El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

Sea el siguiente conjunto $B \in \mathbb{R}^3, B = \{\vec{u}_1 = (1;-1;0); \vec{u}_2 = (1;2;-1); \vec{u}_3 = (0;1,-1)\}$

a) ¿Es B base de R^3?

b) Hallar una base ortonormal B' de $\mathbb{R}^3$ a partir de B.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow B \ es \ LI$$

Como $\# B = 3 \wedge B \ es \ LI \Rightarrow B \ es \ una \ base \ de \ \mathbb{R}^3$

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

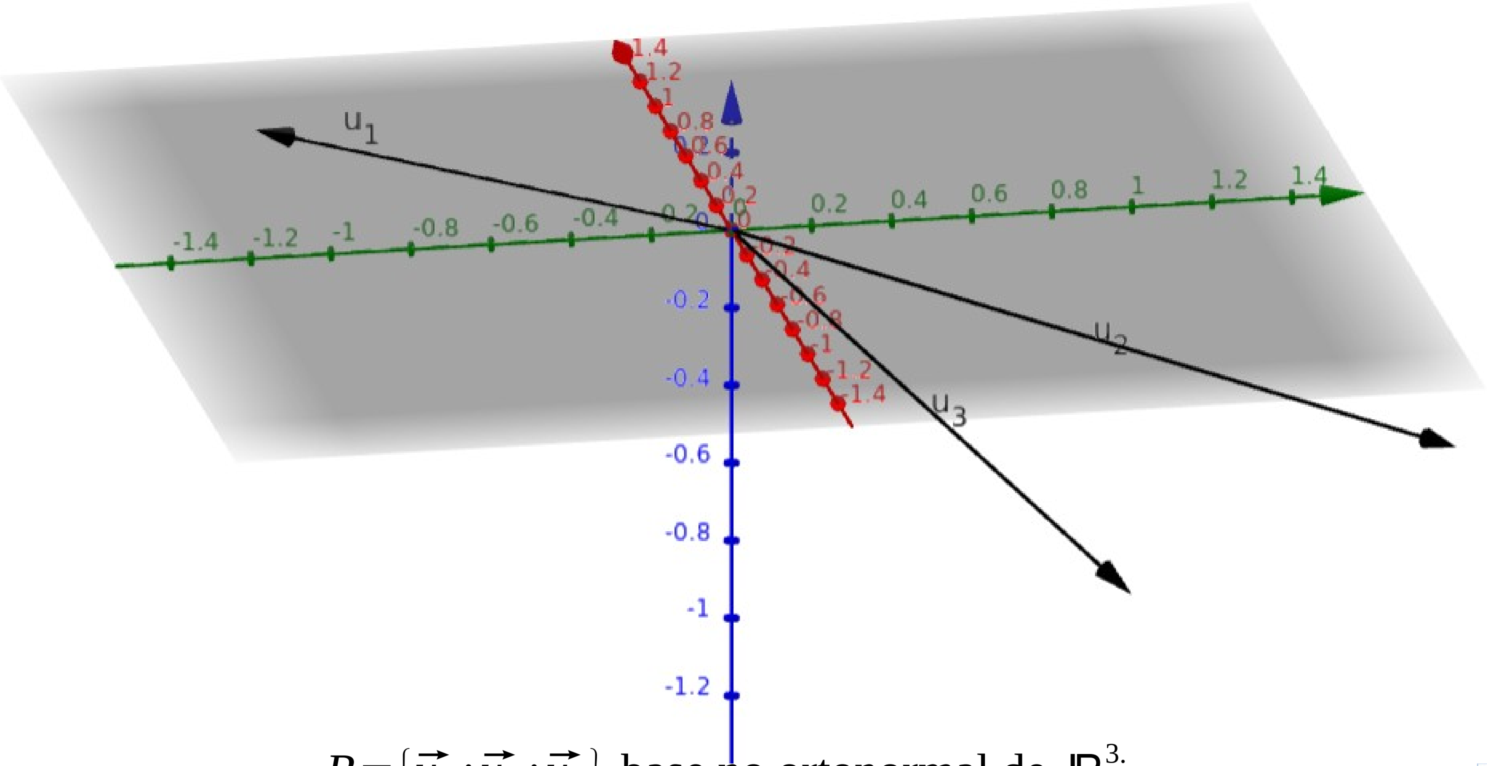
El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

$$B=\{\vec{u}_1=(1;-1;0);\vec{u}_2=(1;2;-1);\vec{u}_3=(0;1,-1)\}$$

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt



$B=\{\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3\}$ base no ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

$$B=\{\vec{u}_1=(1;-1;0);\vec{u}_2=(1;2;-1);\vec{u}_3=(0;1,-1)\}$$

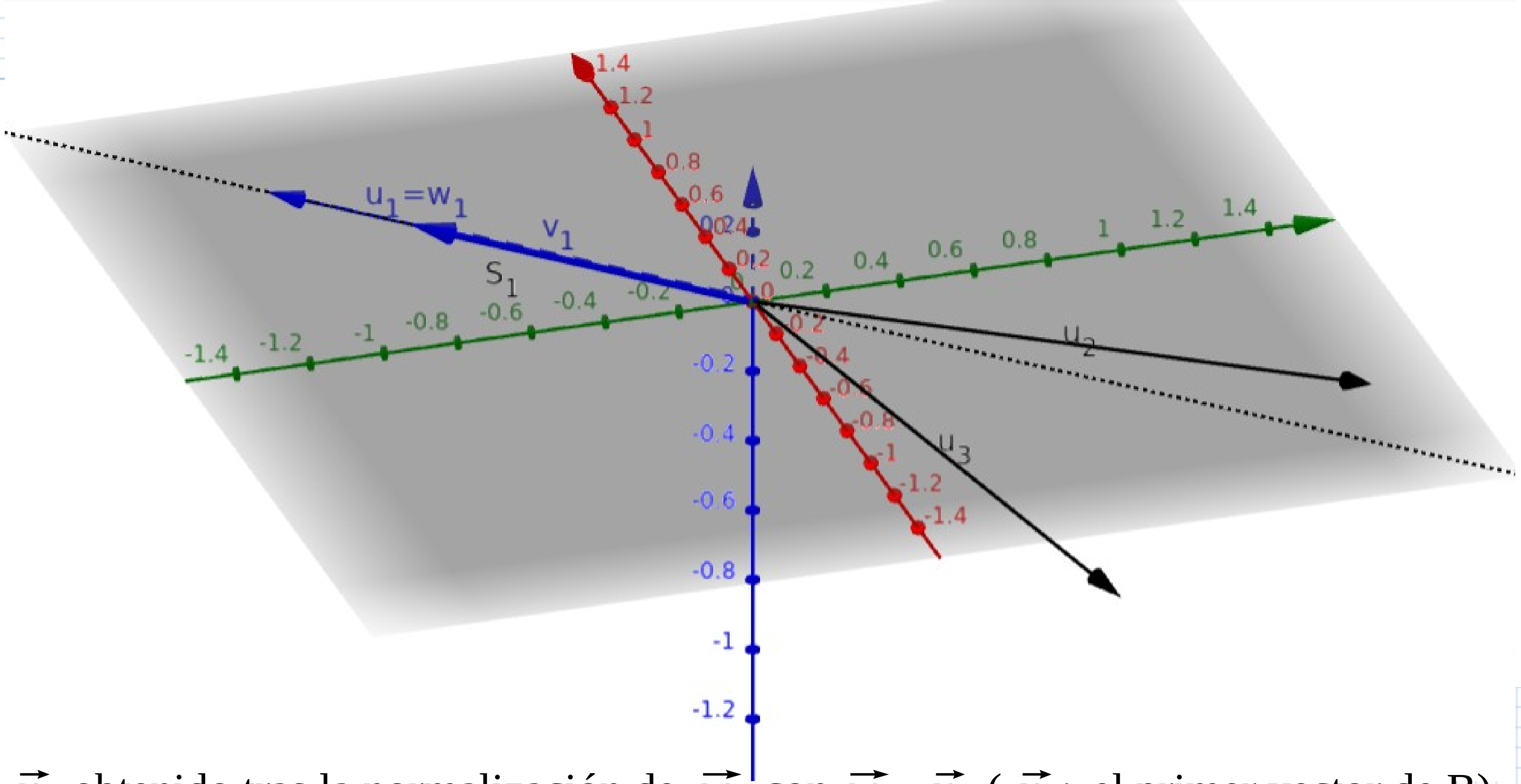
b) Hallamos el primer vector de la base B': $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0)\Rightarrow \boxed{\vec{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right)}$$

verifico que $\|\vec{v}_1\|=1:\|\vec{v}_1\|=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}^2+\frac{(-1)}{\sqrt{2}}^2+0^2}=1$

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt



$\vec{v}_1$ obtenido tras la normalización de $\vec{w}_1$ con $\vec{w}_1=\vec{u}_1$ ($\vec{u}_1$: el primer vector de B)

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

El segundo vector de la base:

$$\vec{w}_2=\vec{u}_2-Proy_{S1}\vec{u}_2=\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1$$

$$\vec{w}_2=(1;2;-1)-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right)=(1;2;-1)-\underbrace{\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};0\right)}_{Proy_{S1}\vec{u}_2}\Rightarrow\vec{w}_2=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)$$

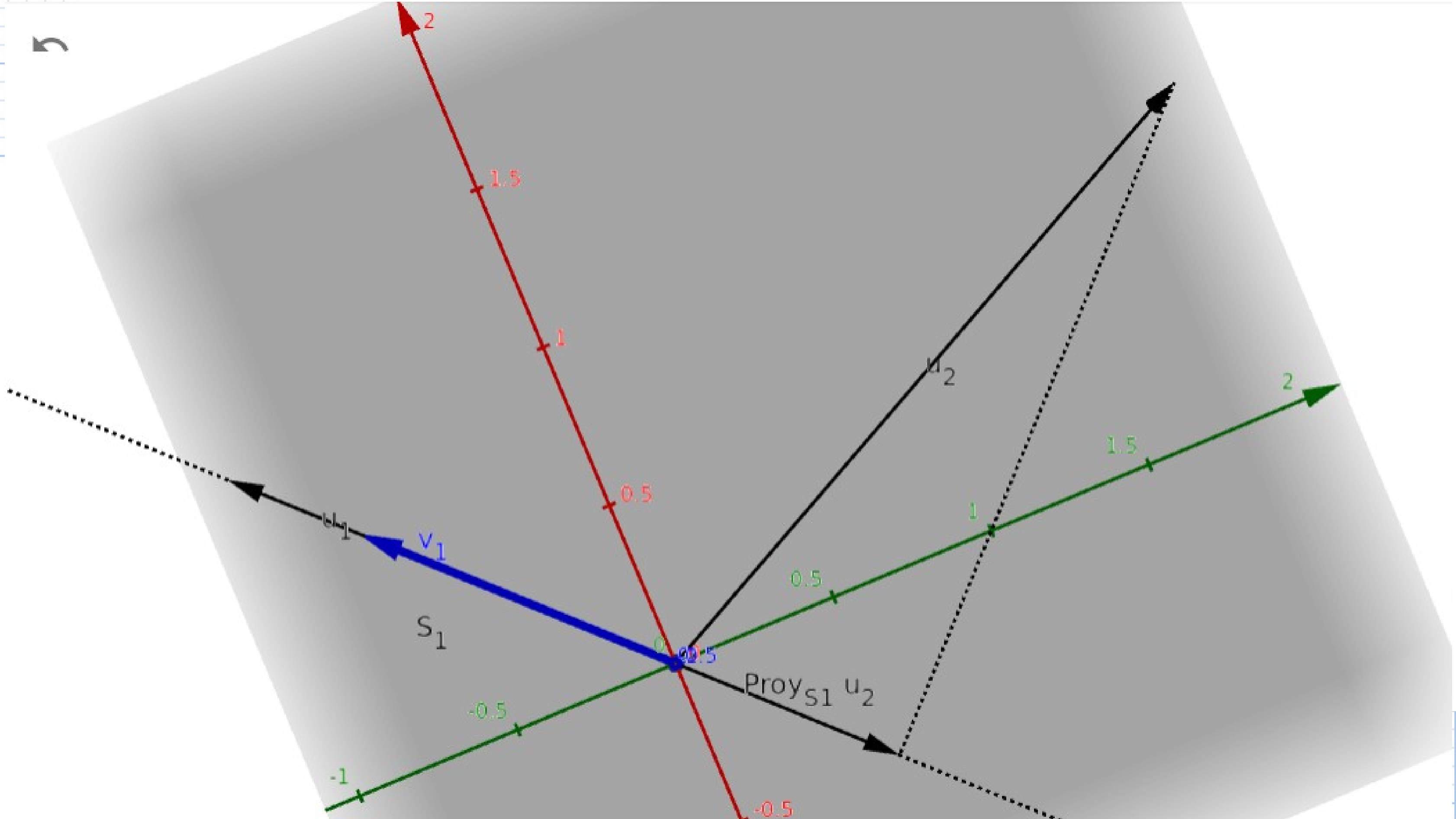
$$\langle\vec{v}_1;\vec{w}_2\rangle=\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}+0=0\Rightarrow\vec{v}_1\perp\vec{w}_2$$

$$\|\vec{w}_2\|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{22}{4}}$$

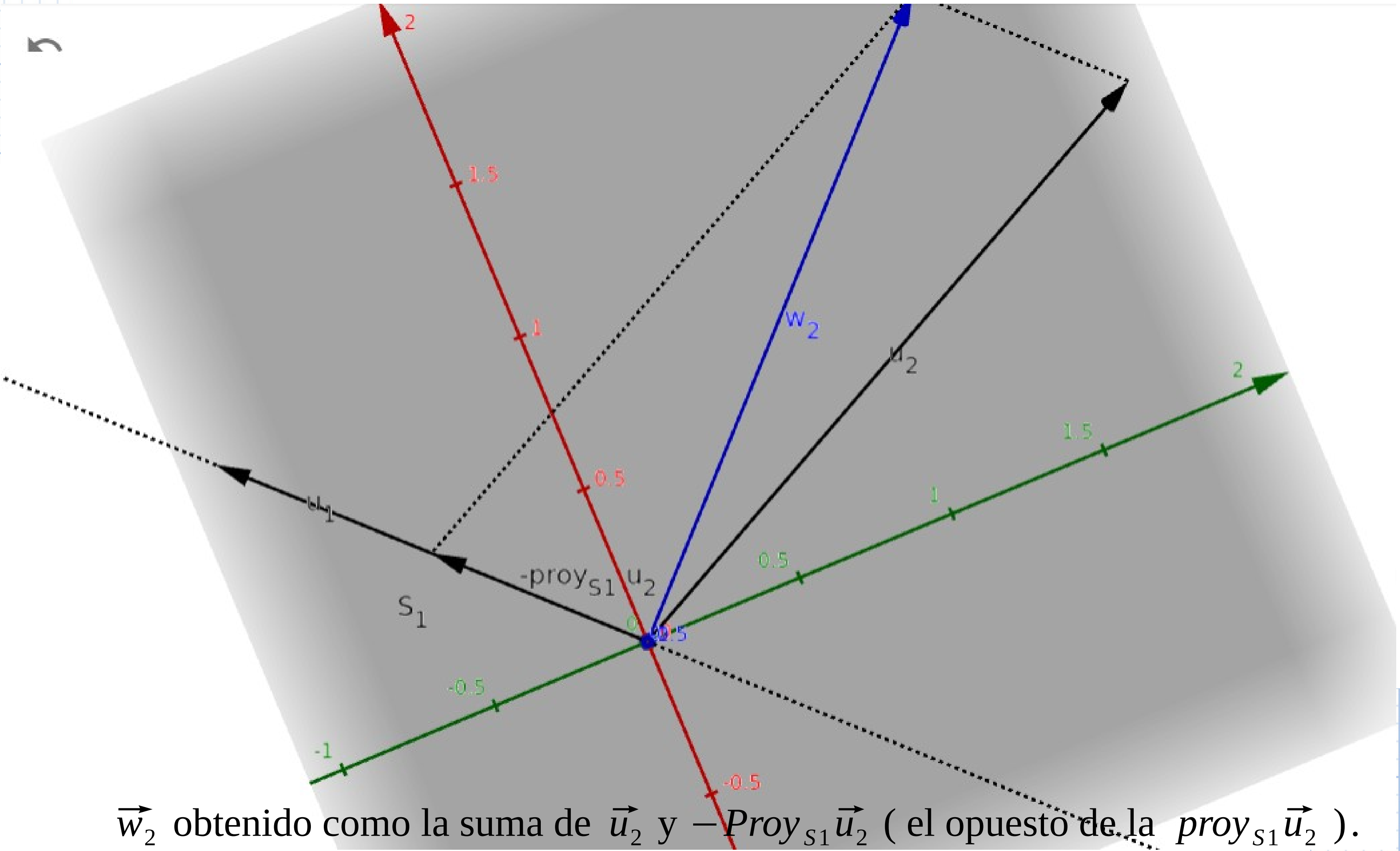
$$\vec{v}_2=\frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}=\frac{2}{\sqrt{22}}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_2=\left(\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}}\right)}$$

Con $\|\vec{v}_2\|=\sqrt{\frac{3}{\sqrt{22}}^2+\frac{3}{\sqrt{22}}^2+\frac{-2}{\sqrt{22}}^2}=1$

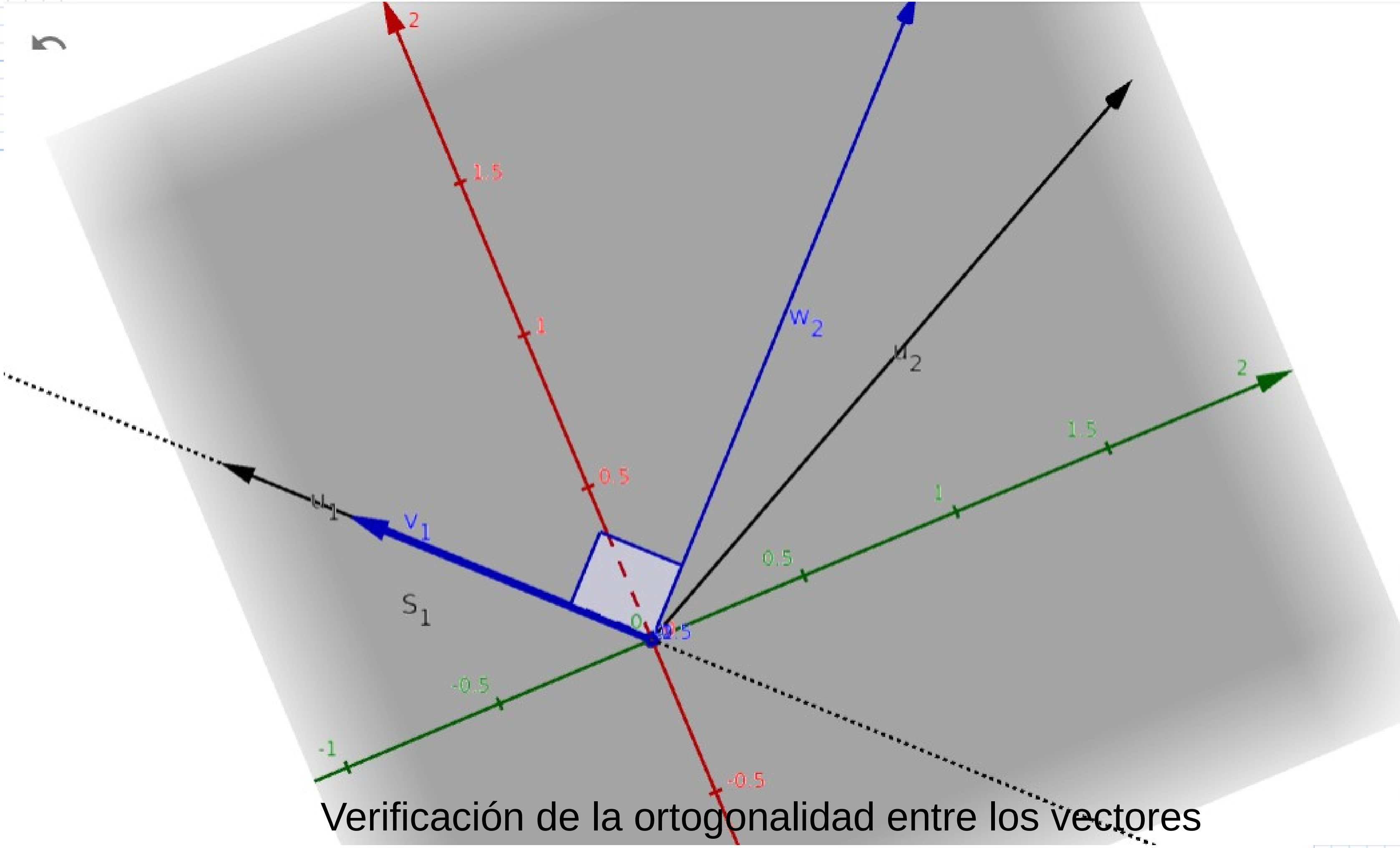
Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar



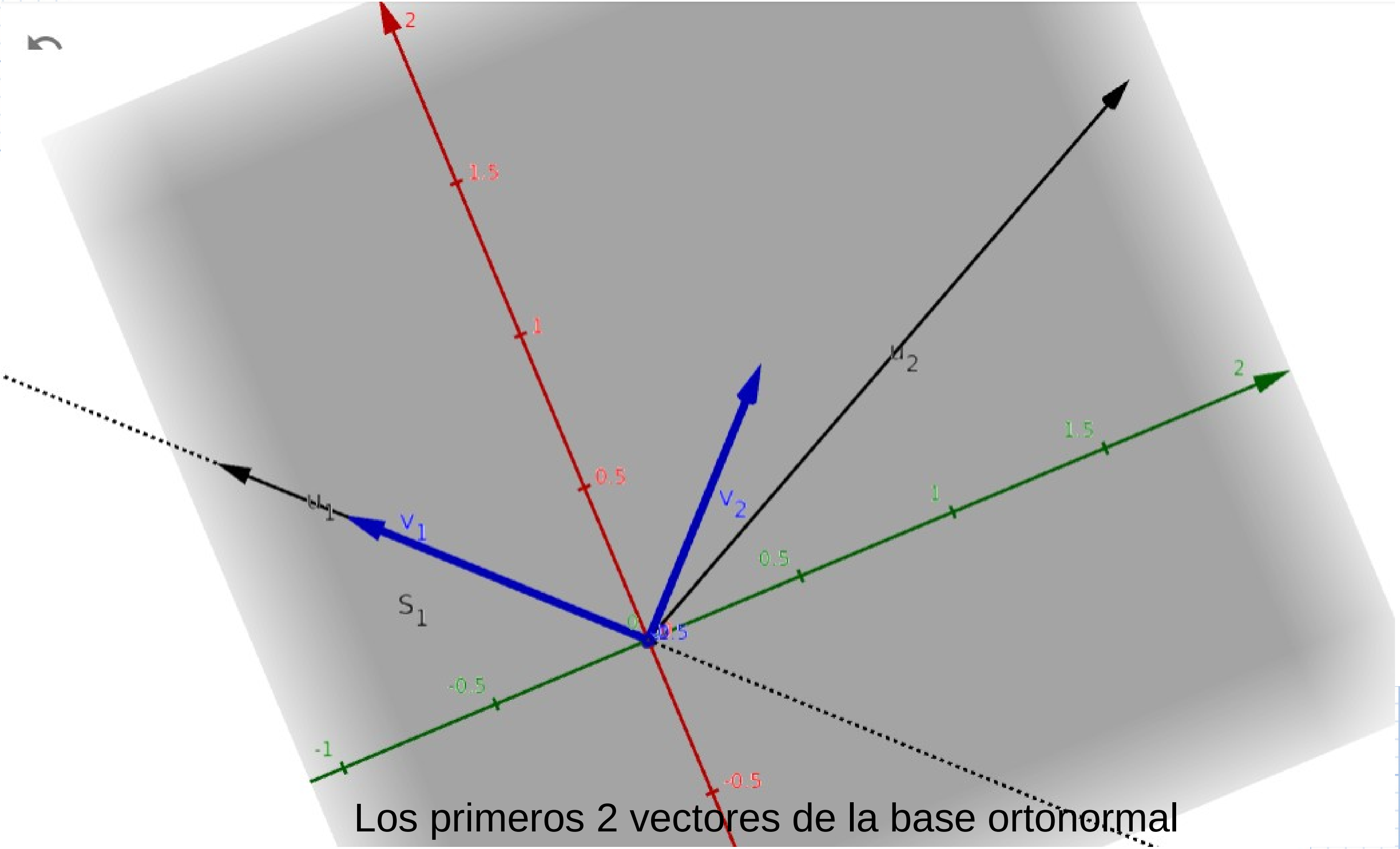
$proy_{S1}\vec{u}_2$: la proyección de $\vec{u}_2$ sobre la recta S_1 ($S_1 = gen(\vec{v}_1)$).



$\vec{w}_2$ obtenido como la suma de $\vec{u}_2$ y $-Proy_{S1}\vec{u}_2$ (el opuesto de la $proy_{S1}\vec{u}_2$).



Verificación de la ortogonalidad entre los vectores



Los primeros 2 vectores de la base ortonormal

El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

El tercer vector de la base:

$$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 - Proy_{S2}\vec{u}_3 = \vec{u}_3 - \langle \vec{u}_3 ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_3 ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2$$

$$\vec{w}_3 = (0;1;-1) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) . \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{-1}{\sqrt{2}} ; 0\right) - \frac{5}{\sqrt{22}} \left(\frac{3}{\sqrt{22}} ; \frac{3}{\sqrt{22}} ; \frac{-2}{\sqrt{22}}\right)$$

$$\vec{w}_3 = (0;1;-1) + \left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 0\right) + \left(\frac{-15}{22} ; \frac{-15}{22} ; \frac{10}{22}\right) = (0,1,-1) - \underbrace{\left(\frac{2}{11} , \frac{13}{11} , \frac{-5}{11}\right)}_{Proy_{S2}\vec{u}_3}$$

$$\vec{w}_3 = \left(\frac{-2}{11} ; \frac{-2}{11} ; \frac{-6}{11}\right)$$

$$\langle \vec{w}_3 ; \vec{v}_1 \rangle = \frac{-2}{11\sqrt{22}} + \frac{2}{11\sqrt{22}} + 0 = 0 \Rightarrow \vec{w}_3 \perp \vec{v}_1$$

$$\langle \vec{w}_3 ; \vec{v}_2 \rangle = \frac{-6}{11\sqrt{22}} - \frac{6}{11\sqrt{22}} + \frac{12}{11\sqrt{22}} = 0 \Rightarrow \vec{w}_3 \perp \vec{v}_2$$

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

Y además: $\|\vec{w}_3\| = \sqrt{\frac{4}{121} + \frac{4}{121} + \frac{36}{121}} = \sqrt{\frac{44}{121}} = \sqrt{\frac{4}{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}$

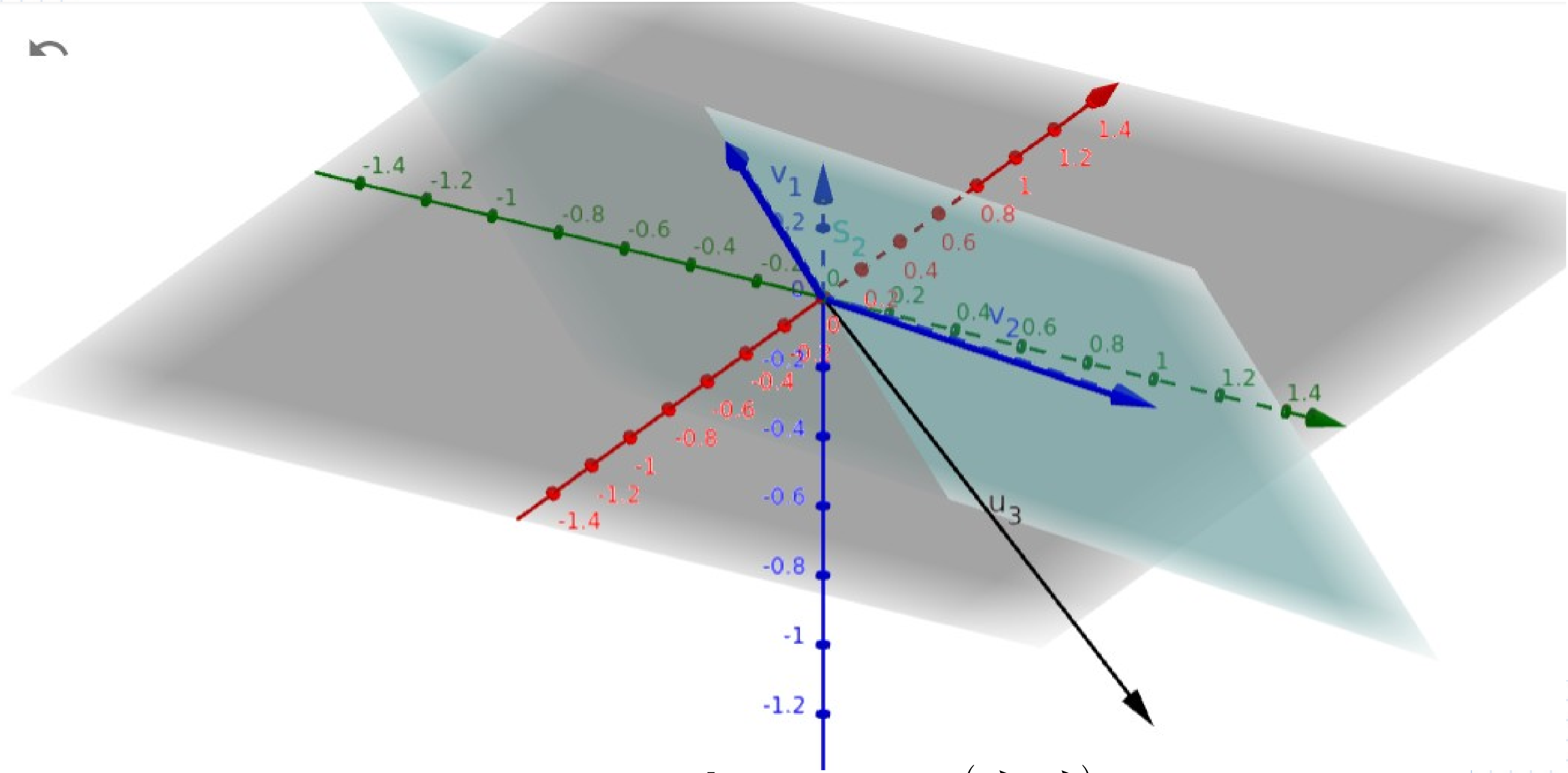
$$\frac{1}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{11}{2\sqrt{11}}$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{11}{2\sqrt{11}}\left(\frac{-2}{11}; \frac{-2}{11}; \frac{-6}{11}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}; \frac{-1}{\sqrt{11}}; \frac{-3}{\sqrt{11}}\right)}$$

con: $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{9}{11}} = 1$

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

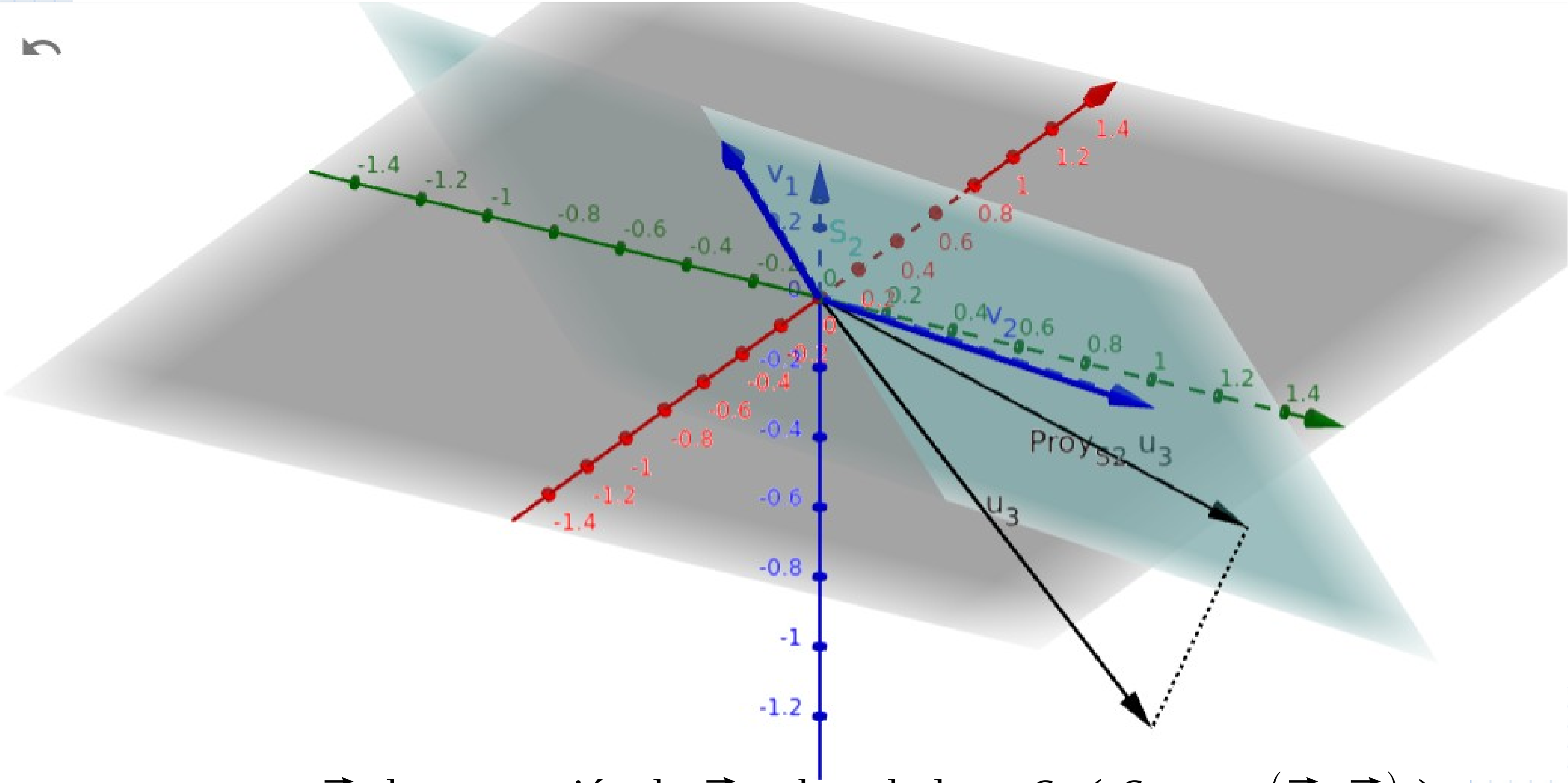
El Proceso de Gram - Schmidt



S_2: Un Plano. $S_2 = gen(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2)$

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

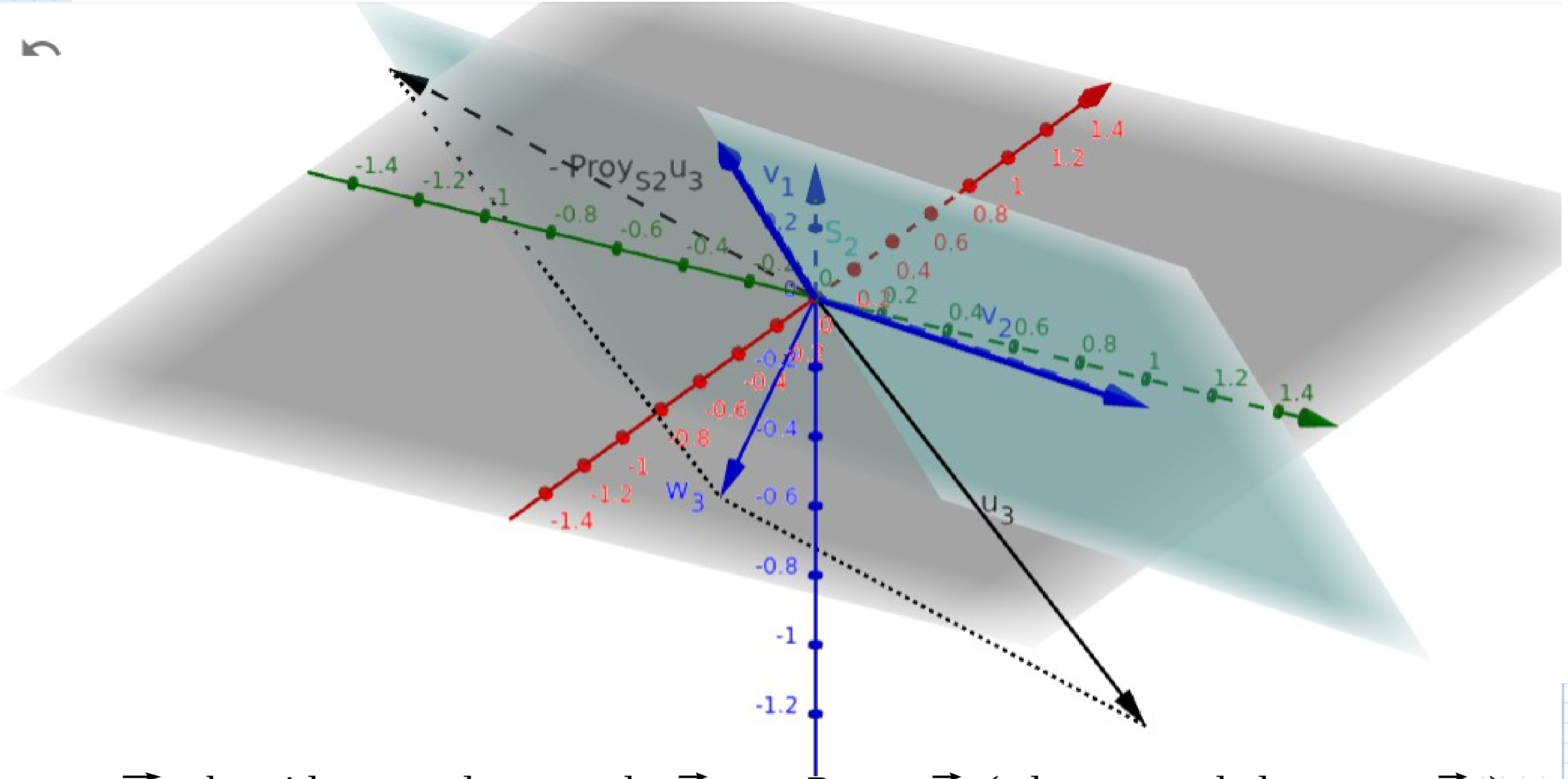
El Proceso de Gram - Schmidt



$proy_{S2}\vec{u}_3$: la proyección de $\vec{u}_3$ sobre el plano S_2 ($S_2 = gen(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2)$).

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

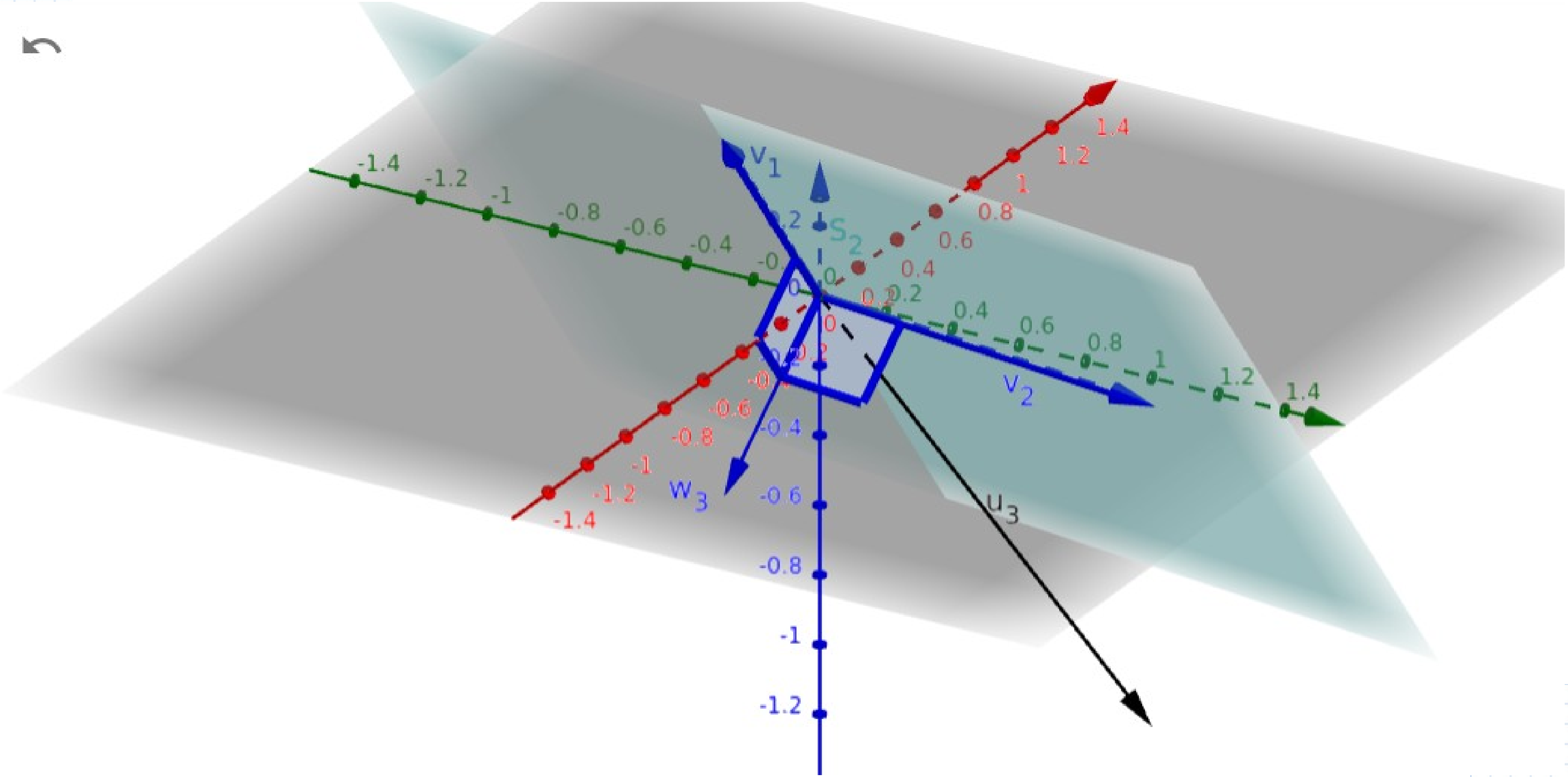
El Proceso de Gram - Schmidt



$\vec{w}_3$ obtenido como la suma de $\vec{u}_3$ y $-Proy_{S2}\vec{u}_3$ (el opuesto de la $proy_{S2}\vec{u}_3$).

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

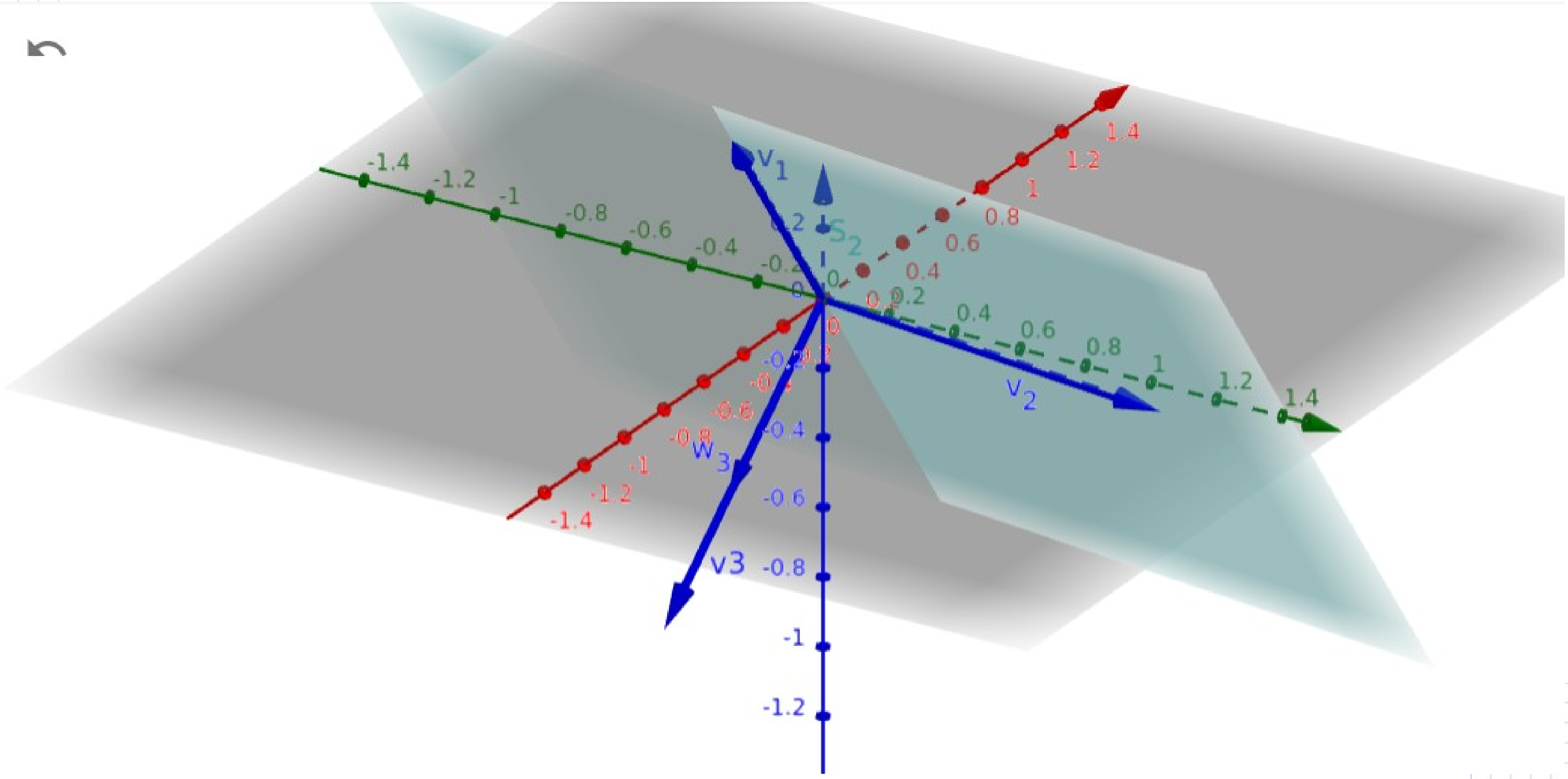
El Proceso de Gram - Schmidt



Verificación de la ortogonalidad entre los vectores

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt



Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt

EJEMPLO

Y además: $\|\vec{w}_3\| = \sqrt{\frac{4}{121}+\frac{4}{121}+\frac{36}{121}} = \sqrt{\frac{44}{121}} = \sqrt{\frac{4}{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}$

$$\frac{1}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{11}{2\sqrt{11}}$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{11}{2\sqrt{11}}\left(\frac{-2}{11};\frac{-2}{11};\frac{-6}{11}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)}$$

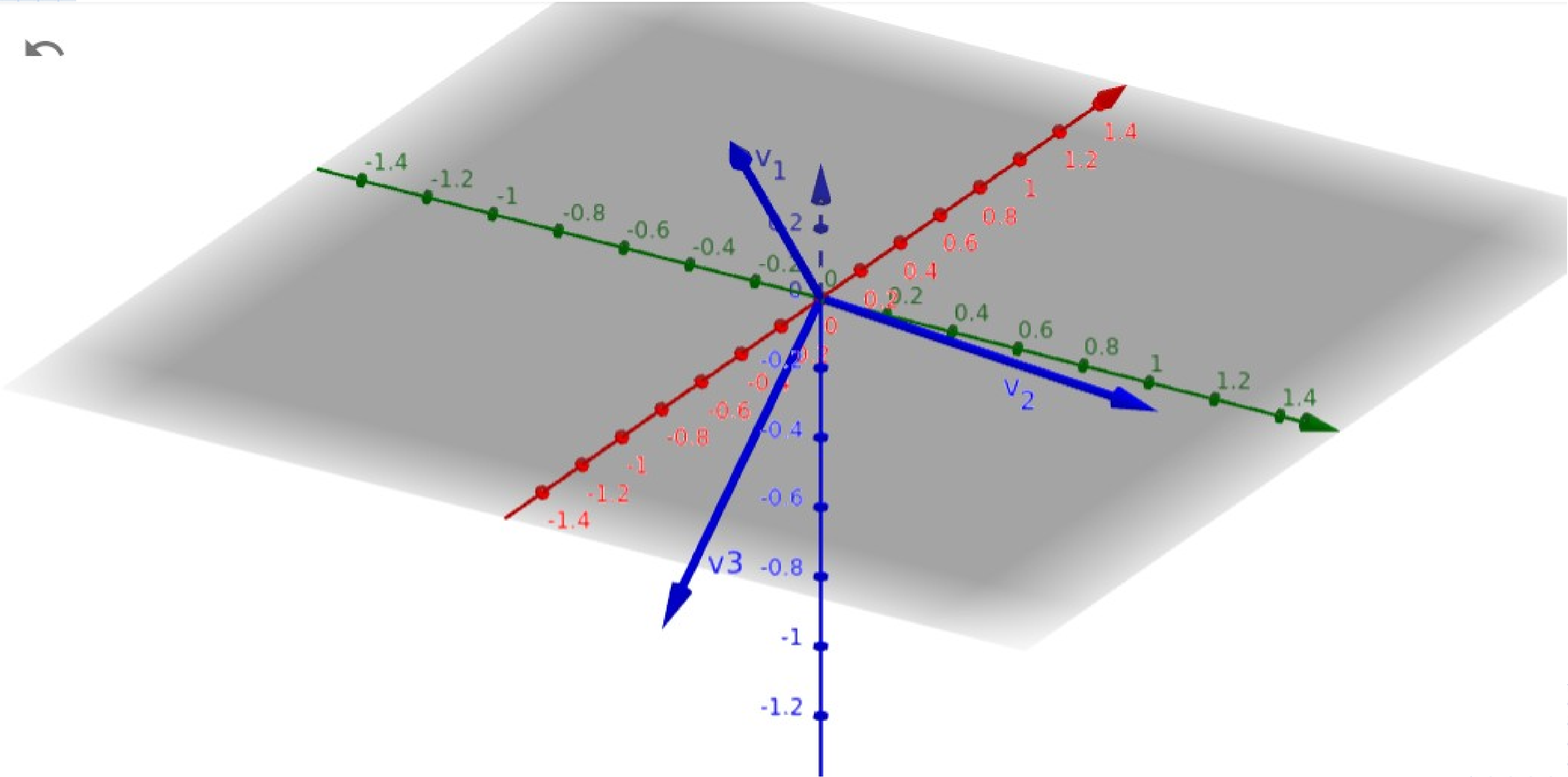
con: $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{9}{11}} = 1$

Finalmente: $\boxed{B' = \left\{\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right);\vec{v}_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}}\right);\vec{v}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)\right\}}$

B’ es la base ortonormal obtenida a partir de B

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

El Proceso de Gram - Schmidt



Los vectores de la base ortonormal B’

Email: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar