Álgebra vectorial

Este tipo de álgebra es una necesidad cuando se trabaja con magnitudes:

Magnitud: es aquello que para existir necesita de las relaciones de igualdad y suma.

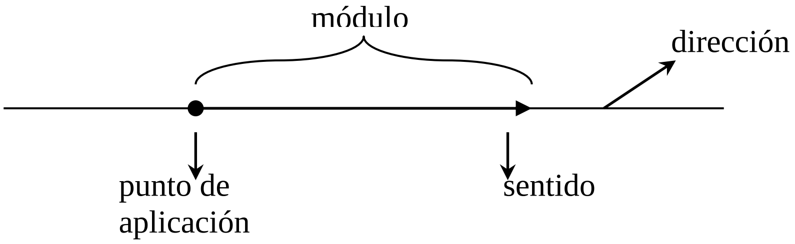
Existen dos tipos de magnitudes, que son las siguientes:

- Magnitudes Escalares: Son aquellas que para ser representados solo necesitan un número denominado medida y una unidad.
  Ej: 8 cm

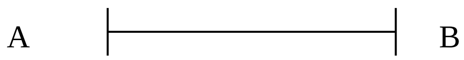
medida unidad

En este caso la magnitud es la longitud. Son magnitudes escalares también, el tiempo, la masa, etc.

- Magnitudes Vectoriales: Son magnitudes que para ser representadas necesitan de un punto de aplicación, dirección, sentido y módulo.

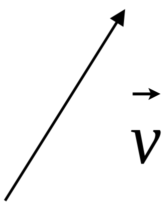


Dado un segmento como el representado, si se orienta



Se lee:

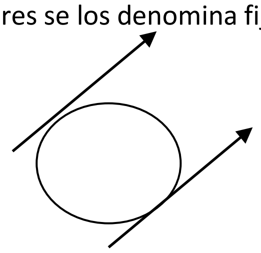
$\underset{AB}{\longrightarrow}$: vector $\overrightarrow{AB}$ que indica principio y fin



Cuando es unívoco se puede usar una sola letra.

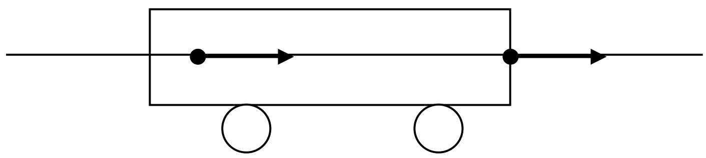
Clasificación de los vectores

Vectores fijos: El efecto de un vector puede cambiar según esté ubicado en un punto o en otro, a este tipo de vectores se los denomina fijos.



Su efecto será hacer girar en uno u otro sentido

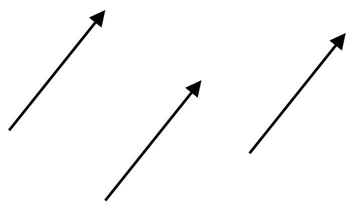
Vectores deslizantes: Son aquellos que pueden cambiar su posición sobre su recta de acción, sin cambiar el efecto.



Fuerzas sobre un carrito

Vectores deslizantes

Vectores libres: Cuando un vector puede moverse paralelamente a si mismo sin cambiar su efecto, a este vector se lo denomina libre.

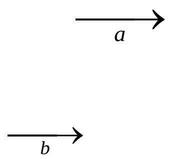


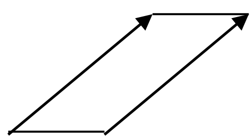
Vectores libres

Dado un vector libre; todo vector libre que tenga el mismo efecto que él se denominará equipolente del mismo. (los vectores anteriores son equipolentes uno de otro).

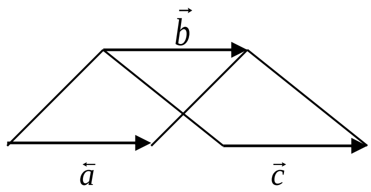
Equipolencia de vectores: Dos vectores son equipolentes si ocurre alguna de las siguientes situaciones:

1. Si son iguales (están superpuestos)
2. Si son nulos
3. Si forman lados opuestos de un paralelogramo igualmente orientados





4. Si alineados $\exists$ un tercer vector equipolente con ellos.

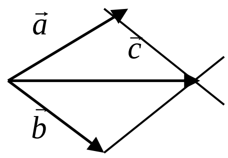


Igualdad entre magnitudes vectoriales

Dos vectores libres son iguales cuando se puede formar entre ellos un paralelogramo.

Suma geométrica de vectores

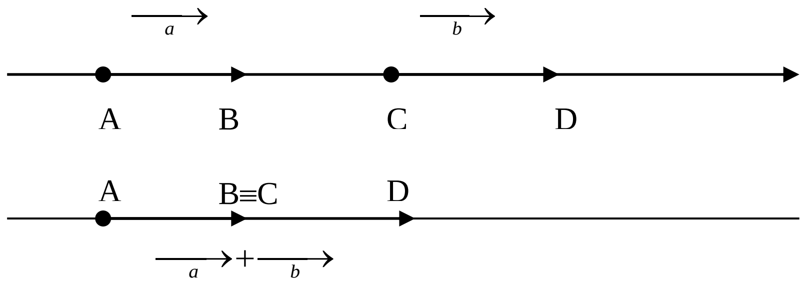
Vectores fijos:



Se suman por la regla del paralelogramo

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

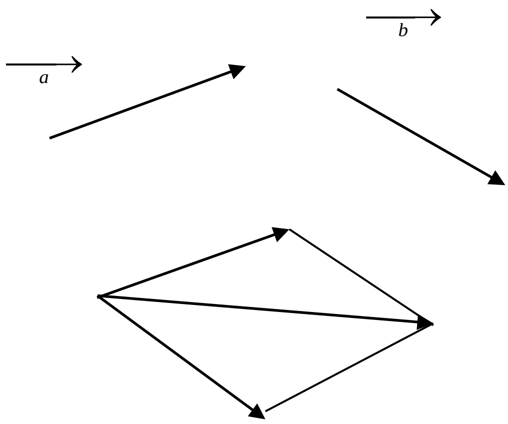
Vectores deslizantes:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

Vectores libres

Para sumar se elige un punto fijo y se dibuja un vector equipolente a los sumandos con origen en el punto



Propiedades de la suma (Para todo tipo de vectores)

V= conjunto de vectores

V={ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{z},$ ...}

1) La operación es cerrada: la suma de vectores da como resultado otro vector y el resultado de la suma de vectores es único.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \exists \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} / \vec{c} \in V \wedge \vec{c} \text{ es único.}$$

2) La operación es asociativa

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \in V \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{d} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{d})$$

3) Tiene elemento neutro

$$\forall \ \vec{v} \in V \exists \vec{o} \in V / \vec{v} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{v} = \vec{v}$$

4) Tiene opuesto

$$\forall \ \vec{v} \in V \exists -\vec{v} \in V / \vec{v} + (\overrightarrow{-v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

5) Es conmutativo

$$\forall \ \vec{a}, \vec{b} \in V \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Este conjunto de propiedades conforma una estructura que se denomina grupo Abeliano, formado por una operación aplicada sobre un conjunto que cumple estas 5 propiedades.

Propiedades del producto de un número por un vector

La operación no es cerrada ya que se están multiplicando elementos de conjuntos distintos (R y V)

1) $\forall$ k $\in R \wedge \forall \vec{v} \in V \exists \ k \cdot \vec{v} = \vec{w} \in V \wedge \vec{w}$ es único.

2) $\forall$ k $\in R \wedge \forall \vec{v}1, v\vec{2} \in V \quad k(v\vec{1} + v\vec{2}) = kv\vec{1} + kv\vec{2}$

3) $\forall$ k1, k2 $\in R \wedge \forall \vec{v} \in V$ (k1 + k2) $\vec{v} = \vec{v}k1 + \vec{v}k2$

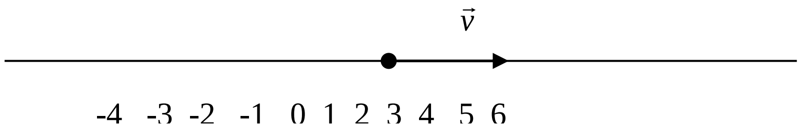
4) $\forall$ k1, k2 $\in R \wedge \forall \vec{v} \in V$ (k1. k2) $\vec{v} = k1(k2\vec{v})$

5) $\forall \vec{v} \in V \; 1.\vec{v} = \vec{v}$

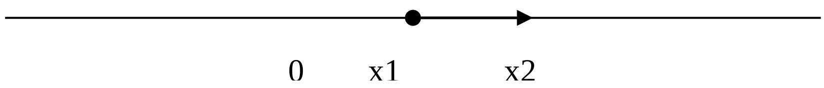
A las anteriores se las denomina propiedades lineales de los vectores.

Vectores en coordenadas

Vectores sobre una recta

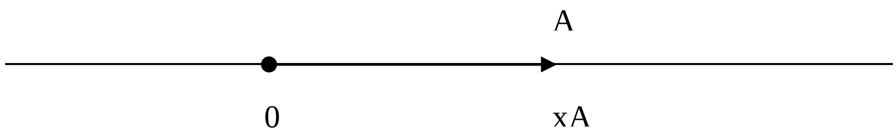


$|\vec{v}| = 3$



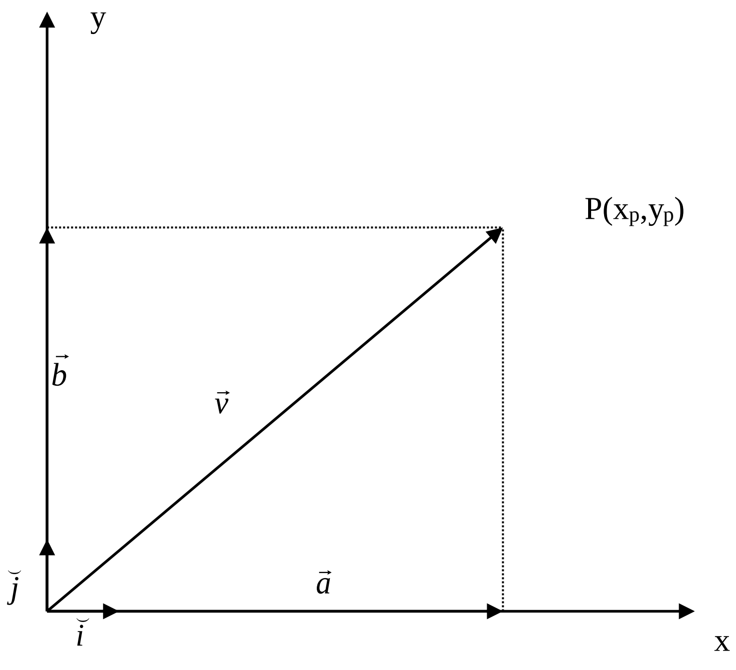
$|\vec{v}| = |x2 - x1|$

El módulo de un vector en la recta es el valor absoluto de la diferencia de las abscisas.



Vectores en el plano

Se utilizará para la representación de vectores en el plano un par de ejes normalizados (misma escala), ortogonales (perpendiculares).



$\left|\breve{i}\right| = 1$

$\left|\breve{j}\right| = 1$

$\breve{i}\ ;\ \breve{j}$ son versores: Vectores de módulo 1 que señalan una dirección y sentido en el espacio

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} = xp \bullet \breve{i}$

$\vec{b} = yp \bullet \breve{j}$

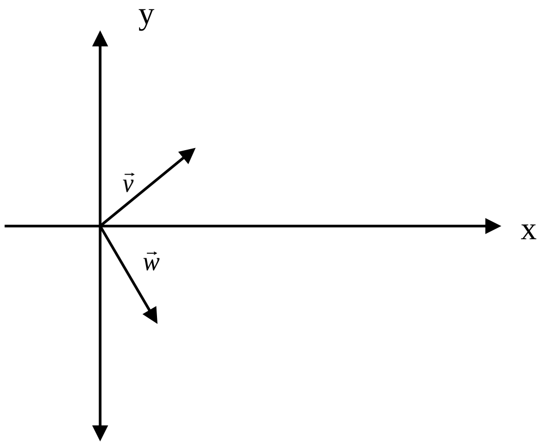
$\vec{v} = Xp\breve{i} + Yp\breve{j}$

A la expresión anterior se la denomina expresión canónica de un vector.

Ej.

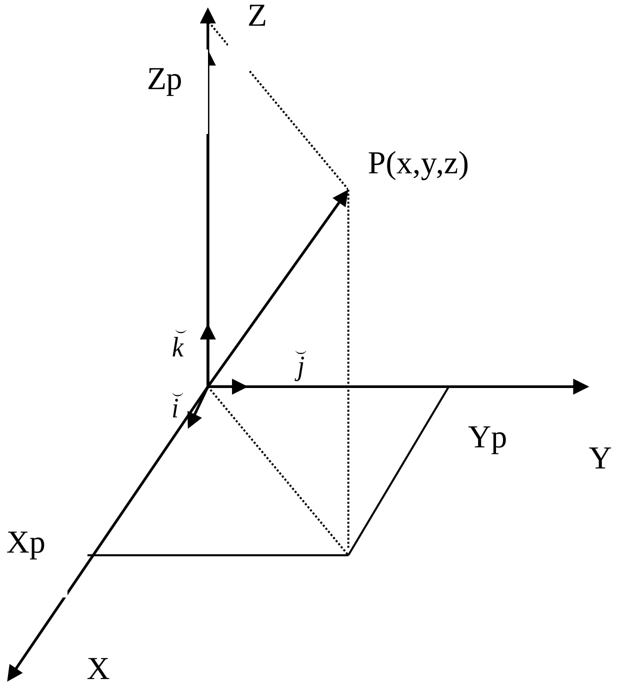
$\vec{v} = 4\breve{i} + 2\breve{j}$

$\vec{w} = 2\breve{i} - 3\breve{j}$



Obtención del módulo de un vector en el plano: $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{Xp^2 + Yp^2}$ por aplicación del teorema de Pitágoras

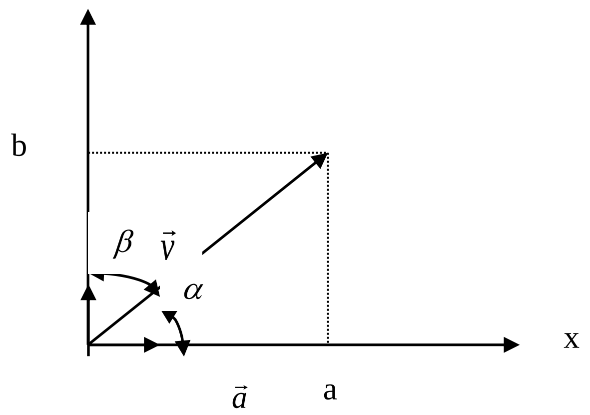
Vectores en el espacio



$|\breve{i}|=1$; $|\breve{j}|=1$; $|\breve{k}|=1$

$\vec{v}=Xp\breve{i}+Yp\breve{j}+Zp\breve{k}$ su módulo se obtiene por el Teorema de Pitágoras en E_3: $|\vec{v}|=\sqrt{Xp^2+Yp^2+Zp^2}$

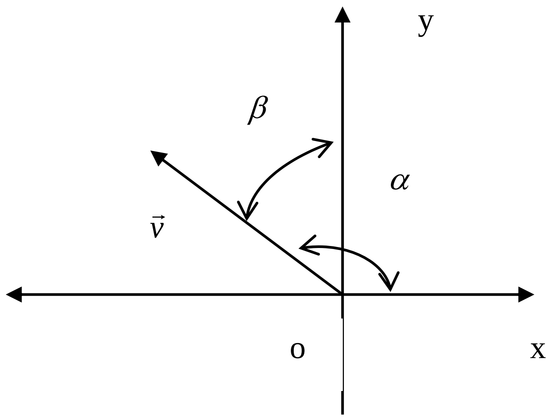
Existe otra forma de conocer un vector:



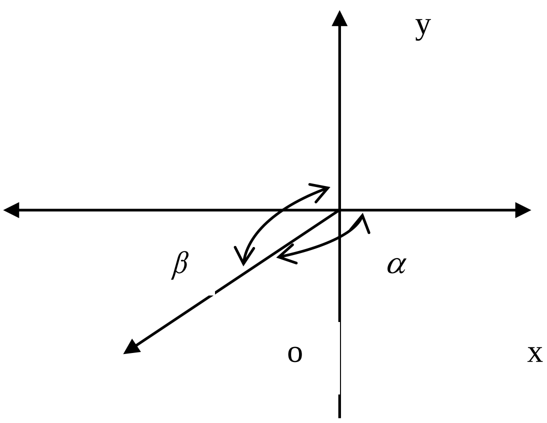
α se mide desde eje "x" positivo
β se mide desde eje "y" positivo

Debe observarse que los ángulos α y β son ***ángulos no orientados***.
Habiendo definido los ángulos α y β, para conocer un vector solo es necesario conocer dichos ángulos y el módulo del vector.

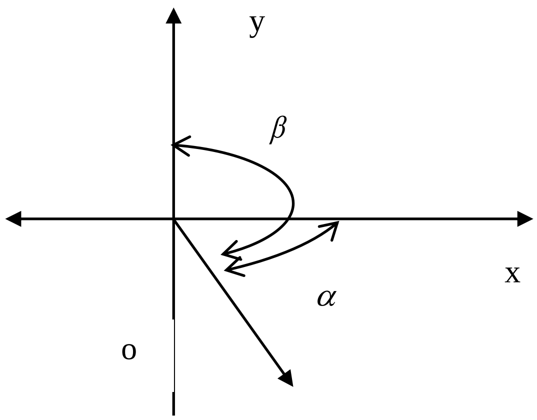
Vectores en el Segundo Cuadrante



Vectores en el Tercer Cuadrante



Vectores en el Cuarto Cuadrante



Por como definimos los ángulos α y β observamos que los mismos varían entre 0º y 180 º lo que implica que los cosenos determinan un único ángulo ya que los ángulos de 0º y 180º tienen diferentes valores del coseno (los valores se repiten de 180º a 360º).

cos $\alpha = \dfrac{a}{\vec{v}} \Rightarrow$ a = cos α $|\breve{v}|$

cos $\beta = \dfrac{b}{\vec{v}} \Rightarrow$ b = cos β $|\breve{v}|$

$$\vec{v} = a\breve{i} + b\breve{j} = |\vec{v}|\cos\alpha\breve{i} + |\vec{v}|\cos\beta\breve{j}$$

A los ángulos α y β se los denomina ángulos directores.
A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores.

Esto trae la ventaja que es posible representar el versor del vector $\vec{v}$ (el vector de módulo unitario que tiene la dirección y sentido del vector $\vec{v}$), de la siguiente forma.

$$\breve{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\breve{v} = \frac{|\vec{v}|\cos\alpha\breve{i} + |\vec{v}|\cos\beta\breve{j}}{|\vec{v}|}$$

$$\breve{v} = \cos\alpha\breve{i} + \cos\beta\breve{j}$$

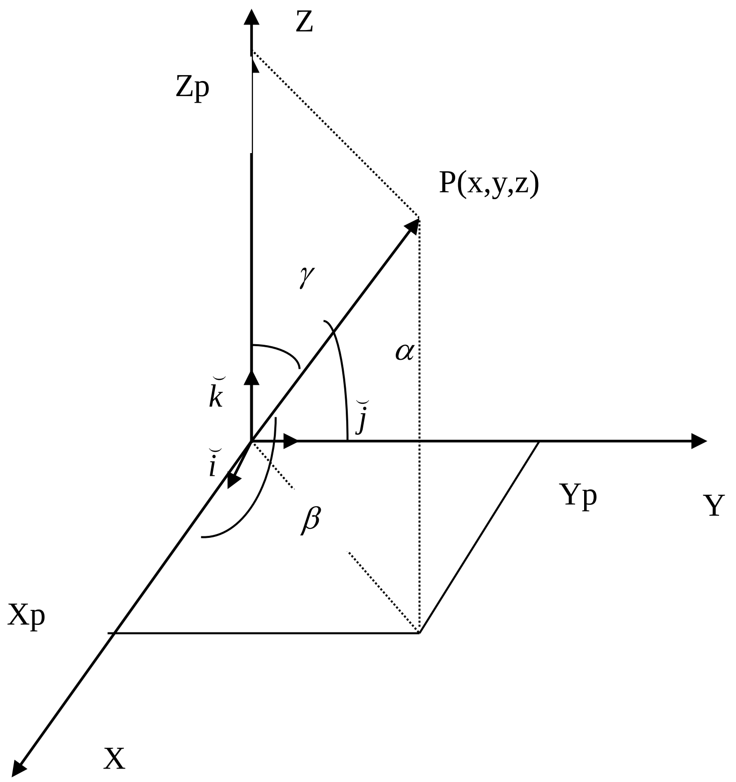
De lo anterior de deduce:

$$|\breve{v}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$$

Sabiendo que el módulo de un versor es 1 entonces tenemos que:
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ y también $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por trigonometría $\therefore$ se deduce que:

$sen^2\alpha = \cos^2 \beta$.
podemos decir que:
$|\breve{v}| = \sqrt{sen^2\alpha + \cos^2 \alpha}$ =1

Generalización a 3 dimensiones



$\breve{v}$ $= |\vec{v}|\cos\alpha\breve{i} + |\vec{v}|\cos\beta\breve{j} + |\vec{v}|\cos\gamma\breve{k}$

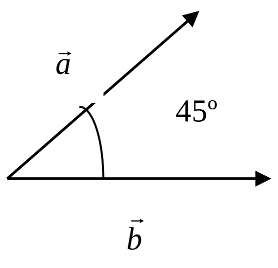
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ =1

Producto escalar de vectores

En los libros, puede ser encontrado como producto externo de vectores (se denomina así debido a que la operación no da como resultado un vector).

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \bullet \cos\left(a\hat{b}\right)$ = es un número

Ej.



$|\vec{a}| = 4$

$|\vec{b}| = 7$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 * 7 * 0.707$ (un número)

El producto escalar entre $\vec{a} y \vec{b}$ será cero cuando:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos 90^o = 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ o ambos son nulos.

El vector nulo es perpendicular a cualquier otro vector.

Propiedades del producto escalar.

1) Es conmutativo

2) Es distributivo respecto de la suma de vectores.

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

3) Es asociativo respecto del producto de números

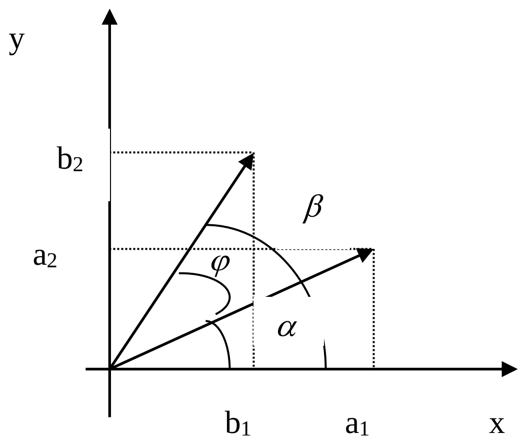
$$k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$$

Si se aplican estas propiedades al producto de dos vectores.

$\vec{a} = a_1 \breve{i} + a_2 \breve{j}$

$\vec{b} = b_1 \breve{i} + b_2 \breve{j}$

se obtiene:



$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\breve{i} + a_2\breve{j})\cdot(b_1\breve{i} + b_2\breve{j}) = a_1b_1\breve{i}\,\breve{i} + \cancel{a_1b_2\breve{i}\breve{j}} + \cancel{a_2b_1\breve{j}\breve{i}} + a_2b_2\breve{j}\breve{j} = a_1b_1 + a_2b_2$

$\breve{i}\cdot\breve{i} = |\breve{i}|\cdot|\breve{i}|\cdot\cos 0^{o} = 1$

$\breve{j}\cdot\breve{j} = |\breve{j}|\cdot|\breve{j}|\cdot\cos 0^{o} = 1$

También puede postularse la definición:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ y llegar a $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$

porque $a_1 = |a|\cos\alpha$ $\quad$ $b_1 = |b|\cos\beta$

$a_2 = |a| sen\alpha$ $\quad$ $b_2 = |b| sen\beta$

$a_1b_1 + a_2b_2 = |a|\cos\alpha\cdot|b|\cos\beta + |a|sen\alpha\cdot|b|sen\beta$

$= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|[\cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta]$

$= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|[\cos(\beta-\alpha) = |a||b|\cos\varphi]$

Ej.

$\vec{v} = 3\breve{i} + 4\breve{j}$

$\vec{w} = 8\breve{i} + 5\breve{j}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 3\cdot 8 + 4\cdot 5 = 24 + 20 = 44$

Esta fórmula es generalizable a 3 dimensiones.

También se puede partir al revés y tener la demostración con teorema para E3.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Obtención del coseno del ángulo que forman los vectores.

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \cos|ab| = a_1b_1 + a_2b_2$

$\cos|ab| = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\cos\gamma = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Esta expresión es también generalizable a 3 dimensiones donde resulta de mucha mayor utilidad, ya que el ángulo en E_3 no es dibujable.

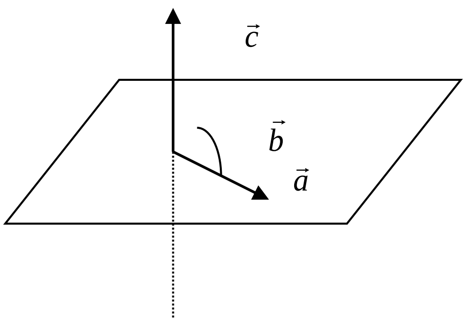
$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos|ab| = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\cos\,\gamma = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Producto vectorial de vectores

En los libros es también denominado producto interno ya que el resultado de esta operación da un vector.

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$



Como es conocido dos vectores que se cortan definen un único plano:

PROPIEDADES:

- La recta de acción del vector producto vectorial de dos vectores será perpendicular al plano que definen dichos vectores.
- El sentido del vector c estará dado por la regla del Tirabuzón.
- Módulo de vector producto vectorial $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|sen(ab)$

PROPIEDADES:

1) No es conmutativo

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$$

2) Asociativa del producto con números

$$k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (k\vec{a})\times\vec{b}$$

3) Distributivo respecto de la suma de vectores.

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

Si los vectores son paralelos $\gamma = 0$ o 180 º

Sen 180º = sen 0º = 0

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

$$\vec{c} = \vec{0}$$

c es el vector nulo

Cálculo del producto vectorial en el espacio tridimensional

$$\vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} + a_3\breve{k}$$
$$\vec{b} = b_1\breve{i} + b_2\breve{j} + b_3\breve{k}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1\breve{i} + a_2\breve{j} + a_3\breve{k}\right) \times \left(b_1\breve{i} + b_2\breve{j} + b_3\breve{k}\right)$$

Aplicando propiedad distributiva, reagrupando y eliminando los términos nulos se obtiene:

$$= a_1b_1\breve{i}x\breve{i} + a_1b_2\breve{i}x\breve{j} + a_1b_3\breve{i}x\breve{j}$$
$$= a_2b_1\breve{j}x\breve{i} + a_2b_2\breve{j}x\breve{j} + a_2b_3\breve{j}x\breve{k}$$
$$= a_3b_1\breve{k}x\breve{i} + a_3b_2\breve{k}x\breve{j} + a_3b_3\breve{k}x\breve{j}$$

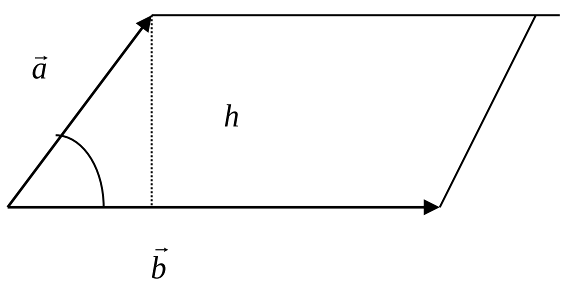
$$\breve{i}x\breve{j} = \breve{k}$$
$$\breve{j}x\breve{i} = -\breve{k}$$
$$\breve{i}x\breve{k} = -\breve{j}$$
$$\breve{k}x\breve{i} = \breve{j}$$
$$\breve{j}x\breve{k} = \breve{i}$$
$$\breve{k}x\breve{j} = -\breve{i}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\breve{k} + (a_1b_3 - a_3b_1) - \breve{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\breve{i}$$

Resolución de producto vectorial por determinantes (simbólico)

$$\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\breve{i} - (a_1b_3 - b_1a_3)\breve{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\breve{k}$$

Interpretación geométrica del producto vectorial



Como sabemos el módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$ es igual a : $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sen(ab)$

Si observamos la figura no es dificil notar que dos vectores cualesquiera forman un paralelogramo cuya altura *h* será igual a :

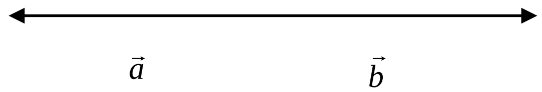
$$sen\gamma = \frac{h}{|a|} \Rightarrow h = |\vec{a}|sen\gamma$$

Si multiplicamos la base que en este caso coincide con el módulo de $|\vec{b}|$, por la altura así obtenida tendremos la superficie del paralelogramo:

S= $|\vec{b}| \cdot h = |\vec{b}||\vec{a}|sen\gamma = |\vec{a}||\vec{b}|sen(ab) = |\vec{c}|$

Como se puede observar entonces es posible calcular la superficie del paralelogramo que forman dos vectores simplemtente calculando en módulo del vector producto vectorial.

Si los vectores son antiparalelos, entonces tendremos que:



$\gamma = 180^{o}$ y S = 0

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sen(180^{o}) = |\vec{a}||\vec{b}|0 = 0$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sen(0^{o}) = |\vec{a}||\vec{b}|0 = 0$$

Si los vectores son paralelos se tiene α = 0º y la superficie es 0.

Producto mixto

Esta operación, involucra a 3 vectores y en la misma intervienen tanto el producto escalar como el vectorial.

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) =$ número

Cálculo del producto mixto

$$\vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} + a_3\breve{k}$$
$$\vec{b} = b_1\breve{i} + b_2\breve{j} + b_3\breve{k}$$
$$\vec{c} = c_1\breve{i} + c_2\breve{j} + c_3\breve{k}$$

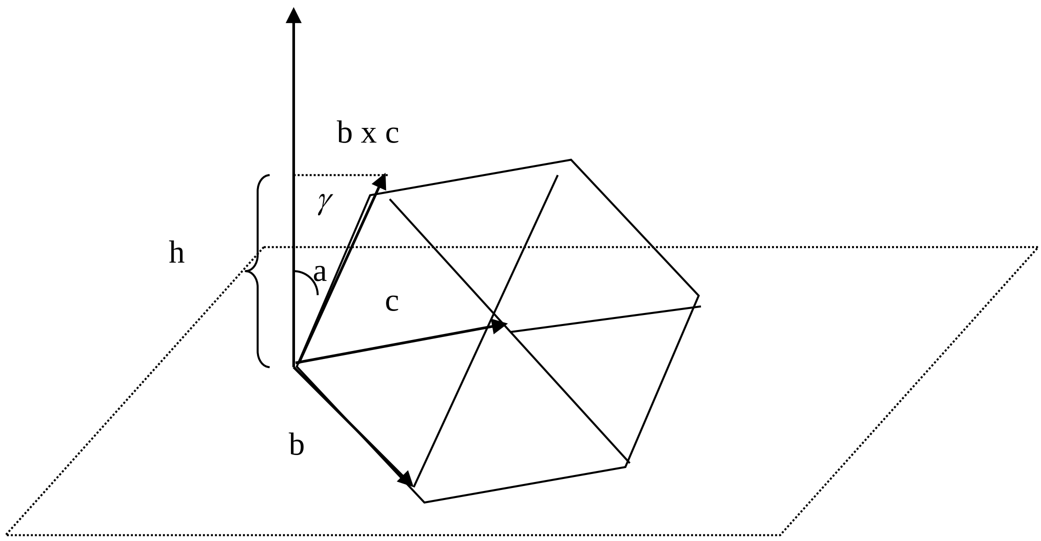
$$\left(a_1\breve{i}+a_2\breve{j}+a_3\breve{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$ por propiedad de determinantes.

En este caso, el producto mixto se calcula a través de un determinante real como se observa.

Propiedad cíclica de los productos mixtos

$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ por propiedades de los determinantes.

Interpretación geométrica del producto mixto



Como ya fue demostrado, sabemos que la superficie S estará dada por $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$.

Por otro lado tenemos:

$$\cos\gamma=\frac{h}{|a|}\Rightarrow h=\cos\gamma|\vec{a}|$$

Si recordamos la forma de obtener un producto escalar.

$$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=|\vec{a}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\left[a\left(\hat{b}\times c\right)\right]$$

Sabemos que el volumen V de la figura será (Paralelepípedo)

V=S.h

de donde

S=$\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|$

h= $|\vec{a}|\cos\gamma = |\vec{a}|\cos\left[a\left(\hat{b}\times c\right)\right]$

De donde deducimos que el volumen de la figura que forman los 3 vectores es igual al producto mixto entre los mismos.

V= $|\vec{a}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\left[a\left(\hat{b}\times c\right)\right]$

Si el volumen de la figura es 0, esto significará que los 3 vectores son coplanares.

V=0 => a,b,c son coplanares.

Por lo tanto tendremos que:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\| = 0$$

Para complementar la lectura de esta breve teoría se sugiere ver en Youtube los siguientes videos explicativos:

- https://www.youtube.com/watch?v=qT0RVfP_n2k
- https://www.youtube.com/watch?v=3pOrrh5pZn0
- https://www.youtube.com/watch?v=6uNCP1P3L-4

Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica