TRABAJO PRÁCTICO Nº 3 - SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Representaciones equivalentes de un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B.$$

donde $A=((a_{i,j}))\in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$ es la matriz de los coeficientes del sistema.
$B=((b_{i,j}))\in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times 1}}$ es la matriz columna de los términos independientes.
$X=((x_i))\in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times 1}}$ es la matriz columna de las incógnitas.
$A'=(A\mid B)\in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times(n+1)}}$ es la matriz ampliada del sistema.

El sistema puede resultar:

Compatible o Consistente	Determinado	Solución única.	S.C.D.	$r(A')=r(A)=n$
	Indeterminado	Infinitas soluciones	S.C.I.	$r(A')=r(A)<n$
Incompatible o Inconsistente		Sin solución.	S.I.	$r(A')=r(A)+1$

Para los sistemas compatibles, se denomina grado de libertad *gl* del sistema al número de variables independientes, dado por $gl=n-r(A)$.

Sistema homogéneo es aquel cuyos términos independientes son todos nulos ($B=O$). Estos sistemas son siempre compatibles, todos ellos admiten la solución trivial $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ y, de ser casos indeterminados, admiten además $n-r(A)$ soluciones linealmente independientes.

El sistema es inhomogéneo si los términos independientes no son todos nulos ($A\cdot X=B$ con $B\neq O$). Para estos sistemas, en caso de ser compatibles, su solución puede ser expresada como la suma de una solución particular y el conjunto solución del sistema homogéneo asociado ($A\cdot X=O$), esto es

$$\boxed{X^T{}_{\text{inhomogéneo}}=X^T{}_{\text{particular}}+X^T{}_{\text{homogéneo}}}$$

Ejercicio 1.

Recodificación e identificación de matrices en las distintas representaciones equivalentes de un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Análisis de la compatibilidad de sistemas lineales y determinación del conjunto solución.

Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Analizar su clasificación y expresar, si existe, el conjunto solución.

a) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2x-3y+4z=8 \\ -x-y+3z=6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=7 \\ 2x_1+x_2+x_3=5 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y+t=3 \\ z-t=2 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+z-2t=0 \\ -2x+2y-z+t=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2x+2y-3z+t=1 \\ x+y-z+3t=4 \\ x+y-2z-2t=-3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+2y-3z+t=0 \\ x+y-z+3t=0 \\ x+y-2z-2t=0 \end{cases}$

Ejercicio 2.

Análisis, determinación de parámetros y resolución de sistemas. Determinación del grado de libertad.

2.1) Analizar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales indicando para qué valores del parámetro $a \in \mathbf{R}$, cada uno de ellos es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Escribir el conjunto solución e indicar el grado de libertad cuando correspondiere.

a) $\begin{cases} x_2 + (a-1)x_3 = a \\ (a-1)x_2 + x_3 = a \\ \quad (a-2)x_1 = a+2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 2a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^2 \end{cases}$. Dar una interpretación geométrica del problema y su respuesta.

2.2) Idem ej. **3.1**, donde los parámetros son $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}$.

a) $\begin{cases} a(x+y) + bz = a \\ b(x+y) = b \\ b(y+z) = a \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y - z + at = 1 - a \\ -2y + 3z - at = a + 1 \\ az - t = (1-a)(b^2 - 9) \\ (a-1)(a-2)t = a(a-2)(a+4)(b+3) \end{cases}$

Nota. Para el último sistema, **3.2.c)**, sólo analizar si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado y cuánto vale el grado de libertad, o incompatible. Esto es, si las hubiera no dar las soluciones.

Ejercicio 3.

Intepretación de la resolución de sistemas bajo una presentación diferente.

Sea el sistema $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -k \\ 0 & k & -7 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Si $B = O$ (matriz nula), determinar para qué valores de k el sistema dado admite soluciones distintas de la trivial. Hallar las soluciones para cada valor de k hallado.

b) Si $B^T = (k-1, k-2, 2k-5)$, analizar las características de $A \cdot X = B$ para los distintos valores $k \in \mathbf{R}$. Hallar, en los casos que exista, el conjunto solución.

GEOGEBRA Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Uso básico de "Cálculo Simbólico (CAS)" en GeoGebra aplicado resolver a sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio G1. Comprobar los resultados obtenidos en el ejercicio 1, utilizando "Cálculo Simbólico (CAS)" en GeoGebra. Presentamos algunos ejemplos desarrollados para tener de referencia.

Indicaciones.

Opción 1. En "Cálculo Simbólico (CAS)" definir la matriz ampliada del sistema. Luego usar la sentencia

"EscalonadaReducida(<Matriz>)

para obtener una matriz equivalente escalonada e interpretar lo obtenido. Observar atentamente la forma de escribir las distintas partes del procedimiento (sobre todo en la definición el uso de ":=").

1.a) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2x-3y+4z=8 \\ -x-y+3z=6 \end{cases}$

1	AB:={{1,1,-1,-1},{-2,-3,4,8},{-1,-1,3,6}} $\rightarrow\ AB := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
2	EscalonadaReducida(AB) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Observación: en este sistema de ecuaciones donde todos los elementos de las matrices son numéricos (a diferencia de otros casos donde sean alfanuméricos) se puede ingresar la matriz AB por la Vista "Hoja de Cálculo".

Opción 2. Ingresar cada ecuación, y luego resolver el sistema con la sentencia
Soluciones(<Lista de ecuaciones>, <Lista de variables>)

1.a) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2x-3y+4z=8 \\ -x-y+3z=6 \end{cases}$

1	e1:=x+y-z=-1 $\rightarrow\ e1:\ x+y-z=-1$
2	e2:=-2x-3y+4z=8 $\rightarrow\ e2:\ -2x-3y+4z=8$
3	e3:=-x-y+3z=6 $\rightarrow\ e3:\ -x-y+3z=6$
4	Soluciones({e1,e2,e3},{x,y,z}) $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio G2. Comprobar los resultados obtenidos en el ejercicio 2, utilizando "Cálculo Simbólico (CAS)" en GeoGebra. Presentamos algunos ejemplos desarrollados para tener de referencia.

Aprender las limitaciones que se presentan en esta forma de análisis y los cuidados que hay que tener en su uso.

a) $\begin{cases} x_2+(a-1)x_3=a \\ (a-1)x_2+x_3=a \\ (a-2)x_1=a+2 \end{cases}$

Cálculo Simbólico (CAS)

1	AB:={{0,1,a-1,a},{0,a -1,1,a},{a - 2,0,0,a+2}} $\rightarrow\ AB := \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ a-2 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$
2	EscalonadaReducida(AB) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Observación. Si se resuelve en "Cálculo Simbólico (CAS)" de GeoGebra siguiendo este procedimiento, **no queda el análisis completo.** Se puede registrar la solución del caso compatible determinado, pero no hay aviso que existen valores críticos de a para los cuales esta respuesta no corresponde.

Alternativa. Si se define la matriz de los coeficientes del sistema A y se calculan los valores del parámetro a para los cuales su determinante es nulo, se sabe en este caso que hay dos valores críticos y habrá que calcularlos aparte. Luego, interpretar lo obtenido.

3 A:={{0,1,a-1},{0,a -1,1},{a - 2,0,0}}

$$\rightarrow A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Raíz(Determinante(A))

$$\rightarrow \{a = 0, a = 2\}$$

Para a=0.

5 AB0:={{0,1,-1,0},{0, -1,1,0},{0 - 2,0,0,2}}

$$\rightarrow AB0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6 EscalonadaReducida(AB0)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para a=2.

7 AB2:={{0,1,1,2},{0,1,1,2},{0,0,0,4}}

$$\rightarrow AB2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8 EscalonadaReducida(AB2)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = 3 \end{cases}$

Observación. No se puede emplear en "Cálculo Simbólico (CAS)" de GeoGebra el cálculo de las raíces del determinante de la matriz de los coeficientes para hallar los valores críticos de a puesto que dicha matriz no es cuadrada.

Cálculo Simbólico (CAS)

1 AB:={{1,2,a,1},{2,a,8,3}}

$$\rightarrow AB := \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

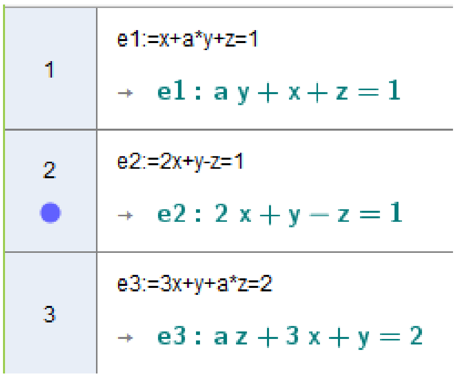
2 EscalonadaReducida(AB)

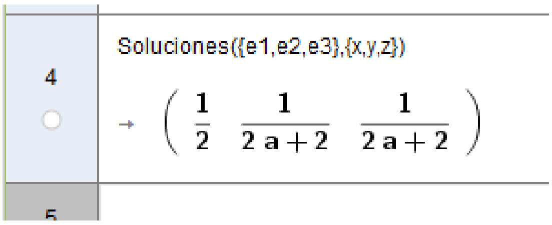
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+4 & \frac{a-6}{a-4} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{a-4} \end{pmatrix}$$

No obstante, aquí el valor crítico es claramente a=4.

c) $\begin{cases} x+ay+z=1 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+y+az=2 \end{cases}$

Observación. Presentamos otra alternativa de resolución en "Cálculo Simbólico (CAS)" de GeoGebra. No obstante, nuevamente hay dificultades con los valores críticos de a. De lo que se lee, no se infiere la presencia de los dos valores críticos que este sistema tiene.





Ejercicio G3. Una propuesta a realizar integrando la interpretación geométrica.

Vincular desarrollos de Álgebra Geométrica con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y las distintas vistas del software.

En GeoGebra, definir el deslizador a que tome valores entre -10 y 10. Sean los planos $\pi_1: 2x+y-z=-6; \pi_2: 3x-y+z=-5; \pi_3: 4x+a\,y-2z=-1$. Usar el GeoGebra para representar los planos. Variar el valor de a e interpretar geométricamente la intersección de dichos planos como solución del sistema de ecuaciones lineales según su tipo de solución o la inexistencia de la misma.

Indicaciones: Tener abiertas "Vista Algebraica", "Vista Gráfica" y "Vista Gráfica 3D". Para comodidad de la visualización, desmarcar los ejes y el plano de referencia en "Vista Gráfica 3D". Definir el deslizador "t" en el rango propuesto. Luego, por "Entrada", ingresar las ecuaciones de los planos. Graficar la intersección de a dos planos: $f=\pi1\cap\pi2$; $g=\pi2\cap\pi3$; $h=\pi3\cap\pi1$. Para ello utilizar "Interseca(<Objeto>, <Objeto>)". Cambiar el color a todos los objetos definidos para beneficiar su visualización. Graficar la intersección de a dos rectas: $A=f\cap g$; $B=g\cap h$; $C=h\cap f$. Variar el valor de t. Observar qué sucede prestando atención particular de a=2, tanto el gráfico como la forma que se presenta la vista algebraica.

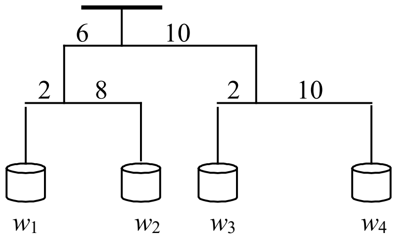
OTRAS APLICACIONES

Aplicaciones de sistemas de ecuaciones en distintas áreas

a) Problemas de **palancas** en estática.

Ley de la palanca de Arquímedes: dos masas en una palanca se equilibran cuando sus pesos son inversamente proporcionales a sus distancias al punto de apoyo.

Calcular los pesos w_1, w_2, w_3 y w_4 para balancear el sistema mecánico de la figura:



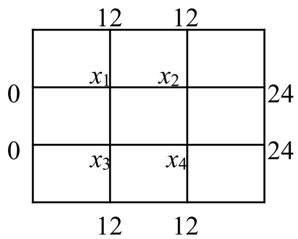
b) Problemas de **transmisión de calor** en una placa metálica.

La placa metálica representada en la figura mantiene en las orillas temperatura constante (en °C). Se desea calcular (aproximadamente) la temperatura en algunos puntos interiores de la placa. Se propone un modelo simplificado.

Las intersecciones de las líneas del retículo se llaman *nodos*.

Los nodos pueden ser puntos *en la frontera* o *interiores*.

Propiedad promedio para la conducción del calor: la temperatura en cualquier punto interior es el promedio de las temperaturas de sus puntos adyacentes (vecinos próximos en línea horizontal o línea vertical). En la figura x_i representa la temperatura en el nodo i. La temperatura de los nodos en la frontera se conoce y están indicadas en la figura.



c) Igualdad de **polinomios**.

Calcular los coeficientes a, b y c para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales $\forall x \in \mathbf{R}$.

$$P(x)=ax^2+3x^2+2ax-2cx+10x+6c$$
$$Q(x)=-2bx^2-3bx+9+a-4b$$

d) Descomposición en **fracciones simples**.

Calcular las constantes a y b que hacen válida la siguiente expresión $\forall x \in \mathbf{R}$.

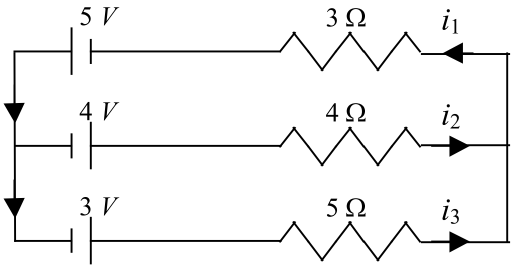
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

e) Circuitos eléctricos.

Ley de Ohm. La relación entre la corriente i (en ampère), y la tensión o voltaje V (en volt), a través de una resistencia R (en ohm), está dada por: $V=i\cdot R$.

Leyes de Kirchhoff. 1) La suma algebraica de las corrientes entrantes a un punto de unión o nodo de una red eléctrica es igual a la suma algebraica de las corrientes salientes de dicho nodo. 2) La suma de las caidas de tensión alrededor de un circuito cerrado o malla de una red eléctrica es cero.

Calcular las corrientes i_1, i_2 y i_3 en las siguientes redes eléctricas.



f) Administración de recursos.

Una firma de transporte posee tres tipos distintos de camiones A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de dos clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada camión es:

		Camiones		
		TIPO *A*	**TIPO *B***	**TIPO *C***
Máquinas	**CLASE 1**	**2**	**1**	**1**
	CLASE 2	**0**	**1**	**2**

La firma consigue una orden para 32 máquinas de la clase 1 y 10 máquinas de la clase 2. Encontrar el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden, suponiendo que, cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, ¿cuál es la solución más económica?

g) Análisis de trayectorias, ecuaciones diferenciales. (Se requiere concepto de derivada – opcional)

Se sabe teóricamente que la trayectoria $f(t)$ de un dispositivo mecánico en función del tiempo t debe cumplir las siguientes condiciones iniciales:

$$f(0)=1 \; ; \; f'(0)=0 \; ; \; f''(0)=3.$$

Se ha obtenido experimentalmente una trayectoria de la forma:

$$f(t)=\alpha\, e^{t}+\beta\, e^{2t}+3sen(t) \text{ para } t\geq 0.$$

Probar que no existe ningún par de valores de α y β para los que la función obtenida experimentalmente cumpla las condiciones iniciales.

MISCELANEAS

M1) Sean $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ y $X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$.

a) Sea $\vec{p}$ una solución de $A\cdot X=B$. Sea $\vec{h}$ cualquier solución de la ecuación homogénea $A\cdot X=O$ y sea $\vec{w}=\vec{p}+\vec{h}$. Mostrar que $\vec{w}$ es una solución de $A\cdot X=B$.

b) Sean $\vec{w}$ y $\vec{p}$ dos soluciones particulares de $A\cdot X=B$. Se define $\vec{h}=\vec{w}-\vec{p}$. Demostrar que $\vec{h}$ es una solución de $A\cdot X=O$.

Aclaración: para hacer las demostraciones en forma matricial presentar los vectores $\vec{p}$, $\vec{h}$ y $\vec{w}$ en forma de matrices columna X_p, X_h, X_w.

M2) Sea $A\cdot X=B$ la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales. En las siguientes situaciones analizar si es posible, en base a la información dada en cada caso, el número de soluciones del sistema (S.C.D., S.C.I., S.I.) Indicar si la información dada no es suficiente para decidir entre una de las tres opciones.

a) $A\in\mathbf{R}^{8\times 11}$ y B es la matriz nula.

b) $A\in\mathbf{R}^{8\times 8}$ y el rango de A es el mayor posible.

c) $A\in\mathbf{R}^{8\times 11}$ y el rango de A es el mayor posible.

d) $A\in\mathbf{R}^{11\times 8}$ y tanto el rango de A como el rango de la matrz ampliada $A'=(A|B)$ son los mayores posibles.

e) $A\in\mathbf{R}^{8\times 11}$ y tanto el rango de A como el rango de la matrz ampliada $A'=(A|B)$ son los mayores posibles.

M3) Dado, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot X=B$ donde $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ y $B\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ ($B\neq$matriz nula) y siendo X_1 y X_2 soluciones particulares del mismo, demostrar que $[X_1+\lambda(X_1-X_2)]$ también es solución del sistema $\forall\lambda\in\mathbf{R}$.

M4) Sea $A\cdot X=O$ un sistema homogéneo con $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ una matriz antisimétrica, analizar si resulta SCD o SCI para cualquier valor de *n.*

M5) Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar claramente cada respuesta.

a) Si $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ es una matriz no inversible entonces el sistema $A\cdot X=B$ no puede ser compatible.

b) Sean los sistemas $A\cdot X=B$ y $A\cdot X=C$ con la misma matriz de los coeficientes entonces no puede ser que uno sea compatible y el otro incompatible.

c) Si $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal entonces el sistema $A\cdot X=B$ es compatible determinado.

d) Si $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ es una matriz tal que dos de sus columnas son iguales entonces el sistema $A\cdot X=O$ tiene soluciones no triviales.