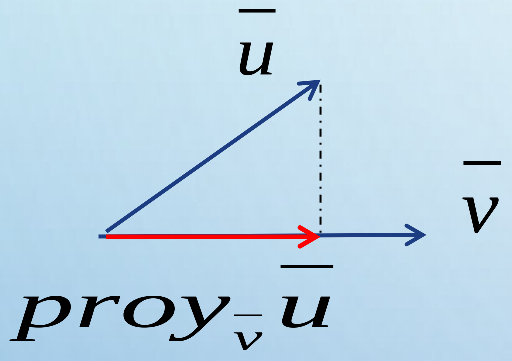
# PROYECCION ORTOGONAL

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

# Proyección ortogonal

RECORDAR:




Al trabajar con producto escalar vimos que:

$$proy_{\bar{v}}\bar{u} = \frac{\bar{u}.\bar{v}}{\left|\bar{v}\right|^2}\bar{v}$$

Si $\bar{v}$ fuera un Versor y cambiamos producto escalar por producto interior, nos queda:

$$proy_{\bar{v}}\bar{u} = \frac{\left\langle \bar{u},\bar{v} \right\rangle \bar{v}}{1} = \left\langle \bar{u},\bar{v} \right\rangle \bar{v}$$

Hasta ahora proyectábamos un vector sobre otro, pero

¿Cómo proyectar sobre un subespacio?

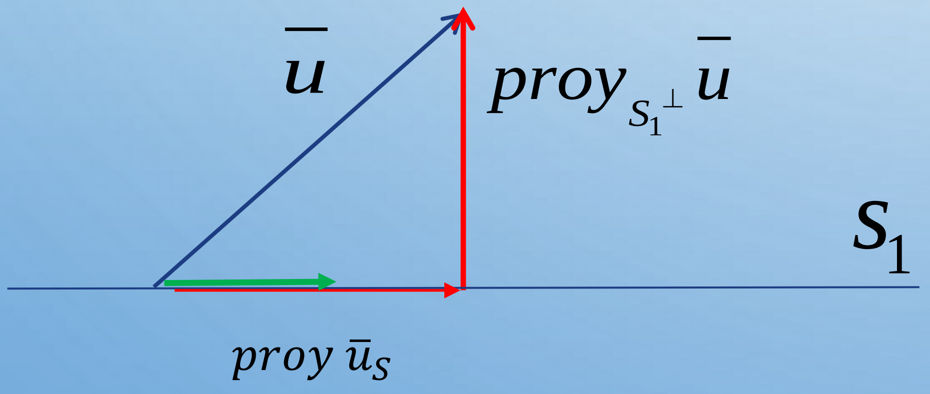
- **Proyección ortogonal sobre un subespacio en $\mathbf{R}^2$**

base ortonormal de S1

$$B = \{\overline{v_1}\}$$

**Ejemplo: Sea S1 una recta que pasa por el origen**

$$proy_{S_1}\overline{u} = \langle \overline{u}, \overline{v_1} \rangle \overline{v_1}$$

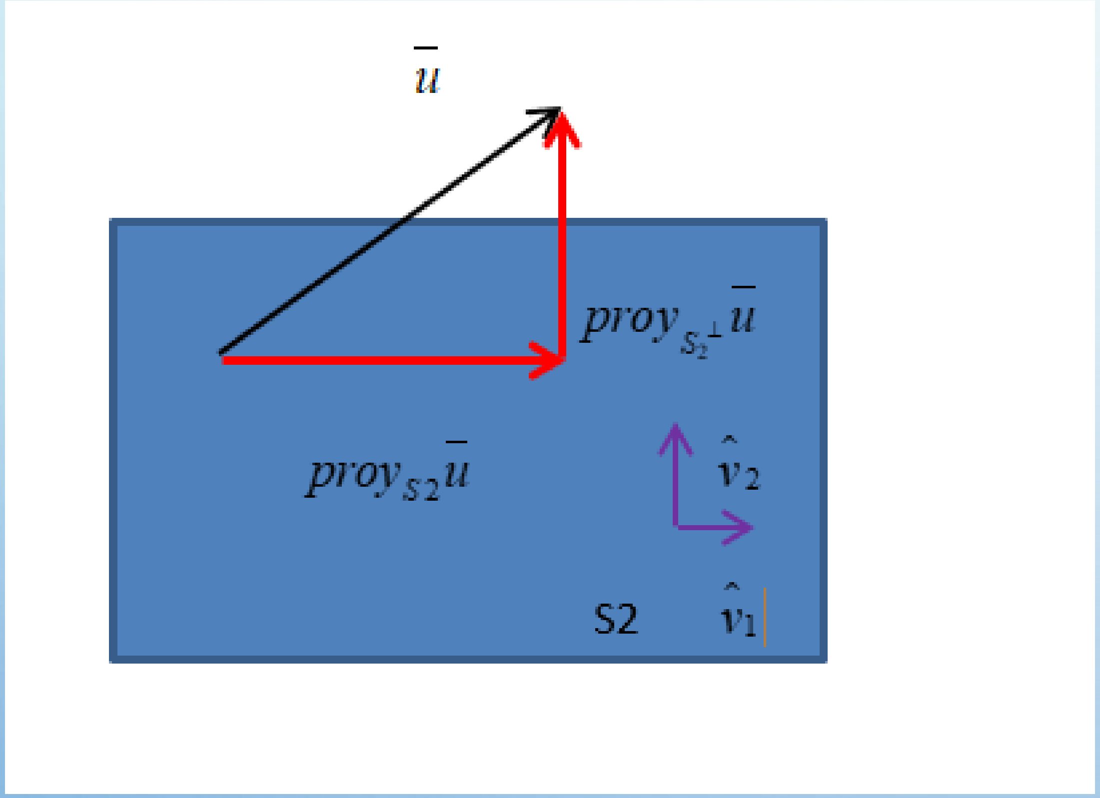



Por otro lado:

$$\overline{u} = proy_{S_1}\overline{u} + proy_{S_1^{\perp}}\overline{u}$$

En $\mathbb{R}^3$

**Ejemplo: Sea S2 un plano que pasa por el origen.**

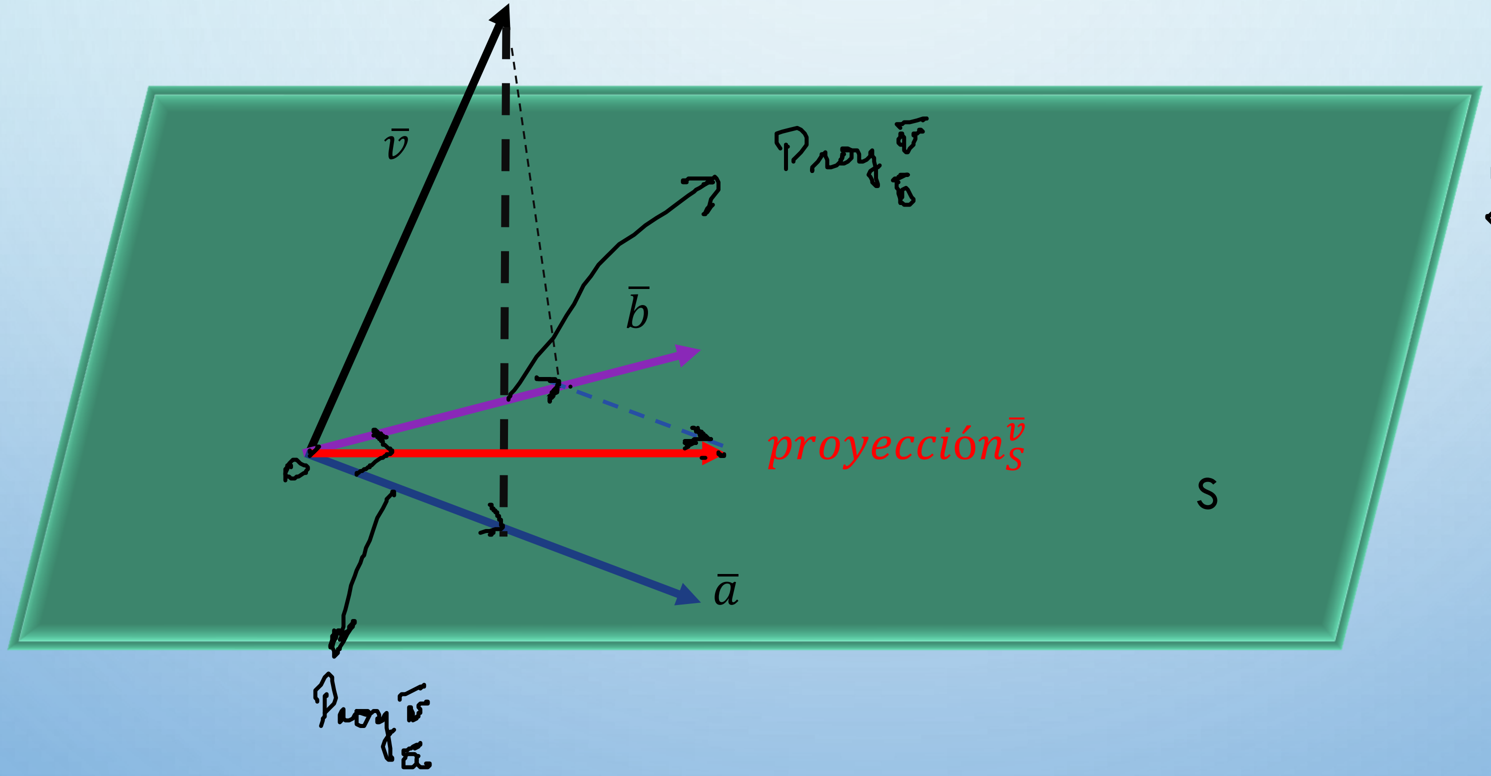



$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ base ortonormal de S2

$$proy_{S_2}\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 + \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2$$

Por otro lado ocurre lo mismo:

$$\bar{u} = proy_{S_2}\bar{u} + proy_{S_2^\perp}\bar{u}$$




$\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es una base ortonormal

- ✓ **Generalización del concepto de proyección:**

Sea $A=\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3},......,\overline{v_n}\}\subset V$ base ortonormal de un subespacio S y sea $\overline{u}\in V$ la

$$proy_S\overline{u}=\langle\overline{u},\overline{v_1}\rangle\overline{v_1}+\langle\overline{u},\overline{v_2}\rangle\overline{v_2}+\langle\overline{u},\overline{v_3}\rangle\overline{v_3}+....+\langle\overline{u},\overline{v_n}\rangle\overline{v_n}$$

Ejemplo:

Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3/x+2y-z=0\}$ y sea $\overline{u}=(2,1,-1)$, hallar la $proy_S\overline{u}$ , sabiendo que una base ortonormal de S es

$$B=\left\{\overline{v_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\overline{v_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$proy_S\overline{u}=\langle\overline{u},\overline{v_1}\rangle\overline{v_1}+\langle\overline{u},\overline{v_2}\rangle\overline{v_2}$$

**RESOLUCIÓN:**

$$proy_S\overline{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$proy_S\overline{u}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$proy_S\overline{u}=\left(\frac{7}{6},-\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)$$

El vector obtenido tiene que pertenecer al Subespacio

Verificamos:

Condición de S: $x + 2y - z = 0$

$$\frac{7}{6}-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=0$$

¿SI TENGO UN SUBESPACIO Y CALCULO UNA BASE SERÁ ORTONORMAL?

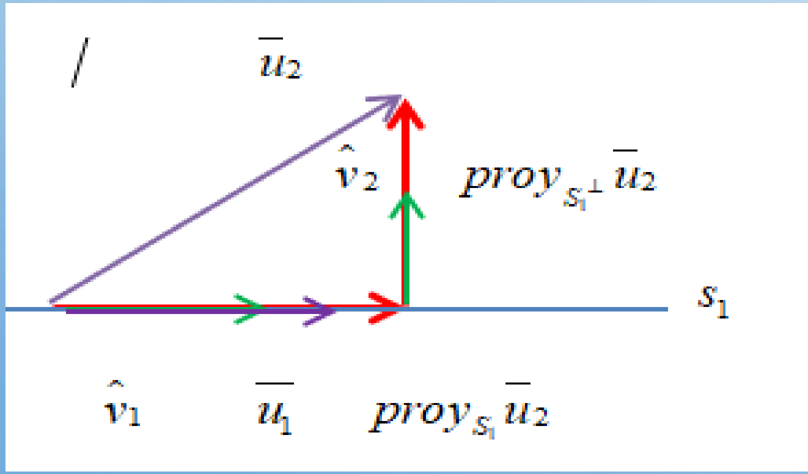
ES PROBABLE QUE NO, PARA ORTONORMALIZAR BASES USAMOS EL PROCESO DE GRAM – SCHMIDT

- **GRAM – SCHMIDT**
- TODO ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERIOR DE DIMENSIÓN FINITA TIENE UNA BASE ORTONORMAL

$$H)\ \ B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3,......\overline{u}_n\}\ \ es\ \ base\ \ de\ \ V$$

$$T)\ \ A=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,......,\overline{v}_n\}\ \ es\ \ base\ \ ortonormal\ \ de\ \ V$$

- D) 1) $\overline{v}_1=\dfrac{\overline{u}_1}{\|\overline{u}_1\|}$ 2) $\overline{v}_2=\dfrac{\overline{u}_2-proy_{S_1}\overline{u}_2}{\|\overline{u}_2-proy_{S_1}\overline{u}_2\|}$




$$\overline{u}_2=proy_{S_1}\overline{u}_2+proy_{S_1^\perp}\overline{u}_2$$

$$\overline{u}_2-proy_{S_1}\overline{u}_2=proy_{S_1^\perp}\overline{u}_2$$

?

3) ¿Cómo obtengo el vector $\overline{v_3}$ Recordar:

$$\overline{u}_3 = proy_{S_2}\overline{u}_3 + proy_{S_2^{\perp}}\overline{u}_3$$

$$\overline{u}_3 - proy_{S_2}\overline{u}_3 = proy_{S_2^{\perp}}\overline{u}_3$$

$$\overline{v_3} = \frac{\overline{u_3} - proy_{S_2}\overline{u_3}}{\left\|\overline{u_3} - proy_{S_2}\overline{u_3}\right\|}$$

https://www.geogebra.org/m/uvufgrun

- PASO N)

$$\overline{v_n} = \frac{\overline{u_n} - proy_{S_{n-1}}\overline{u_n}}{\left\|\overline{u_n} - proy_{S_{n-1}}\overline{u_n}\right\|} = \frac{\overline{u_n} - \langle\overline{u_n},\overline{v_1}\rangle\overline{v_1} - \langle\overline{u_n},\overline{v_2}\rangle\overline{v_2} - \ldots\ldots. - \langle\overline{u_n},\overline{v}_{n-1}\rangle\overline{v}_{n-1}}{\left\|\overline{u_n} - \langle\overline{u_n},\overline{v_1}\rangle\overline{v_1} - \langle\overline{u_n},\overline{v_2}\rangle\overline{v_2} - \ldots\ldots. - \langle\overline{u_n},\overline{v}_{n-1}\rangle\overline{v}_{n-1}\right\|}$$

# Recordar:

$\overline{u} \in V$ y sea S un subespacio de V, entonces

$$\overline{u} = \overline{p} + \overline{q} \quad / \overline{p} \in S \;\wedge\; \overline{q} \in S^{\perp}$$

$$\overline{p} = proy_S \overline{u}$$
$$\overline{q} = proy_{S^{\perp}} \overline{u}$$

$$\bar{u} - Proy_S \bar{u} = Proy_{S^{\perp}} \bar{u}$$

# Espacios Vectoriales Reales – Ejercicio

Sea el Subespacio vectorial $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\Re^3/\ x_3=3x_1-2x_2\}$, y el conjunto de vectores A= {(1,1,1), (1,-1,5), (1,3,-3)}. Hallar una Base y Dimensión de W. Ortonormalizar dicha Base

a) $W=\{(x,y,z)\in\Re^3/\ z=3x-2y\}$

Busco la Base:

$(x,y,z)=(x,y,3x-2y)\ =(x,0,3x)+(0,y,-2y)=x(1,0,3)+(0,1,-2)$

$B_W=\{(1,0,3);(0,1,-2)\}$

Dim=2

Ortonormalizo la Base:

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \rightarrow \vec{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\vec{v}_2=\frac{\vec{u}_2-proy_{W_1}\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2-proy_{W_1}\vec{u}_2\|}=\frac{\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle.\vec{v}_1}{\|\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle.\vec{v}_1\|}=\frac{(0,1,-2)-\left\langle(0,1,-2);\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\rangle.\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}{\left\|(0,1,-2)-\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\|}$$

$$\vec{v}_2=\frac{(0,1,-2)-\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}{\left\|(0,1,-2)-\left(-\frac{6}{10},0,-\frac{18}{10}\right)\right\|}=\frac{(0,1,-2)-\left(-\frac{6}{10},0,-\frac{18}{10}\right)}{\left\|\left(\frac{6}{10},\frac{10}{10},-\frac{2}{10}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{6}{10},\frac{10}{10},-\frac{2}{10}\right)}{\left\|\left(\frac{3}{5},\frac{5}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\|}==\left(\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{5}{\sqrt{35}},-\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

# Espacios Vectoriales Reales – Ejercicio

Sea el Subespacio vectorial $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\Re^3/\ x_3=3x_1-2x_2\}$, y el conjunto de vectores A= {(1,1,1), (1,-1,5), (1,3,-3)}. Hallar una Base y Dimensión de W. Ortonormalizar dicha Base

a $W=\{(x,y,z)\in\Re^3/\ z=3x-2y\}$

$$BO_W=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{5}{\sqrt{35}},-\frac{1}{\sqrt{35}}\right)\right\}$$

# Espacios Vectoriales Reales – Ejercicio

Sea el Subespacio vectorial $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 / \ x_3 = 3x_1 - 2x_2\}$, y el conjunto de vectores A= {(1,1,1), (1,-1,5), (1,3,-3)}. Hallar el subespacio T que sea el complemento ortogonal de W

b $W = \{(x, y, z) \in \Re^3 / \ z = 3x - 2y\}$ → $3x - 2y - z = 0$

W genera un plano, si encuentro la normal tengo el complemento ortogonal

$$\boldsymbol{B_{W^{\perp}} = \{(3, -2, -1)\}}$$

$$\boldsymbol{W^{\perp} = \{(x, y, z) \in R^3 / x + 3z = 0 \wedge y - 2z = 0\}}$$

De la base Normalizada:

$$\boldsymbol{BO_{W^{\perp}}} = \left\{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right\}$$

$$BO = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right\}$$

# Espacios Vectoriales Reales – Ejercicio

Sea el Subespacio vectorial $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 / \ x_3 = 3x_1 - 2x_2\}$, y el conjunto de vectores A= {(1,1,1), (1,-1,5), (1,3,-3)}. Descomponer al vector $\vec{v}$ = **(1, 0, 2)** como suma de dos vectores, uno paralelo a W y otro paralelo a T.

c

$$BO_W = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}\right)\right\}$$

$$\vec{p} = < \vec{v}, \hat{v}_1 > \hat{v}_1 + < \vec{v}, \hat{v}_2 > \hat{v}_2 =$$

$$= \left\langle (1,0,2), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left\langle (1,0,2), \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}\right)\right\rangle \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

$$= \frac{7}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{\sqrt{35}}\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{10}, 0, \frac{21}{10}\right) + \left(\frac{3}{35}, \frac{5}{35}, -\frac{1}{35}\right)$$

$$= \left(\frac{11}{14}, \frac{2}{14}, \frac{29}{14}\right)$$

# Espacios Vectoriales Reales – Ejercicio de examen

Sea el Subespacio vectorial $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 / \ x_3 = 3x_1 - 2x_2\}$, y el conjunto de vectores A= {(1,1,1), (1,-1,5), (1,3,-3)}. Descomponer al vector $\vec{v}$ = **(1, 0, 2)** como suma de dos vectores, uno paralelo a W y otro paralelo a T.

c

$$BO_{W^\perp} = \left\{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right\}$$

$$\vec{h} =< \vec{v}, \hat{v}_3 > \hat{v}_3 =$$

$$= \left\langle (1,0,2), \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right\rangle \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{1}{14}\right)$$

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{h} = \left(\frac{11}{14}, \frac{2}{14}, \frac{29}{14}\right) + \left(\frac{3}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{1}{14}\right) = (1,0,2)$$

## EJEMPLO: (EJERCICIO 14-6 GUÍA)

Construir a partir de la base $B_3 = \left\{ \overline{v_1} = (1,1,0), \overline{v_2} = (0,1,1), \overline{v_3} = (1,0,1) \right\}$ una base ortonormal de

**EJEMPLO: (EJERCICIO 14-6 GUÍA)**

Construir a partir de la base $B_3=\{\overline{v_1}=(1,1,0),\overline{v_2}=(0,1,1),\overline{v_3}=(1,0,1)\}$ una base ortonormal de $\boldsymbol{R}^3$

1) $\overline{u_1}=\dfrac{\overline{v_1}}{\|v_1\|}\rightarrow\overline{u_1}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

2)

$$\overline{u_2}=\frac{\overline{v_2}-\langle\overline{v_2},\overline{u_1}\rangle\overline{u_1}}{\left\|\overline{v_2}-\langle\overline{v_2},\overline{u_1}\rangle\overline{u_1}\right\|}=\frac{(0,1,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}{\left\|(0,1,1)-\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right\|}$$

$$\overline{u_2}=\frac{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\rightarrow\overline{u_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

3)

$$\overline{u_3}=\frac{\overline{v_3}-\langle\overline{v_3},\overline{u_1}\rangle\overline{u_1}-\langle\overline{v_3},\overline{u_2}\rangle\overline{u_2}}{\left\|\overline{v_3}-\langle\overline{v_3},\overline{u_1}\rangle\overline{u_1}-\langle\overline{v_3},\overline{u_2}\rangle\overline{u_2}\right\|}=\frac{(1,0,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)}{\left\|(1,0,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\|}$$

$$\overline{u_3}=\frac{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{12}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{12}}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\rightarrow\overline{u_3}=\left(\frac{2}{\sqrt{12}},-\frac{2}{\sqrt{12}},\frac{2}{\sqrt{12}}\right)$$

$$B'=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{12}},-\frac{2}{\sqrt{12}},\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\right\}$$