetría axial respecto al el eje y.

Si $a = 1$ y $b = -1$: simetría axial respecto al el eje x.

Si $a = -1$ y $b = -1$: simetría central (respecto del origen de coordenadas).

Si $a = b$: escalado uniforme.

3.2.4. Escalado en el espacio

Dados tres escalares no nulos a, b, c, se llama escalado en el espacio a la TL:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' \tag{3d}$$

con:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

el vector posición del punto a transformar,

$$E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

es la matriz de escalado, donde los escalares no nulos a, b y c escalan X en las direcciones de los eje x, y y z respectivamente.

Ejemplo 4: Sea el prisma rectangular X conformado por sus vértices: X={A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D(0;2;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;2;1), H(0;2;1)}. Obtener X': el escalado de X, 2 veces en x, 3/2 veces en y y 2 veces en z.

Aplicando ecuación 3d:

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = X'$$

Finalmente: X'={A(0;0;0), L(2;0;0), M(2;3;0), O(0;3;0), P(0;0;2), I(2;0;2), J(2;3;2), K(0;3;2)}

La ilustración 2 ilustra el Ejemplo 4.

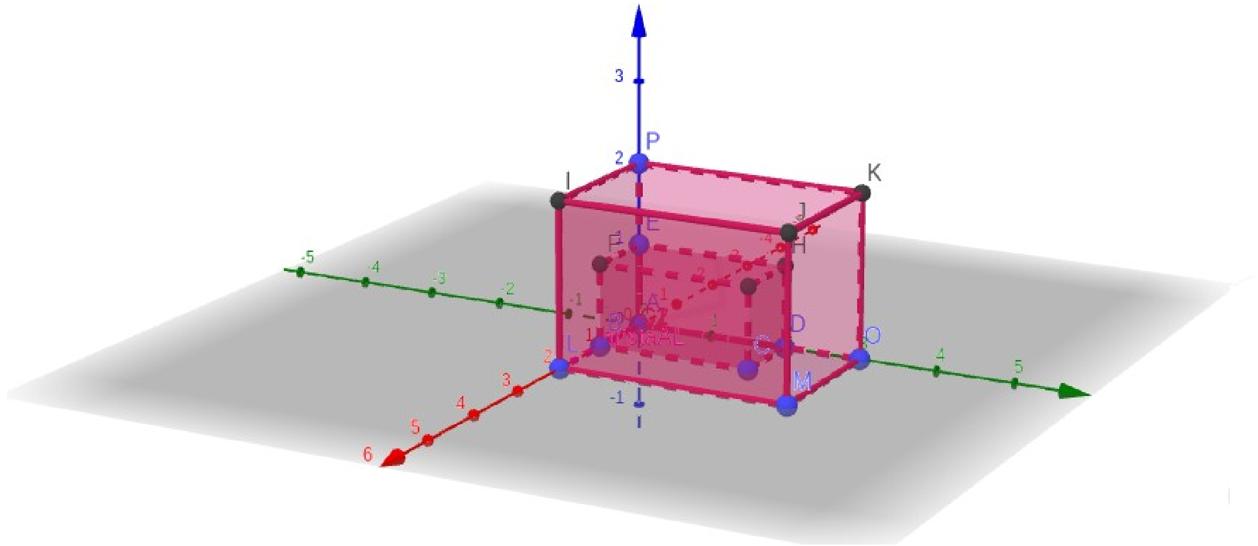

Ilustración 2: Escalado no uniforme en el espacio de los vértices de un prisma.

3.2.5. Inversa del escalado en el espacio

Si E es la matriz de escalado en el espacio (según la ecuación 3d), su matriz inversa es:

$$E^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que E^{-1} es la inversa de E ya que:

$$E^{-1}.E=E.E^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

3.2.6. Algunos escalados especiales en el espacio

Se dan para valores especiales de los escalares a, b y c:

Si $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$: transformación Identidad.

Si $a = -1$, $b = 1$ y $c = 1$: simetría respecto al plano yz.

Si $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$: simetría respecto al plano xz.

Si $a = –1$, $b = 1$ y $c = –1$: simetría respecto al plano xy.

Si $a = –1$, $b = –1$ y $c = 1$: simetría axial respecto al eje z.

Si $a = 1$, $b = –1$ y $c = –1$: simetría axial respecto al eje x.

Si $a = –1$, $b = 1$ y $c = –1$: simetría axial respecto al eje y.

Si $a = –1$, $b = –1$ y $c = –1$: simetría central (respecto del origen de coordenadas).

Si $a = b = c$: escalado uniforme.

3.3. Proyecciones ortogonales sobre ejes y planos coordenados

Las proyecciones ortogonales sobre ejes o planos coordenados son transformaciones geométricas no inversibles donde la matriz de transformación es una matriz cuadrada, diagonal, de orden 2 o 3 (según si la transformación se da en el plano o en el espacio) que solo contiene ceros y unos en la diagonal, con al menos un uno y un cero en ella.

3.3.1. Proyección ortogonal de un vector en el plano sobre el eje x

Se llama proyección ortogonal en el plano del vector X sobre el eje x a la TL:

$T(X) = P_x.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=X' \qquad (3e)$$

con:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

el vector posición del punto a transformar (que puede ser una matriz de puntos),

$$P_x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

la matriz de proyección ortogonal en el plano de un vector sobre el eje x.

Ejemplo 5: Sea el vector $\bar{a}$ el vector posición del punto $A(2;1)$. Obtener $\bar{a}'$: el vector de la proyección ortogonal del vector $\bar{a}$ sobre el eje x.

Aplicando la ecuación 3e:

$$T(\bar{a})=P_{x.}\bar{a}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\bar{a}'$$

La Ilustración 3 representa al ejemplo 5.

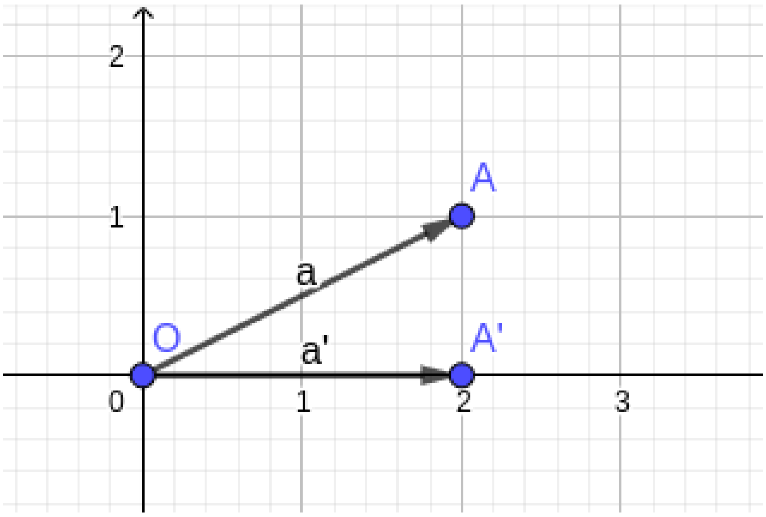

Ilustración 3: Proyección de un vector sobre el eje x

3.3.2. Proyección ortogonal de un vector en el plano sobre el eje y

Se llama proyección ortogonal en el plano del vector X sobre el eje y a la TL:

$T(X) = P_y.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=X' \qquad (3f)$$

3.3.3. Proyección ortogonal de un vector en el espacio sobre el eje x

Se llama proyección ortogonal en el espacio del vector X sobre el eje x a la TL:

$T(X) = P_x.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}=X' \qquad (3g)$$

3.3.4. Proyección ortogonal de un vector en el espacio sobre el eje y

Se llama proyección ortogonal en el espacio del vector X sobre el eje y a la TL:

$T(X) = P_y.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}=X' \qquad (3h)$$

Proyección ortogonal de un vector en el espacio sobre el eje z

Se llama proyección ortogonal en el espacio del vector X sobre el eje z a la TL:

$T(X) = P_z.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ z\end{pmatrix}=X' \qquad (3i)$$

3.3.5. Proyección ortogonal de un vector en el espacio sobre el plano xy

Se llama proyección ortogonal en el espacio del vector X sobre el plano xy a la TL:

$T(X) = P_{xy}.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}=X' \qquad (3j)$$

Ejemplo 6: Sea el vector $\bar{\boldsymbol{b}}$ el vector posición del punto $B(3;4;2)$. Obtener $\bar{\boldsymbol{b}}'$: la proyección ortogonal del vector $\bar{\boldsymbol{b}}$ sobre el plano xy.

Aplicando la ecuación 3j:

$$T(\bar{b})=P_{xy}.\bar{b}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\bar{b}'$$

La Ilustración 4 representa al ejemplo 6.

3.3.7. Proyección ortogonal de un vector en el espacio sobre el plano xz

Se llama proyección ortogonal en el espacio del vector X sobre el plano xz a la TL:

$T(X) = P_{xz}.X = X'$

$$T(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 0\\ z\end{pmatrix}=X' \qquad (3k)$$

3.3.8. Proyección ortogonal de un vector en el espacio sobre el plano yz

Se llama proyección ortogonal en el espacio del vector X sobre el plano yz a la TL:

$T(X) = P_{yz}.X = X'$

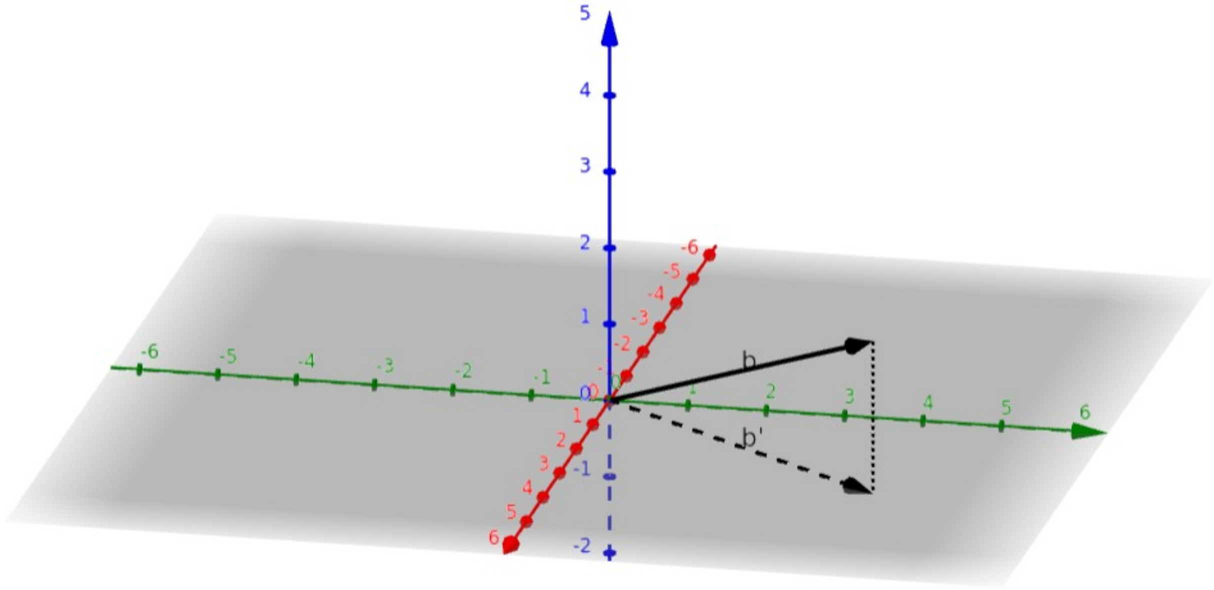

Ilustración 4: Proyección del vector $\overline{b}$ sobre el plano coordenado xy

$$T(X)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix}=X' \qquad (3l)$$

3.4. Rotaciones

La rotación de un vector en un sentido antihorario un ángulo α es una transformación lineal dada por:

$$T(X)=R.X=X' \qquad (4a)$$

donde R es la matriz de rotación asociada a la transformación lineal T, con R matriz ortonormal.

Las rotaciones, son también, procesos que puede revertirse mediante el uso de la matriz inversa. Y dado que las matrices de rotación son matrices ortonormales, entonces, su inversa es su traspuesta. Entonces:

$$R^{-1}=R^{T} \qquad (4b)$$

3.4.1. Rotación en el plano

La rotación en el plano de un vector en un sentido antihorario a un ángulo α es una transformación lineal dada por (según ecuación 4a):

$$T(X)=R.X=X'$$

$$T(X)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -sen\,\alpha\\ sen\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=X' \qquad (4c)$$

con:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

el vector posición del punto a transformar,

$$R=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -sen\,\alpha\\ sen\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

es la matriz de rotación asociada a la transformación lineal T que rota al vector X un ángulo α en sentido anti-horario.

Ejemplo 7: Sea el triángulo $X=\{A(0;0), B(2;0), C(2;1)\}$. Obtener X': la rotación de X, 30° en sentido antihorario.

Según ecuación 4a:

$$T(X)=R.X=X'$$

Aplicando ecuación 4c:

$$T\left[\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}-\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=X'$$

Finalmente: $X'=\{A(0;0),B(\sqrt{3};1),C(\sqrt{3}-\frac{1}{2};1+\frac{\sqrt{3}}{2})\}$

La ilustración 5 grafica el ejemplo 7.

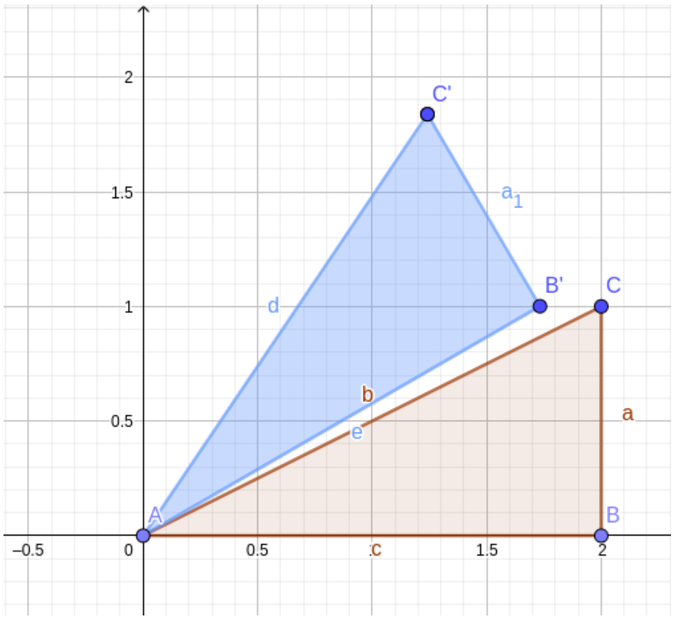

Ilustración 5: Rotación de los vértices de un triángulo.

3.4.2. Inversa de la rotación en el plano

Si R es la matriz de rotación en el plano (presentada en 4c), su matriz inversa es, según 4b, su traspuesta:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que R^{-1} es la inversa de R ya que:

$$R^{-1}.R = R.R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3.4.3. Rotaciones en el espacio

La expresión 4a puede extenderse para el espacio:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' \qquad (4d)$$

donde R es la matriz de rotación del vector X un ángulo α.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad (4e)$$

R en la ecuación 4e realiza la rotación de X un ángulo α en sentido positivo en torno al eje x.

$$R=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & 0 & sen(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ -sen(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \qquad (4f)$$

R en la ecuación 4f realiza la rotación de X un ángulo α en sentido positivo en torno al eje y.

$$R=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0\\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (4g)$$

R en la ecuación 4g realiza la rotación de X un ángulo α en sentido positivo en torno al eje z.

Ejemplo 8: Sea el prisma X={A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D(0;2;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;2;1), H(0;2;1)}. Obtener X': una rotación de X a un ángulo de 180° alrededor del eje x.

Aplicando 4e en 4d:

$$T(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=X'$$

Finalmente:

X'={A(0;0;0), L(1;0;0), M(2;-2;0), O(0;-2;0), P(0;0;-1), I(1;0;-1), J(1;-2;-1), K(0;-2;-1)}

La ilustración 6 grafica al ejemplo 8.

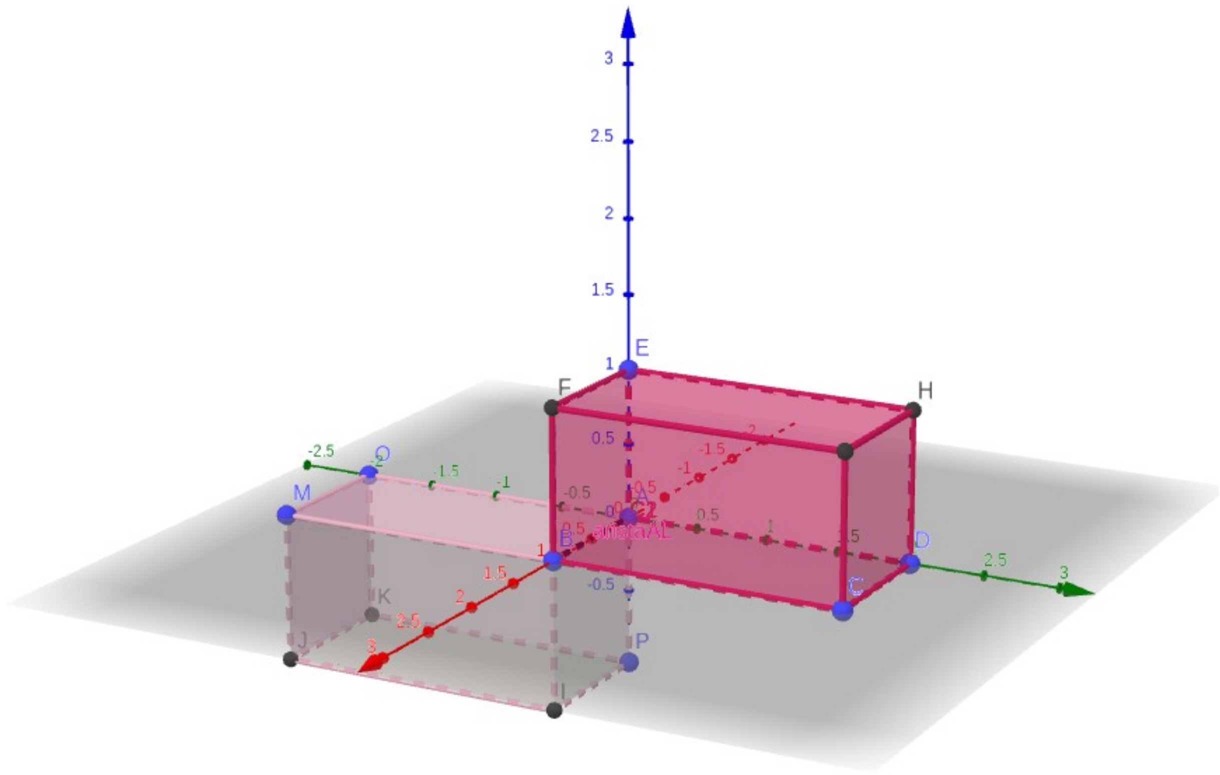

Ilustración 6: Rotación del prisma alrededor del eje x

3.4.4. Inversa de las rotaciones en el espacio

R^{-1} es la matriz de rotación inversa de R (presentada en la ecuación 4d) que rota al vector X un ángulo α.

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ 0 & -sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{4h}$$

La matriz R (presentada en la ecuación 4e) rota al vector X un ángulo α alrededor del eje x. R^{-1} presentada en la ecuación 4h realiza la rotación inversa de la matriz de rotación R.

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -sen(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{4i}$$

La matriz R (presentada en la ecuación 4f) rota al vector X un ángulo α alrededor del eje y. R^{-1} presentada en la ecuación 4i realiza la rotación inversa de la matriz de rotación R.

$$R^{-1}=\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & sen(\alpha) & 0 \\ -sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4j)$$

La matriz R (presentada en la ecuación 4g) rota al vector X un ángulo α alrededor del eje z. R^{-1} presentada en la ecuación 4j realiza la rotación inversa de la matriz de rotación R.

3.5. Composición de transformaciones geométricas

La composición de transformaciones lineales geométricas es equivalente al producto de las matrices asociadas a cada transformación lineal. Esto es:

$$Si: T_1(X)=A.X\,,\,T_2(X)=B.X \Rightarrow (T_1 \circ T_2)(X)=T_1(T_2(x))=A.B.X \qquad (5)$$

Ejemplo 9: Sea el triángulo X definido por sus vértices: $X=\{A(0;0),\ B(2;0),\ C(2;1)\}$. Realizar una rotación de X 30° en sentido antihorario. Luego, al resultado obtenido, realizarle un escalado que escale sus dimensiones al doble en x y al triple en y.

En este caso, T_1 es la rotación (lo primero que se hace), y la siguiente transformación T_2 es el escalado. Entonces aplicando la ecuación 5:

$$Si: T_1(X)=R.X\,,\,T_2(X)=E.X \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(X)=E.R.X=X'$$

$$E.R.X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}-1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2}\sqrt{3}+3 \end{pmatrix}=X'$$

Finalmente: $X'=\{A(0;0),D(2\sqrt{3};3),E(2\sqrt{3}-1;\frac{3}{2}\sqrt{3}+3)\}$

La ilustración 7 grafica al ejemplo 9.

Observación: En este ejemplo se calculó (E.R).X, donde E.R es la matriz asociada a la transformación lineal. Pero como el producto de matrices cumple la propiedad asociativa, podría haberse calculado E.(R.X) y el resultado hubiera sido el mismo X'.

Puede notarse que dado un vector posición, se lo puede transformar en cualquier otro vector posición del espacio mediante composiciones de las transformaciones anteriores: Mientras que la dirección y el sentido se puede lograr componiendo rotaciones (multiplicando matrices de rotación alrededor de los ejes), el tamaño adecuado se puede lograr componiendo a las rotaciones con un escalado uniforme.

Propiedad: El producto de las matrices de transformación no es conmutativo.

Por ello, debe respetarse el orden al realizarse la composición.

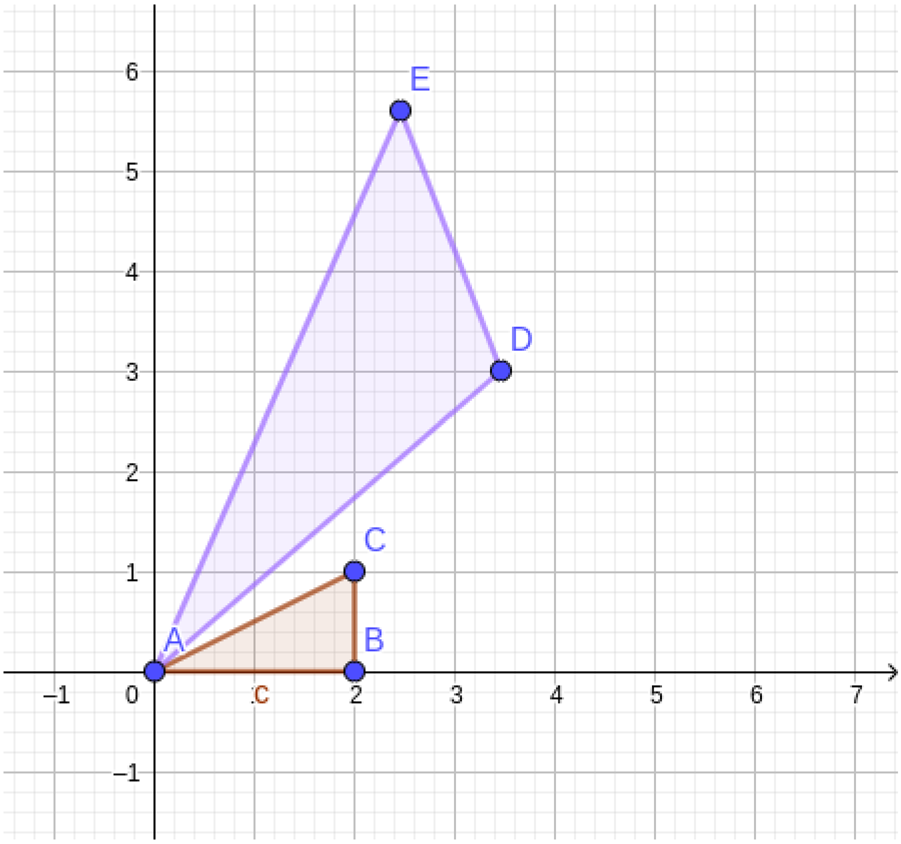

Ilustración 7: Composición de Transformaciones en un triángulo.

3.6. Traslación

Una traslación de un vector X es un desplazamiento fijo K a una dirección, sentido y longitud. Es la transformación:

$$X' = T(X) = X + K \tag{6a}$$

Realizar el camino inverso de una traslación es posible. Para ello, basta con sumar el opuesto al vector de desplazamiento K. Esto es:

$$X = X' + (-K) = X' - K \tag{6b}$$

Para esta transformación, se habla de opuesto en lugar de inverso: la operación para regresar al punto anterior es la suma en lugar del producto, y su elemento neutro es la matriz nula en lugar de la matriz identidad.

3.6.1. Traslaciones en el plano

Una Traslación en el plano de un vector X en la dirección, sentido y longitud fija K es la transformación dada por:

$$T(X)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+k_1\\y+k_2\end{pmatrix}=X' \qquad (6c)$$

con:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

el vector posición del punto a transformar,

$$K=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

el vector de desplazamiento fijo con componente k_1 en x y k_2 en y.

Ejemplo 10: Sea el triángulo X definido por sus vértices: $X=\{A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;1)\}$. Obtener X': la traslación de X, según el vector de desplazamiento $K = (1,2)$.

Aplicando la expresión 6c:

$$X'=T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Finalmente: $X'=\{D(1;2), E(3;2), F(3;3)\}$.

La ilustración 8 grafica a la transformación del ejemplo 10.

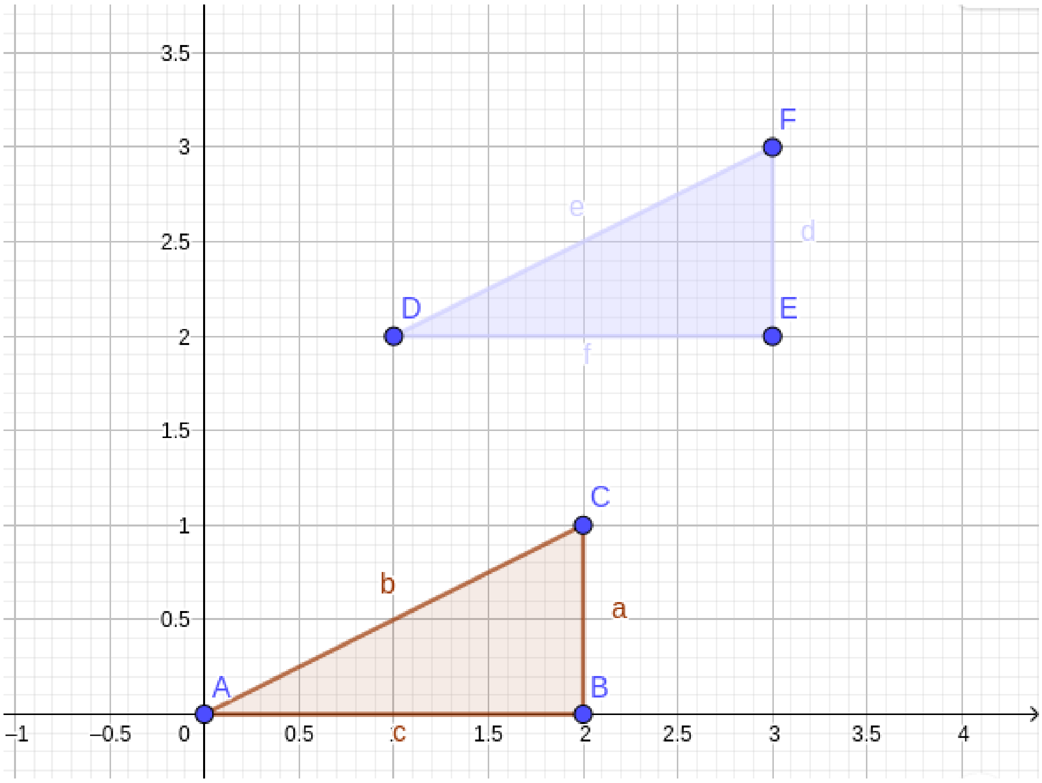

Ilustración 8: Traslación de un triángulo en el plano

3.6.2. Opuesto de la traslación en el plano

Si $K = (k_1\ ;\ k_2)$ es el vector de desplazamiento fijo en el plano, su opuesto es: $K' = (-k_1 ; -k_2)$. Es fácil ver que $\overline{K}'$ es su opuesto:

$$X = X' + K' = \begin{pmatrix} x+k_1 \\ y+k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.6.3. Traslaciones en el espacio

Una traslación en el espacio de un vector $\overline{X}$ en la dirección, sentido y longitud fija K es la transformación dada por:

$$X' = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+k_1 \\ y+k_2 \\ z+k_3 \end{pmatrix} \qquad (6d)$$

con:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

el vector posición del punto a transformar,

$$K=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$$

el vector de desplazamiento fijo con componente k_1 en x, k_2 en y y k_3 en z.

Ejemplo 11: Sea el prisma X definido por sus vértices: $X=\{A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D(0;2;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;2;1), H(0;2;1)\}$. Obtener X': la traslación de X, según el vector $K = (1{,}2{,}1)$.

Aplicando la expresión 6d:

$$X'=T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1&1&0\\0&0&2&2&0&0&2&2\\0&0&0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2&2&2&2\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2&1&1&2&2&1\\2&2&4&4&2&2&4&4\\1&1&1&1&2&2&2&2\end{pmatrix}$$

Finalmente $X'=\{N(1;2;1), L(2;2;1), M(2;4;1), O(1;4;1), P(1;2;2), I(2;2;2), J(2;4;2), K(1;4;2)\}$

La ilustración 9 grafica a la transformación del ejemplo 11.

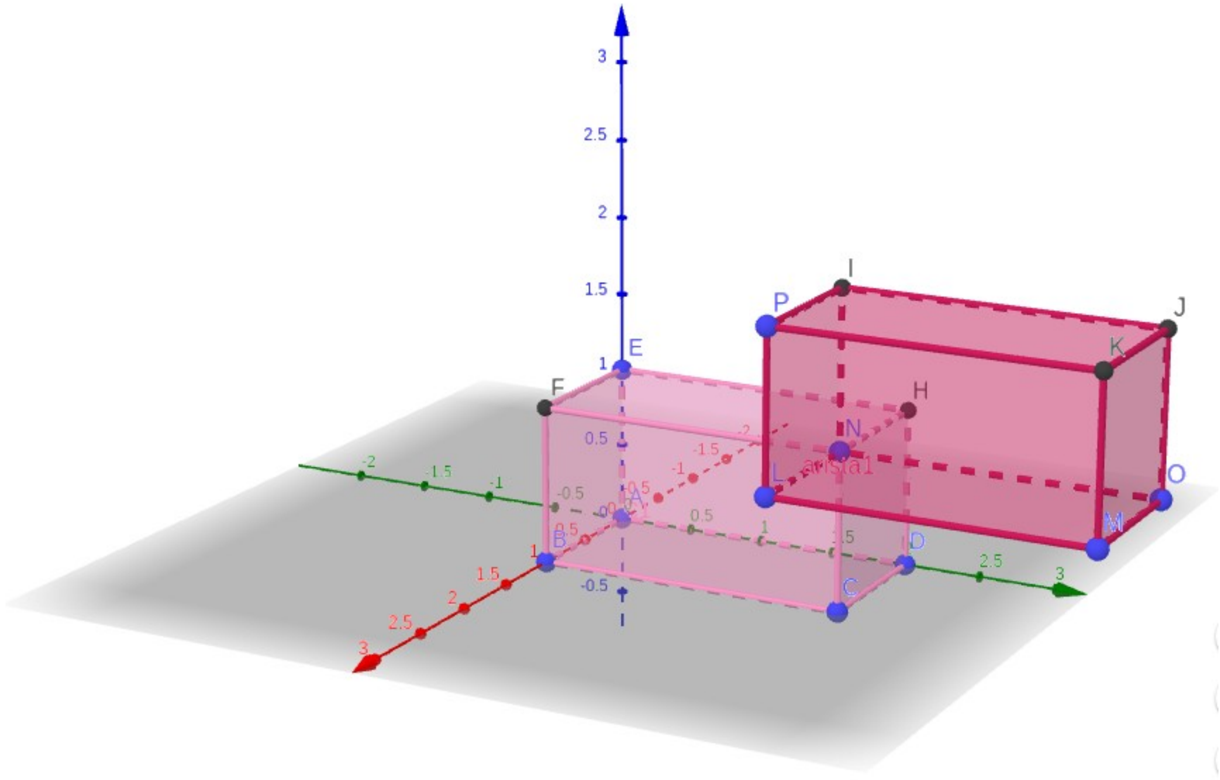

Ilustración 9: Traslación de un prisma en el espacio.

3.6.4. Opuesto de la Traslación en el Espacio

Si $K = (k_1 ; k_2 ; k_3)$ es el vector de desplazamiento fijo en el plano, su opuesto es: $K' = (-k_1 ; -k_2 ; -k_3)$. Es fácil ver que K' es su opuesto:

$$X = X' + K' = \begin{pmatrix} x+k_1 \\ y+k_2 \\ z+k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ -k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Observación Importante:

$$Si\, h \neq 0 \ \vee k \neq 0 \Rightarrow T\; no\; es \;\; TL\; ya\; que \;\; T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6e)$$

Es decir, las traslaciones no son TL, entonces, no puede presentarse una matriz asociada que pre-multiplicada por la matriz de los vectores posición de los puntos logre la traslación. Ello se soluciona mediante el uso de transformaciones en coordenadas homogéneas, según se muestra a continuación.

3.7. Transformaciones en coordenadas homogéneas

Una matriz de transformación puede resultar de la composición entre dos o más transformaciones lineales geométricas básicas.

Las traslaciones no son transformaciones lineales geométricas por no ser TL. Sin embargo, es posible representar la composición de las transformaciones lineales geométricas básicas con traslaciones en el espacio bidimensional por medio de una única TL tridimensional del plano $z = 1$. De manera similar, es posible representar las mencionadas transformaciones en el espacio tridimensional por medio de una única TL cuatridimensional en el hiper-plano $w = 1$. A estas transformaciones se las llama *transformaciones geométricas en coordenadas homogéneas*.

Las matrices de las transformaciones en coordenadas homogéneas se obtienen extendiendo una coordenada a la matriz de transformación original, agregando en la última columna al vector de traslación y completando la matriz y los vectores con 0 y 1 según corresponde.

3.7.1. Transformaciones en Coordenadas Homogéneas en el Plano

Se representa la composición de las transformaciones geométricas básicas junto con las traslaciones en el plano mediante una única TL tridimensional en el plano $z = 1$, según se muestra a continuación:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & h \\ t_{21} & t_{22} & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7a)$$

$$donde \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} es\ \ TL\ \ compuesta\ y\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\ coordenadas\ \ de\ \ una\ \ traslación\ \ de\ \ h, k. \tag{7b}$$

Ejemplo 12: Sea el triángulo X definido por sus vértices: $X=\{A(0;0),\ B(2;0),\ C(2;1)\}$. Realizar una rotación de 30° en sentido antihorario. Luego, sobre el resultado realizar un escalado que estire sus dimensiones al doble en x y al triple en y. Finalmente, al resultado obtenido trasladarlo 2 unidad en x y 1 en y.

Observar que la transformación presentada en este ejemplo es similar a la transformación presentada en el ejemplo 9, pero difiere en una traslación. Por ello, puede esperarse que:

- El resultado de la transformación podría calcularse sumando el vector de traslación a cada uno de los vectores resultado del ejemplo 9.
- La matriz asociada a la TL que se necesita para el armado de la matriz en coordenadas homogéneas es la misma que la matriz asociada a la TL del ejemplo 9 y se obtiene calculando $E.R$.

Aplicando la expresión 7a:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & h \\ t_{21} & t_{22} & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7c}$$

con:

$$E.R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

entonces T es:

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de transformación en coordenadas homogéneas. Luego aplicando T a X:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3}+2 & 2\sqrt{3}+1 \\ 1 & 4 & \frac{3}{2}\sqrt{3}+4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = X'$$

Luego:

$$X' = \{D(2;1), E(2\sqrt{3}+2;4), F(2\sqrt{3}+1;\frac{3}{2}\sqrt{3}+4)\}$$

La Ilustración 10 grafica el ejemplo 12:

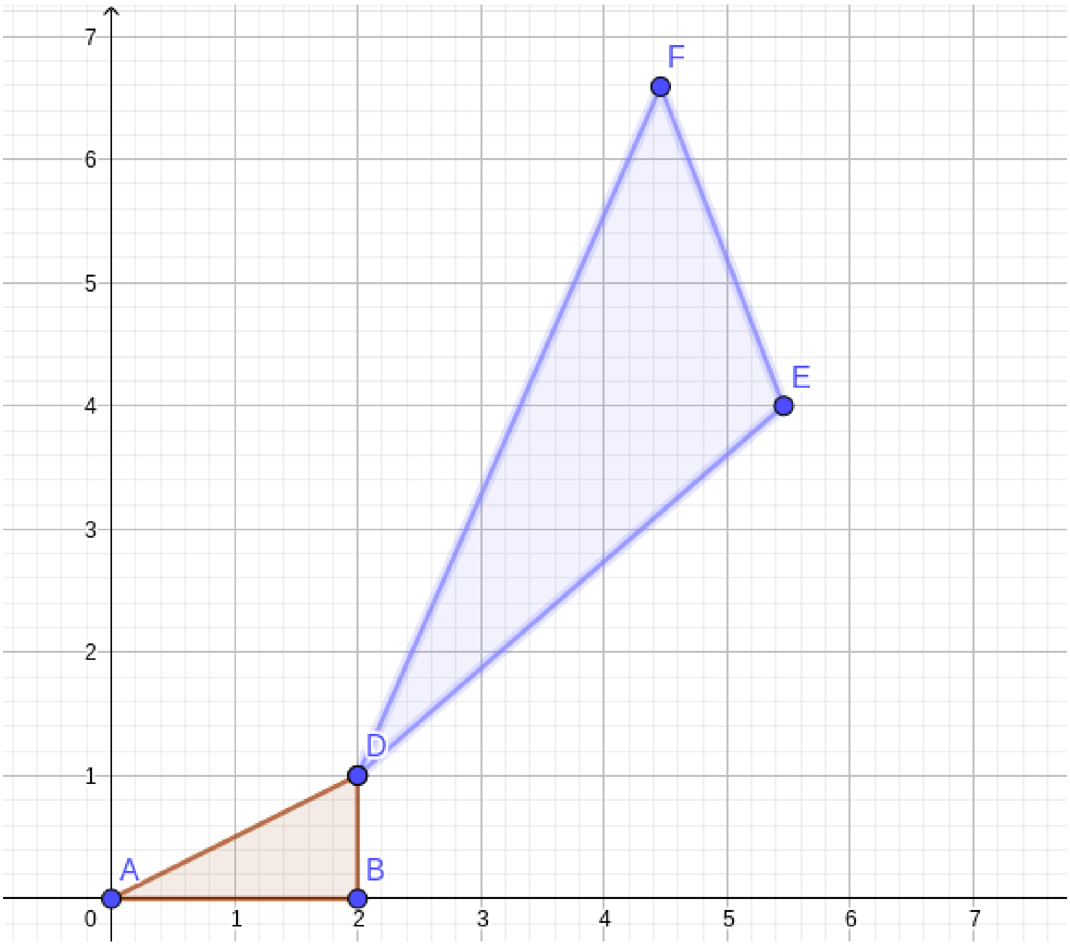

Ilustración 10: Transformación de un triangulo usando coordenadas homogéneas.

3.7.2. Transformaciones en coordenadas homogéneas en el espacio

Se representa la composición de las transformaciones geométricas básicas junto con las traslaciones en el espacio mediante una única TL tridimensional en el hiper-plano $w=1$, según se muestra a continuación:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & h \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & k \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7d}$$

$$donde: \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} es\, TL\ compuesta\ y \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} coordenadas\ de\ una\ traslación\ de\ h, k, l$$

(7e)

A estas transformaciones se las denomina también Transformaciones 4D o Transformaciones Cuatri-dimensionales (Lengyel, 2011).

Ejemplo 13: Sea el prisma X definido por sus vértices: X={A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D(0;2;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;2;1), H(0;2;1)}. Realizar una rotación de 90° en alrededor del eje x en sentido antihorario. Luego, sobre el resultado realizar un escalado que estire sus dimensiones al doble en x, al triple en y y se mantenga igual en z. Finalmente, al resultado obtenido, trasladarlo 2 unidad en x, 1 en y y 2 en z.

Aplicando 7d:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

con:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de transformación en coordenadas homogéneas. Luego aplicando T a X:

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 8 & 2 & 2 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: X'={Q(2;1;2), R(4;1;2), J(4;1;8), K(2;1;8), O(2;0;2), P(4;0;2), I(4;0;8), S(2;0;8)}

La Ilustración 11 grafica el ejemplo 13.

3.8. Rotaciones con cuaterniones

3.8.1. Introducción

Los cuaterniones son números hipercomplejos de cuatro componentes. A pesar de poseer propiedades algebraicas y operacionales muy buenas, poco después de su invención fueron opacados por el desarrollo del cálculo vectorial. En estos últimos años crece notablemente la cantidad de implementaciones de cuaterniones en diversas disciplinas atraídas por notables ventajas relacionadas con la simplicidad, eficiencia y características algebraicas. Su uso principalmente se da en el cálculo de rotaciones en el espacio con aplicaciones en navegación aeroespacial, articulaciones de brazos robóticos, visión robótica y gráfica 3D. Su ventaja radica en que su simpleza redunda en reducciones en tiempos de cálculo de rotaciones de hasta 75% en comparación con el cálculo matricial (Kamlofsky y Bergamini, 2015).

3.8.2. Álgebra básica de cuaterniones

Un cuaternión es un número hipercomplejo: $q=w+xi+yj+zk$, donde i,j,k son unidades imaginarias y $\overline{v} = (x,y,z)$ su vector asociado. Vectorialmente: $q = (w,\overline{v})$. Su notación cartesiana es: $q = (w,x,y,z)$.

La suma y resta de cuaterniones se realiza componente a componente.

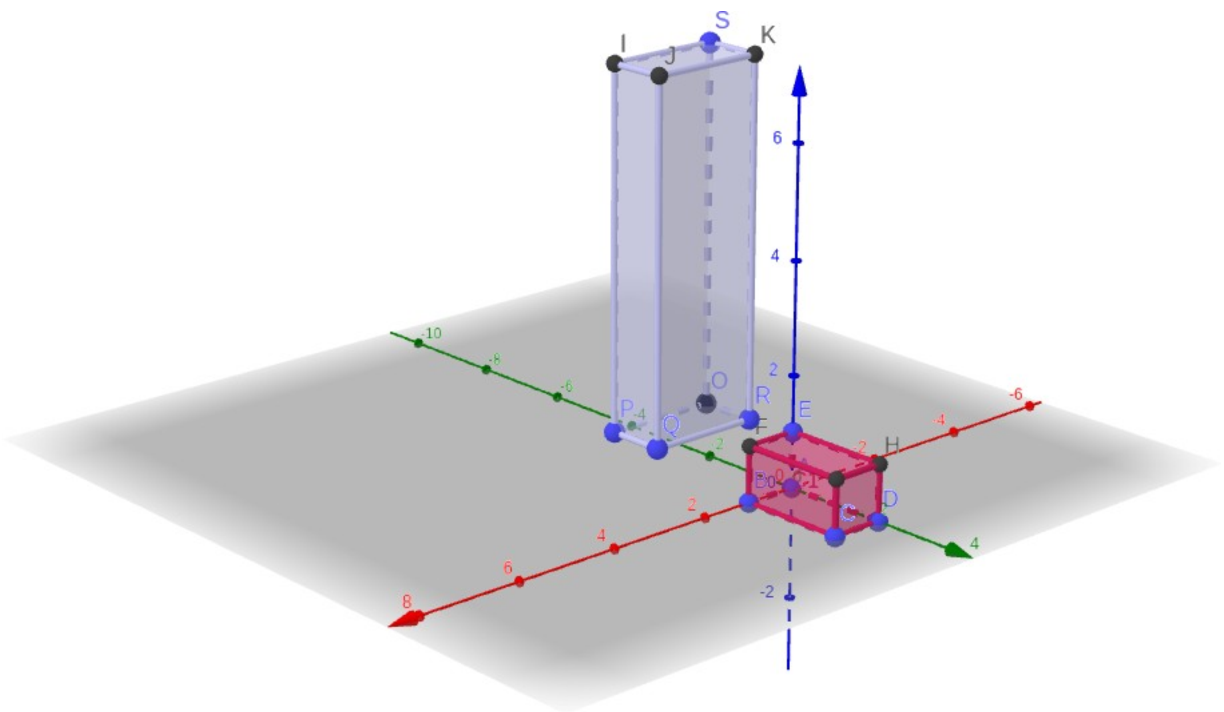

Ilustración 11: Transformación en coordenadas homogéneas de un prisma en el espacio

El producto de dos cuaterniones $q_1=(w_1,x_1,y_1,z_1)$ y $q_2=(w_2,x_2,y_2,z_2)$ es:

$$q_3=q_1.q_2=(w_3,x_3,y_3,z_3) \tag{8a}$$

donde:

$$w_3 = w_1.w_2 - x_1.x_2 - y_1.y_2 - z_1.z_2 \tag{8b}$$

$$x_3 = w_1.x_2 + x_1.w_2 + y_1.z_2 - z_1.y_2 \tag{8c}$$

$$y_3 = w_1.y_2 - x_1.z_2 + y_1.w_2 + z_1.x_2 \tag{8d}$$

$$z_3 = - w_1.z_2 + x_1.y_2 - y_1.x_2 + z_1.w_2 \tag{8e}$$

Como puede comprobarse fácilmente, este producto no es conmutativo.

Sea el cuaternión $q=(w,x,y,z)$

Su conjugado es:

$$q^*=(w,-x,-y,-z) \tag{9}$$

Su norma es:

$$|q|=\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2} \tag{10}$$

Puede denotarse la forma trigonométrica del cuaternión:

$$q=|q|.\left(\cos\frac{\alpha}{2},\breve{v}.sen\frac{\alpha}{2}\right) \tag{11a}$$

con:

$$\breve{v}=\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|},\ \bar{v}=(x;y;z) \tag{11b}$$

y

$$\alpha=2\arccos\left(\frac{w}{|q|}\right) \tag{11c}$$

Con α : su ángulo de rotación asociado, y $\bar{v}$: vector director del eje de rotación.

Pero si:

$$\breve{q}=\frac{q}{|q|}\Rightarrow\breve{q}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\breve{v}.sen\frac{\alpha}{2}\right) \tag{12}$$

que es una expresión más sencilla para operar.

3.8.3. Cálculo de rotaciones

Un cuaternión en notación trigonométrica trae asociados un ángulo y un vector. Entonces, realizar una rotación de un punto $P(a,b,c)$ un ángulo α en sentido anti-horario alrededor del vector $\bar{v}=(x;y;z)$:

$$P' = q\ .\ P\ .\ q^* \tag{13}$$

Para la implementación de la ecuación (16), el punto se expresa como cuaternión con parte real nula. Así también, su resultado es un punto en el espacio con notación de cuaternión, con componente real nula.

Ejemplo 14: Calcular la rotación del punto $P(6;2;5)$ alrededor del vector $\bar{v}=(1;2;1)$ un ángulo de 30° en sentido antihorario.

Nota: A los fines de presentar sencillez de cálculo, los resultados parciales y números irracionales se presentan redondeados a tres decimales.

Así:

cos(15°) = 0,966; sen(15°) = 0,259

$\breve{v} = (0{,}408\,; 0{,}816\,; 0{,}408)$

Usando la expresión obtenida en (13) se obtienen los cuaterniones unitarios:

q = (0,966 ; 0,106 ; 0,211 ; 0,106)

q^*= (0,966 ; -0,106 ; -0,211 ; -0,106)

La expresión (16) es entonces:

$P'=q.P.q^*$= (0,966 ; 0,106 ; 0,211 ; 0,106).(0 ; 6 ; 2 ; 5).(0,966 ; -0,106 ; -0,211 ; -0,106)

$P' = (0{,}000\,; 7{,}164\,; 2{,}606\,; 2{,}624)$

La ilustración 12 muestra una imagen en 3D del punto P, al vector $\bar{v}$ y al punto P': resultado de rotar al punto P un ángulo α alrededor de $\bar{v}$.

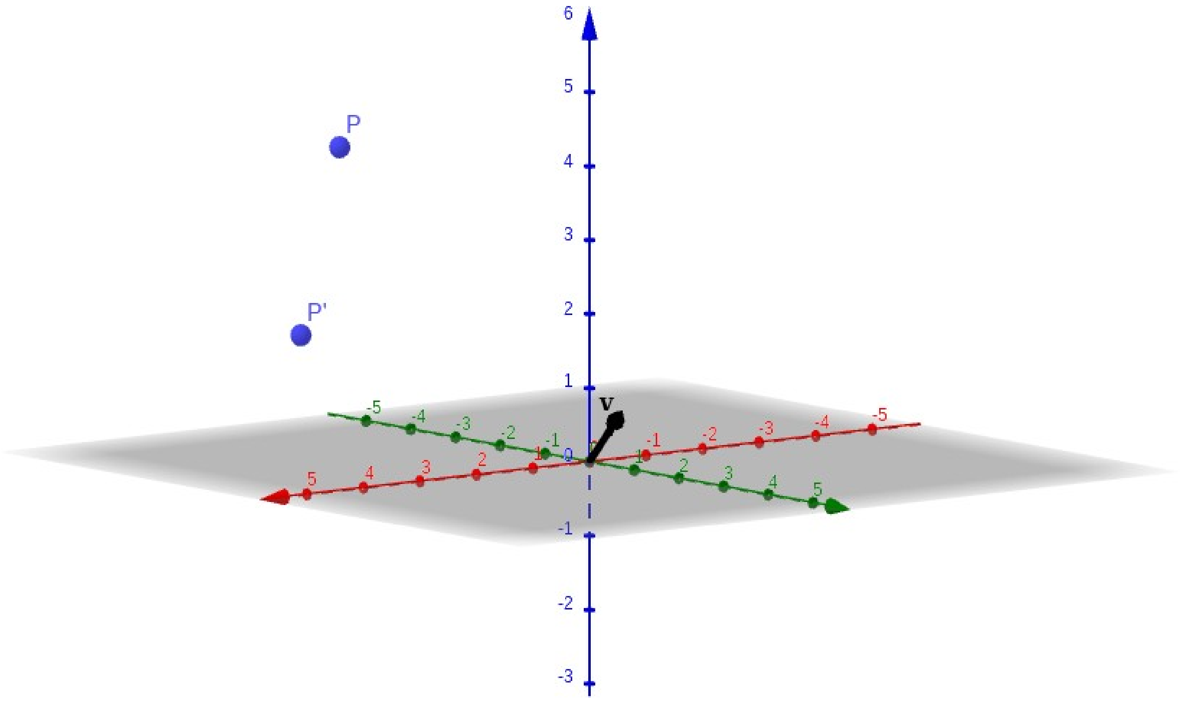

Ilustración 12: Vista 3D de la rotación del punto P alrededor de un vector, un ángulo.

Nota: Las ilustraciones 1 a 12 fueron realizadas utilizando el software Geogebra[1]

1 Sitio Oficial de Geogebra: https://www.geogebra.org/

Referencias

Kamlofsky Jorge y Bergamini María Lorena. “Los Cuaterniones en Visión Robótica”. Matemática Aplicada Computacional e Industrial Vol. 5 (2015): 517-520.

Lengyel, Eric. “Matemáticas para Videojuegos en 3D”. Second Edition, Cengage Learning, (2011).