Planos que contienen o no al origen ¿Son subespacio?

Demostración

Para demostrar si un conjunto *S* es un subespacio de un espacio vectorial *V*, debe cumplir con las cuatro condiciones necesarias:

I) $S \subset V$

II) $S \neq \emptyset$

III) $LCI: \forall \vec{u} \in S \wedge \forall \vec{v} \in S \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \in S$

IV) $LCE: \forall \vec{u} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \vec{u} \in S$

Los ejercicios 1.7 y 1.8 de la guía de ejercicios del TP N°4 presentan estos casos. Por lo tanto, los usaremos de ejemplo. En ellos, se pide demostrar si un plano que pasa por el origen y uno que no, son o no subespacio.

Ejercicio 1.7 Demostrar que D_7 es o no subespacio con $D_7 = \{(x; y; z) / x + y + z = 0\}$

Para demostrarlo, se debe probar el cumplimiento de cada una de las cuatro condiciones, las cuales se prueban a continuación.

I) $D_7 \subset \mathbb{R}^3$

Se cumple por definición de D_7. ■

II) $D_7 \neq \emptyset$

Se verifica que: $(0; 0; 0) \in D_7 \Rightarrow D_7 \neq \emptyset$ ■

III) $LCI: \forall \vec{x} \in D_7 \wedge \forall \vec{y} \in D_7 \Rightarrow (\vec{x}+\vec{y}) \in D_7$

H) $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in D_7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\vec{y} = (y_1; y_2; y_3) \in D_7 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$

T) $(\vec{x}+\vec{y}) \in D_7$

D) $\vec{x}+\vec{y} = (x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3)$

$= (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$

Reemplazo en D_7 y se debe verificar la condición de D_7

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) =$

$(x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) =$

$0 \quad + \quad 0 \quad =$ (por hipótesis)

$0 \quad + \quad 0 \quad = 0$ Verifica condición de $D_7 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in D_7$ ■

IV) $LCE: \forall \vec{x} \in D_7 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha \vec{x}) \in D_7$

H) $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in D_7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

T) $(\alpha \vec{x}) \in D_7$

D) $\alpha \vec{x} = \alpha (x_1; x_2; x_3)$

$= (\alpha x_1; \alpha x_2; \alpha x_3)$

Reemplazo en D_7 y se debe verificar la condición de D_7

$(\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3)=$

$\alpha(x_1+x_2+x_3)=$

α (0) = (por hipótesis)

0 = 0 Verifica condición de $D_7 \Rightarrow \alpha\vec{x} \in D_7$ ■

Por cumplir las condiciones I a IV, *D₇* es subespacio.

Ejercicio 1.8 Demostrar que D_8 es o no subespacio con $D_7=\{(x;y;z)/x+y+z=1\}$

Para demostrarlo, se debe probar el cumplimiento de cada una de las cuatro condiciones, las cuales se prueban a continuación.

I) $D_8 \subset \mathbb{R}^3$

Se cumple por definición de D_8. ■

II) $D_8 \neq \emptyset$

Se verifica que: $(0;0;0) \in D_8 \Rightarrow D_8 \neq \emptyset$ ■

III) $LCI: \forall \vec{x} \in D_8 \wedge \forall \vec{y} \in D_8 \Rightarrow (\vec{x}+\vec{y}) \in D_8$

H) $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3) \in D_8 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=1$

$\vec{y}=(y_1;y_2;y_3) \in D_8 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=1$

T) $(\vec{x}+\vec{y}) \in D_8$

D) $\vec{x}+\vec{y}=(x_1;x_2;x_3)+(y_1;y_2;y_3)$

$=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3)$

Reemplazo en D_8 y se debe verificar la condición de D_8

$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=$

$(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=$

1 + 1 = (por hipótesis)

2 ≠ 1 NO Verifica condición de $D_8 \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \notin D_8$ x

IV) $LCE: \forall \vec{x} \in D_8 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\vec{x}) \in D_8$

H) $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{x}=(x_1;x_2;x_3) \in D_8 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=1$

T) $(\alpha\vec{x}) \in D_8$

D) $\alpha\vec{x}=\alpha(x_1;x_2;x_3)$

$=(\alpha x_1;\alpha x_2;\alpha x_3)$

Reemplazo en D_8 y se debe verificar la condición de D_8

$(\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3)=$

$\alpha(x_1+x_2+x_3)=$

α (1) = (por hipótesis)

α ≠ 1 NO Verifica condición de $D_8 \Rightarrow \alpha\vec{x} \notin D_8$ x

Por no cumplir ni las condiciones III y IV, *D₈* NO es subespacio.