ASIMOV

AÑO

ALG

PARA

SEGUNDA

**LIBRO DE ASIMOV CON TEORIA
Y EJERCICIOS RESUELTOS.
TIENE TODOS LOS TEMAS DE LA
MATERIA HABLADOS
EN CASTELLANO**

2015

EBRA

EL CBC

PARTE

INCLUYE PROBLEMAS
TOMADOS EN PARCIALES

ASIMOV

ALGEBRA

Para el CBC

PARTE 2

* TRANSFORMACIONES LINEALES
* NUMEROS COMPLEJOS
* POLINOMIOS
* AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Álgebra para el CBC, Parte 2
- 2da. edición. – Buenos Aires: Editorial Asimov, 2014

140 p. , 21 x 27 cm.
ISBN: 978-987-23462-1-8

Álgebra para el CBC : parte 2 - 2a ed.
Buenos Aires : Asimov, 2014
v. 2, 140 p. ; 21 x 27 cm.

ISBN 978-987-23462-1- 8

1. Álgebra. I. Título
CDD 512

Fecha de catalogación: 13/03/2007

2da edición. Tirada: 50 ejemplares.
Se terminó de imprimir en Agosto de 2014

OTROS APUNTES ASIMOV

* **EJERCICIOS RESUELTOS DE LA GUIA DE ALGEBRA.**
  Son todos los ejercicios de la guía resueltos y explicados

* **PARCIALES RESUELTOS DE ALGEBRA**
  Son parciales que fueron tomados el año pasado. Hay también de años anteriores. Todos los ejercicios están resueltos.

* **EJERCICIOS RESUELTOS DE LA GUIA DE ANALISIS.**
  Son todos los ejercicios de la guía resueltos y explicados

* **LIBRO ANALISIS PARA EL CBC**
  Tiene la teoría que se da en clase pero explicada en castellano.

* **PARCIALES RESUELTOS DE ANALISIS**
  Son parciales que fueron tomados el año pasado. Hay también de años anteriores. Todos los ejercicios están resueltos.

* **LIBRO FISICA PARA EL CBC**
  Tiene toda la teoría de la materia pero hablada en castellano

¿ Ves algo en este libro que no está bien ?
¿ Hay algo que te parece que habría que cambiar ?
¿ Encontraste algún error ?
¿ Hay algo mal explicado ?

Mandame un mail y lo corrijo.

www.asimov.com.ar

Índice

Pág.

TRANSFORMACIONES LINEALES

Antes que nada quiero advertirte que este tema que estás empezando a ver es largo, pesado, tedioso, engorroso ... pero está bueno ! Masoquismo ? No ! Sólo que con el tiempo vas a ver que es muy práctico: siempre que exista una matriz habrá realmente una Transformación Lineal.
Ahora sí, arranquemos con esa pregunta que me querés hacer:

Y eso de las Transformaciones Lineales... ¿ con qué se come ?!

Empezamos. Una Transformación Lineal es una función (como cualquier otra), pero que cumple ciertos requisitos particulares. Como primer cosa a notar es que tiene como Dominio y Codominio a dos espacios vectoriales $\mathbf{f}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ (o sea, se aplica a vectores pertenecientes a **V**, y produce vectores pertenecientes a **W**), y además debe cumplir con estas propiedades:

I) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

II) $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) \quad \forall\ \lambda \in \mathbf{K}, \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{V}$

En el ítem **II K** simboliza a un <u>cuerpo</u>, que es algo parecido a un espacio vectorial de dimensión igual a 1, pero no te preocupes, λ siempre va a ser un número real, o a lo sumo, un complejo.

Ejemplos de T.L.? Acá van algunos:

- $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ (se llama Identidad)

Cómo sabemos que es una T.L? Simplemente corroborando que cumple con las propiedades de vimos recién. Fijate:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$$

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} = \lambda f(\mathbf{x}) \quad \forall\ \lambda \in \mathbf{K}, \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

Otro ejemplo no tan fácil, de esos que se ven más seguido, y que es mucho más parecido a los que te pueden tomar en los parciales.

- Sea $\mathbf{f} : \mathbf{IR}^2 \rightarrow \mathbf{IR}^2$ dada por: $f(x_1 , x_2) = (0 , x_1)$

Hay que ver que **f** cumpla las propiedades. Como **x**, **y** son vectores de $\mathbf{IR}^2$ los puedo escribir $\mathbf{x} = (x_1 , x_2)$ $\mathbf{y} = (y_1 , y_2)$

Ahora veamos si valen las propiedades:

I) $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{f}(x_1 + y_1 , x_2 + y_2) = (0 , x_1 + y_1) = (0 , x_1) + (0 , y_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y})$
$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

II) $\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\lambda x_1 , \lambda x_2) = (0 , \lambda x_1) = \lambda(0 , x_1) = \lambda\mathbf{f}(x_1 , x_2) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$\forall\ \lambda \in K, \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{V}$
Como llegamos a que cumple con las propiedades, es una T.L.!!

Ahora pasemos a algunos ejemplos más complicados:

- Sea $\mathbf{f}(x_1 , x_2) = (\cos(x_1) , x_2)$

I) $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\cos(x_1 + y_1) , x_2 + y_2) \neq (\cos(x_1) + \cos(y_1) , x_2 + y_2) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y})$

Como una de las propiedades ya no se cumple, entonces <u>f no es una T.L.</u> !!

- Sea $\mathbf{f}(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = 3x_1 + x_2^2 - x_3 + 2x_4$

Ahora probemos con la segunda propiedad en vez de la primera, para practicar con esta también:

II) $\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x}) = 3\lambda x_1 + \lambda^2 x_2^2 - \lambda x_3 + 2\lambda x_4 \neq 3\lambda x_1 + \lambda x_2^2 - \lambda x_3 + 2\lambda x_4 = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x})$

Por lo que esta tampoco es una T.L. !!

De estos ejemplos se empieza a ver por qué es que se llaman **Transformaciones Lineales**: son lineales porque sólo pueden ser funciones lineales de las coordenadas de los vectores que transforman. Si aparecen cosas raras como funciones trigonométricas, o coordenadas elevadas a alguna potencia, entonces ya no corresponde a una T.L.

ALGUNAS PROPIEDADES

Si $\mathbf{f}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una T.L., entonces cumple estas propiedades:

- $\mathbf{f}(0) = 0$.
- $\mathbf{f}(-\mathbf{v}) = -\mathbf{f}(\mathbf{v})\ \ \forall\ v \in V$.
- $\mathbf{f}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) + \mathbf{f}(\mathbf{w})\ \ \ \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$.
- $\mathbf{f}(a_1\mathbf{x_1} + ... + a_n\mathbf{x_n}) = a_1\mathbf{f}(\mathbf{x_1}) + ... + a_n\mathbf{f}(\mathbf{x_n})$ donde $a_i \in K$ y $\mathbf{x_i} \in \mathbf{V}$.
- Si $\mathbf{S}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$ entonces $\mathbf{f}(\mathbf{S})$ es un subespacio de $\mathbf{W}$.
- Si $\mathbf{T}$ es un subespacio de $\mathbf{W}$ entonces $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{T})$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.

Núcleo, Imagen de una Transformación Lineal y otras yerbas

El **núcleo** de una T.L. dada por **f**: **V** → **W**, es el conjunto de los vectores **x** ∈ **V** que cumplen que **f**(**x**) = 0. Lo vas a encontrar como **Nu**(**f**) o Kernel de **f**.

La **imagen** de una T.L. es el conjunto **f**(**x**) o sea, los **w** ∈ **W** para los cuales hay algún **x** ∈ **V** que cumple que **f**(**x**) = **w**. Hay que tener mucho cuidado y no confundir a **W** con **Im**(**f**); **Im**(**f**) siempre es un subespacio de **W**, pero no necesariamente son iguales (aunque varias veces nos vamos a encontrar con que sí).

Algunas cosas para recordar del **núcleo**, **imagen** y etcéteras:

Sea una T.L. dada por **f**: **V** → **W**:

- El **Un** (**f**) es un subespacio de **V**.
- La **Im** (**f**) es un subespacio de **W**.
- Si la dim **V** = n ⇒ n ≥ dim **Im**(**f**)
- Si la dim **V** = n ⇒ n ≥ dim **Nu**(**f**)
- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ generan a **V** ⇒ $\{\mathbf{f}(v_1), \mathbf{f}(v_2), \dots, \mathbf{f}(v_n)\}$ generan a **Im**(**f**).

Algo útil de saber es que se define como **nulidad** a la dim **Nu**(**f**) y como **rango** a la dim **Im**(**f**).

Y por último, un teorema que hay que aprender a querer, y después a usar:

TEOREMA (de la dimensión)

Sea **f**: **V** → **W** una T.L. Si la dim**V** es finita se cumple que

dim**V** = **rango**(**f**) + **nulidad**(**f**)

Ahora que contamos con ciertas armas podemos enfrentarnos a algunos ejemplos prácticos.

Calcular las **imágenes** y los **núcleos** de las T.L. no es tan difícil como parece. Veamos un ejemplo particular de este cálculo:

- Sea **f** : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la T.L. dada por $\mathbf{f}(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, 0, v_1 - v_2)$

Para encontrar el **núcleo** quiero buscar que

$$\mathbf{f}(v_1 , v_2) = (0 , 0 , 0)$$
$$(v_1 + v_2 , 0 , v_1 - v_2) = (0 , 0 , 0)$$

Y como dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes son iguales entre sí, entonces tengo:

$$v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$$
$$0 = 0$$
$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow -v_2 - v_2 = 0 \Rightarrow -2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

Entonces para que $\mathbf{f}(v_1 , v_2) = (0 , 0 , 0)$ encontramos que $(v_1 , v_2) = (0 , 0)$
Y como quería calcular el **núcleo**, tengo que $\mathbf{Nu(f)} = \{(0 , 0)\}$

Ya vimos cómo se calcula el **núcleo**, ahora ¿ cómo veo si algo está en la **imagen**? Veámoslo con otro ejemplito:

- Sea $\mathbf{f} : \mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}^2$ tal que $\mathbf{f}(x_1 , x_2) = (2 x_1 - x_2 , - 8 x_1 + 4 x_2)$, entonces, $(1 , -4) \in \mathrm{Im(f)}$?

Para responder la pregunta, tendremos que ver si existe algún vector **x** para el que se cumpla que $\mathbf{f(x)} = (1 , - 4)$. ¿ Cómo lo buscamos ? Parece muy difícil, pero en realidad busco $\mathbf{x} = (x_1 , x_2)$ que cumpla:

$$\mathbf{f}(x_1 , x_2) = (1 , - 4) \quad \Rightarrow \quad (2 x_1 - x_2 , - 8 x_1 + 4 x_2) = (1 , - 4)$$

Ahora podremos plantear:

$$\begin{cases} 2 x_1 - x_2 = 1 \\ - 8 x_1 + 4 x_2 = - 4 \end{cases}$$

Sólo me interesa que haya solución así que veo si este sistema que planteamos es compatible.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -8 & 4 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Me queda la ecuación: $2x_1 - x_2 = 1$. Y de ahí me doy cuenta que puedo obtener infinitas soluciones. Lo que me preguntaba era si $(1 , -4) \in \mathbf{Im(f)}$ y como encontré "al menos una" solución entonces es verdad que $(1 , -4) \in \mathbf{Im(f)}$.

- Definir, si es posible, una T.L. $\mathbf{f}: \mathbf{IR}^4 \to \mathbf{IR}^4$ que verifique simultáneamente:

$$\mathbf{Nu(f) + Im(f) = S}$$

$(2,0,1,0) \in \mathbf{Nu(f)}$ y $(2,0,1,0) \notin \mathbf{Im(f)}$
$(0,1,1,2) \notin \mathbf{Nu(f)}$ y $(0,1,1,2) \in \mathbf{Im(f)}$

Ah !! Se ve muy feo, No? ¿ Cómo hacemos para que se cumpla TODO ESO al mismo tiempo?!?!?! A no desesperarse ! No es tan complicado, fijate:
Viendo la forma de los vectores que nos dan en el enuciado, llegamos a:

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^4 / x_1 = -x_4 + 2x_3 \} = \{ \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^4 / \mathbf{x} = (-x_4 + 2x_3 , x_2 , x_3 , x_4) \}$$

Entonces, una base de **S** sería = { (2, 0 , 1 ,0) , (0 , 1 , 1 , 2) , (-1 , 0 , 0 , 1) }
Una de las condiciones que nos imponen es:

$$(2,0,1,0) \in \mathbf{Nu(f)} \Rightarrow \mathbf{f}(2,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

Por otro lado, nos piden:

$$(0,1,1,2) \in \mathbf{Im(f)} \Rightarrow \exists\, \mathbf{v} / \mathbf{f(v)} = (0,1,1,2)$$

Supongamos que

$$(-1,0,0,1) \in \mathbf{Nu(f)} \Rightarrow \mathbf{f}(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\text{y a su vez } (-1,0,0,1) \in \mathbf{Im(f)} \Rightarrow \exists\, \mathbf{u} / \mathbf{f(u)} = (-1,0,0,1)$$

Entonces podemos definir a **f** de manera tal que:

$$\mathbf{Nu(f)} = gen\{ (2,0,1,0) , (-1,0,0,1) \}$$
pues asumo que $(0,1,1,2) \notin \mathbf{Nu(f)}$

$$\mathbf{Im(f)} = gen\{ (0,1,1,2) , (-1,0,0,1) \}$$
pues asumo que $(2,0,1,0) \notin \mathbf{Im(f)}$

Por lo tanto, tomando el conjunto de vectores (que forman una base de IR^4)

$$\{ (2,0,1,0) ; (-1,0,0,1) ; (0,1,0,0) ; (0,0,0,1) \}$$

Y definiendo:

$$\mathbf{f}(2,0,1,0) = (0,0,0,0)$$
$$\mathbf{f}(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$
$$\mathbf{f}(0,1,0,0) = (-1,0,0,1)$$
$$\mathbf{f}(0,0,0,1) = (2,0,1,0)$$

Obtenemos una definición unívoca de **f**. Además podemos ver que:

$$\mathbf{Nu(f)} + \mathbf{Im(f)} = gen\{ (2,0,1,0) , (-1,0,0,1) , (0,1,1,2) \}$$

$$= \text{gen}\{ (2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) \} = \mathbf{S}$$

Como pedía el enunciado !!!

Tipos de T.L.

A veces las T.L. se pueden caracterizar de las siguientes formas:

- <u>Monomorfismo</u>: cuando la T.L. es inyectiva, lo cual significa que si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.
- <u>Epimorfismo</u>: cuando la T.L. es suryectiva, es decir que $\forall\ \mathbf{w} \in W$ existe algún $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
- <u>Isomorfismo</u>: cuando la T.L. es a la vez un monomorfismo y un epimorfismo. Es el equivalente de decir que una función es biyectiva (suryectiva e inyectiva a la vez).

Probar que un T.L. es un monomorfismo parece medio feo, pero usando la definición se simplifica bastante.

Si queremos saber si una T.L. es un monomorfismo entonces vemos si dos vectores distintos pueden tener el mismo elemento en la **imagen** (si esto ocurriera, sería porque no se trata de un monomorfismo, se entiende?)
Veamos entonces,

$$\text{Si } \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) \text{ entonces } \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Al primer miembro lo podemos escribir de otra manera:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0$$

y como es una T.L. vale que

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0 \text{ y } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Entonces lo que realmente vamos a comprobar es que $\mathbf{f}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$ sólo sucede cuando $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Otra consecuencia importante de lo que estuvimos viendo es la siguiente:

> Si tengo una T.L. $\mathbf{f}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ que es un monomorfismo, y además $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{W}$, resulta que $\mathbf{Im}(\mathbf{f}) = \mathbf{W}$.

Dado que **f** es un monomorfismo, y sabiendo que **f(0) = 0** para todas las T.L. , ya sabemos que **Nu(f) = 0**. Entonces, por el teorema de la dimensión, tengo que dim**V** = dim **Im** (**f**). Pero **Im**(**f**) es un subespacio de **W**, y dim**W** = dim**V** = dim**Im**(**f**). Esto significa que la **imagen** de **f** es igual a **W**. De esto se desprende que **f** es un epimorfismo.

Un ejemplito corto, para aclarar (y no oscurecer, esperemos !):

Sea **f**: **V** $\rightarrow$ **W** dada por **f**$(v_1 , v_2) = (v_1 + v_2 , v_1 - v_2)$. Lo primero que tenemos que notar es que tanto **V** como **W** son de dimensión 2. Ahora resolvamos para ver cuál es el **núcleo** de **f**, haciendo **f**(**v**) = 0.

$$(v_1 + v_2 , v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

Con lo que el **Nu**(**f**) = 0, y de acuerdo al teorema de la dimensión, y a las propiedades que vimos, **Im**(**f**) = **W**.

Sacamos que la T.L. era un epimorfismo sabiendo muy poco y sin hacer cuentas. Esto se usa en muchos ejercicios.
Si hubiese tenido que dim **V** < dim **W** y la T.L. sigue siendo un monomorfismo, entonces usando lo de arriba, sabemos que la T.L. no puede ser nunca un epimorfismo (porque el Rango de **f** es siempre menor que la dimensión de **W**).
Acá vienen algunas propiedades nuevas que generalizan estas ideas.

PROPIEDADES

Si **f** es una T.L.

- **f**: **V** $\rightarrow$ **W** es un monomorfismo es lo mismo que decir que **Nu**(**f**) = 0
- Si $\{f(v_1) , f(v_2) , \ldots , f(v_n)\}$ es un conjunto L.I. $\Rightarrow \{v_1 , v_2 , \ldots , v_n\}$ es L.I.
- Si **f** es un monomorfismo y $\{v_1 , v_2 , \ldots , v_n\}$ es L.I. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(v_1) , f(v_2) , \ldots , f(v_n)\}$ es L.I.

- Si **f** es un isomorfismo y $\{v_1 , v_2 , \ldots , v_n\}$ es base de **V** $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(v_1) , f(v_2) , \ldots , f(v_n)\}$ es base de W.

- Si **f** es un monomorfismo y $\{v_1 , v_2 , \ldots , v_n\}$ es base de **V** $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(v_1) , f(v_2) , \ldots , f(v_n)\}$ es base de **Im**(**f**).

La diferencia entre los últimos dos puntos es que cuando **f** es un isomorfismo la **imagen** es **W** y por eso es base de **W**. En cambio, como **Im**(**f**) no es igual a **W**, sólo resulta en una base de **Im**(**f**).

Todo muy lindo, pero... ¿ qué pasa si sólo me dan lo que vale una T.L. para una base ?
<u>Rta</u>: Si tengo lo que una T.L. vale en una base, y como a los vectores los puedo escribir como combinaciones lineales de la base, al final voy a poder aplicar la T.L. a cualquier vector. Para que quede más claro acá va un ejemplo:

Sea $\mathbf{f} : \mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$ una T.L. que cumple

$$\mathbf{f}(1 , 0 , 0) = (0 , 3 , 1)$$
$$\mathbf{f}(0 , 1 , 0) = (0 , 0 , 3)$$
$$\mathbf{f}(0 , 0 , 1) = (1 , 0 , 0)$$

Entonces tengo lo que vale la T.L. en una base de $\mathbf{IR}^3$.

Si quiero ver lo que vale en cualquier $\mathbf{v} = (v_1 , v_2 , v_3) \in \mathbf{IR}^3$, lo pienso así:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(v_1(1 , 0 , 0) + v_2(0 , 1 , 0) + v_3(0 , 0 , 1)) =$$

$$= v_1\mathbf{f}(1 , 0 , 0) + v_2\mathbf{f}(0 , 1 , 0) + v_3\mathbf{f}(0 , 0 , 1)$$

Esto lo puedo hacer porque **f** es una T.L. Reemplazando **f** de cada uno de los vectores de la base obtengo lo siguiente:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = v_1(0 , 3 , 1) + v_2(0 , 0 , 3) + v_3(1 , 0 , 0) = (v_3 , 3v_1 , v_1 +3 v_2)$$

Y llegamos a la fórmula original de la T.L. !!!

Esto se puede hacer con cualquier T.L. ($\mathbf{f}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$) de la cual nos den su valor para una base de **V** (y es importante también darse cuenta de que la T.L. aplicada a esa base devuelve una base de **Im(f)**, la cual no necesariamente es una base de **W**).
Así llegamos a este ...

TEOREMA

Si $\{\mathbf{v_1} , \mathbf{v_2} , \dots , \mathbf{v_n}\}$ es base de **V** y $\{\mathbf{w_1} , \mathbf{w_2} , \dots , \mathbf{w_n}\}$ vectores de **W** (no tienen por qué ser L.I., ni siquiera tienen que ser distintos). Hay una (y solamente una) T.L. $\mathbf{f}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ que cumple que

$$\mathbf{f}(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w_1} , \mathbf{f}(\mathbf{v_2}) = \mathbf{w_2} , \dots , \mathbf{f}(\mathbf{v_n}) = \mathbf{w_n}$$

Lo más importante para saber aplicar este teorema, es que los vectores de **V** sobre los cuales estemos trabajando sean linealmente independientes. Si no lo son, entonces no estamos trabajando con una base, y puede que todo el desarrollo no tenga valor y es probable que sea imposible terminar el cálculo.

A veces es difícil obtener una fórmula explícita de una T.L. Por ejemplo, si tuviésemos una T.L. dada por:

$$\mathbf{f}(2\ ,\ 1) = (0\ ,\ 3)$$
$$\mathbf{f}(1\ ,\ 2) = (1\ ,\ 1)$$

Los vectores (2 , 1) y (1 , 2) son linealmente independientes, pero ahora, se complica bastante para obtener una fórmula de la T.L...
Lo que tenemos que hacer es buscar una forma de escribir cualquier vector del espacio **V** en la base de la cual tenemos el valor de **f**. A ver...

Antes que nada vamos a tener que escribir al vector general $\mathbf{v} = (v_1\ ,\ v_2)$ en la base $\{(2\ ,\ 1)\ ;\ (1\ ,\ 2)\}$:

$$\mathbf{v} = (v_1\ ,\ v_2) = a\ (2\ ,\ 1) + b\ (1\ ,\ 2)$$

$$v_1 = 2a + b \quad \Rightarrow \quad b = v_1 - 2a \quad \Rightarrow \quad b = 2/3\ v_2 - 1/3\ v_1$$
$$v_2 = a + 2b \quad \Rightarrow \quad a = v_2 - 2b \quad \Rightarrow \quad a = 2/3\ v_1 - 1/3\ v_2$$

Y ahora aplicamos **f** a **v** escrito de esta forma:

$$\begin{aligned} f(v) &= f[\ (2/3\ v_1 - 1/3\ v_2)(2\ ,\ 1) + (2/3\ v_2 - 1/3\ v_1)(1\ ,\ 2)\ ] \\ &= (2/3\ v_1 - 1/3\ v_2)\ f(2\ ,\ 1) + (2/3\ v_2 - 1/3\ v_1)\ f(1\ ,\ 2) \\ &= (2/3\ v_1 - 1/3\ v_2)\ (0\ ,\ 3) + (2/3\ v_2 - 1/3\ v_1)\ (1\ ,\ 1) \\ &= (0\ ,\ 2v_1 - v_2) + (2/3\ v_2 - 1/3\ v_1\ ,\ 2/3\ v_2 - 1/3\ v_1) \\ &= (2/3\ v_2 - 1/3\ v_1,\ 5/3\ v_1 - 1/3\ v_2) \end{aligned}$$

Y ya tenemos la forma general de esta T.L.:

$$f(v_1\ ,\ v_2) = (2/3\ v_2 - 1/3\ v_1,\ 5/3\ v_1 - 1/3\ v_2)$$

Con las siguientes propiedades podemos seguir averiguando cosas útiles de las T.L. con las que nos encontremos, sin sumergirnos en toneladas de cuentas:

Sea **f**: **V** $\rightarrow$ **W**

- Si **f** es un <u>monomorfismo</u> se cumple que dim **W** $\geq$ dim **V**
- Si **f** es un <u>epimorfismo</u> se cumple que dim **V** $\geq$ dim **W**
- Si **f** es un <u>isomorfismo</u> se cumple que dim **V** = dim **W**
- Si dim**V** = dim **W** entonces es equivalente decir que **f** es un <u>epimorfismo</u>, un <u>isomorfismo</u> o un <u>monomorfismo</u> (si vale una valen todas)

Veamos un ejemplito simple, como para entender qué se supone que tenemos que poder hacer con estas propiedades:

Tengo una T.L. **f**: $\mathbf{IR}^4 \rightarrow \mathbf{IR}^3$ **¿ Puede f ser un monomorfismo ?**

Si **f** es un monomorfismo, de las propiedades se desprende que:
Dim **W** ≥ dim **V**. Pero dim **V** = 4 y dim **W** = 3. Entonces **f** no puede ser nunca un monomorfismo.

Composición de Transformaciones Lineales

Ahora, si además de **f**: **V** → **W**, tenemos otra T.L., por ejemplo, **g**: **U** → **S**, podemos combinarlas para hacer una **Transformación Lineal Compuesta**. Tendríamos:

gof : **V** → **S** y **fog** : **U** → **W**

Decir **fog**(**v**) es lo mismo que **f**(**g**(**v**)) igual vale para **gof**(**v**) ≈ **g**(**f**(**v**)). Tené cuidado porque no siempre son posibles de hacer, necesitamos que los espacios involucrados cumplan con ciertas condiciones. ¿ Cuáles son ? Rta: Estas:

- Si **Im**(**g**) ⊆ **V**, entonces podemos construir **fog** : **U** → **W**
- Si en cambio, **Im**(**f**) ⊆ **U**, entonces podemos construir **gof** : **V** → **S**

Acá va un ejemplo:

Sea **f**: $\mathbf{IR}^2 \rightarrow \mathbf{IR}^2$ y **g**: $\mathbf{IR}^2 \rightarrow \mathbf{IR}^2$

$$\mathbf{f}(x_1 , x_2) = (2x_1 , x_2)$$
$$\mathbf{g}(x_1 , x_2) = (2x_1 - x_2 , x_1 + x_2)$$

Si calculo **fog** hago

$$(\mathbf{fog})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(2x_1 - x_2 , x_1 + x_2)$$

Lo que hago ahora es hacer la cuenta de **f** usando a $(2x_1 - x_2)$ como la primer coordenada y a $(x_1 + x_2)$ como la segunda.

$$f (2x_1 - x_2 , x_1 + x_2) = (2 (2x_1 - x_2) , x_1 + x_2) =$$
$$= (4x_1 - 2x_2 , x_1 + x_2)$$

Entonces $(\mathbf{fog})(\mathbf{x}) = (4x_1 - 2x_2 , x_1 + x_2)$

Y ahora algunas propiedades de las T.L. y sus composiciones, para ayudarnos en el futuro.

Si tengo dos T.L. **f**: **V** $\to$ **W** y **g**: **W** $\to$ **U** entonces se cumple:

- **gof**: **V** $\to$ **U** es una T.L.
- Si **f** es un isomorfismo entonces hay una T.L. $\mathbf{f}^{-1}$: **W** $\to$ **V** (que es la inversa de **f**) y es un isomorfismo.
- Si **f** y **g** son isomorfismos entonces **gof** es un isomorfismo y va a valer que $(\mathbf{gof})^{-1} = \mathbf{f}^{-1}\mathbf{o}\mathbf{g}^{-1}$

Olvidemos un rato la composición de T.L. y veamos estos ejemplos de T.L.

- $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$
- $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = 5\mathbf{v}$
- $\mathbf{f}(x_1 , x_2) = (0 , x_1)$
- $\mathbf{f}(v_1 , v_2) = (v_1 + v_2 ,\ 0 , v_1 - v_2)$
- $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = (v_3 , 3v_1 , v_1 + 3v_2)$

Para todas estas T.L., las imágenes se obtienen haciendo cuentas (como sumas, restas y multiplicaciones por números) con cada una de las coordenadas de los vectores . Esto lo van a cumplir todas las T.L. Pero también existe un método para describir las T.L. que es más compacto y menos propenso a errores (una vez que se aprende bien a manejarse así!!!). Se pueden escribir las transformaciones como multiplicación de un vector por una matriz, para encontrar el resultado. Hagámoslo con cada ejemplo de los que copiamos:

- $f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
- $f(v) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 \\ 5v_2 \end{pmatrix}$
- $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$
- $f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 0 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}$
- $f(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 3v_1 \\ v_1 + 3v_2 \end{pmatrix}$

Como se ve en el cuarto punto, no se necesita que la matriz sea cuadrada, lo que sí tiene que pasar es que se pueda hacer la multiplicación entre la matriz y el vector.

(La cantidad de columnas de la matriz tiene que ser igual al número de filas del vector)

Ahora lo que realmente vamos a querer saber es cómo hacemos para obtener esa matriz en casos más complicados, para esto, tenemos el próximo teorema que asegura que siempre encontraremos una matriz que nos sirva, como las de arriba.

TEOREMA

Muy Importante

Para cualquier T.L. Sea **f**: $IR^n \rightarrow IR^m$ hay una matriz **A** $\in IR^{m x n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y entonces podemos escribir a la T.L. como **f**(**v**) = A**v**.

Y ahora vamos a ver que la dimensión de la imagen de la T.L. es igual al rango de **A** (cosa que vamos a comprobar un poco mejor más adelante):

Rg **A** = dim **Im** (**f**)

A esta matriz la voy a llamar la matriz de la T.L. y la armo poniendo en cada columna la imagen de los vectores de la base canónica.
A lo mejor con algunos ejemplos se entiende un poco más qué es la dim **Im**(**f**). De paso saco el **núcleo** de la T.L. !

f: $IR^3 \rightarrow IR^3$

f(x , y , z) = (x + y + z , 2x - y , 3x + z)

Aplicando f a la base canónica:

f(1 , 0 , 0) = (1 , 2 , 3)
f(0 , 1 , 0) = (1 , -1 , 0)
f(0 , 0 , 1) = (1 , 0 , 1)

Escribamos la matriz de la T.L. armándola colocando cada vector que acabamos de encontrar como columna .

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Para calcular el **núcleo** igualamos el sistema a cero, y resolvemos el sistema homogéneo, para lo cual usamos todo lo que sabemos de temas anteriores:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Acá se pueden sacar las soluciones de las ecuaciones a mano, pero muchas veces es mejor resolver el sistema <u>triangulando por Gauss</u>.

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\2&-1&0&0\\3&0&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&-3&-2&0\\0&-3&-2&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&-3&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ya tenemos triangulada la matriz así que logramos una expresión del **núcleo** de la T.L. a partir de:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x = - y - z$$

$$-3y - 2z = 0 \Rightarrow - 2z = 3y \Rightarrow z = -3/2\, y$$

con la segunda ecuación reemplazamos en la primera y queda,

$$x = - y + 3/2\, y \;\rightarrow\; x = \tfrac{1}{2}\, y$$

además teníamos que $z = -3/2\, y$

Al final me queda que Nu(f) = ($\frac{1}{2}$ y , y , -3/2 y) = y($\frac{1}{2}$, 1 , -3/2)

Como "y" puede valer cualquier número,tengo que Nu(f) = ($\frac{1}{2}$, 1 , -3/2). (o sea cualquier múltiplo de ese vector)

Lo otro que estábamos por calcular era la dim **Im** (**f**). Pero en la cuenta que hicimos antes para el **núcleo**, sin querer sacamos el **rango** de la matriz ! Y como dim **Im**(**f**) es lo mismo que el **rango** de la matriz, tenemos:

Dim **Im** (**f**) = 2

La ventaja de expresar en forma matricial a las transformaciones lineales, es que facilitan mucho la mayoría de las cuentas, y organizan mucho mejor los datos para tenerlos de forma más clara. En este ejemplo lo que hicimos fue resolver sistemas de ecuaciones. Encontrar el **núcleo** de la T.L. es como resolver el sistema homogéneo **A.X** = 0 siendo **A** la matriz de la T.L.

Ya que la tenés más clara, te paso este ejercicio que engloba muuuuuuuucho de que hablamos hasta ahora:

Sea f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$

1) Es una T.L.?
2) Encontrar la matriz de la transformación.
3) Hallar una base del **núcleo** y una de la **imagen** de esta transformación.
4) Cuál es la dimensión del **Nu(f)**? Y la de la **Im(f)**? O sea, encontrar **nulidad** y **rango**.
5) El vector (1 , 0 , 0) pertenece a **Im(f)**?

1) Primero veamos que efectivamente es una T.L. Recordá que para hacerlo verificamos las propiedades que la definen:

I) $$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathbf{f}(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = \\ &= (3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2), 2(x_1+y_1) + 2(x_2+y_2), (x_2+y_2) - (x_3+y_3)) = \\ &= (3x_1 - 2x_2 + 3y_1 - 2y_2, 2x_1 + 2x_2 + 2y_1 + 2y_2, x_2 - x_3 + y_2 - y_3) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}\end{aligned}$$

II) $$\begin{aligned}\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda(3x_1 - 2x_2), \lambda(2x_1 + 2x_2), \lambda(x_2 - x_3)) = \\ &= \lambda(3x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, x_2 - x_3) \\ &= \lambda\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}) \ \forall\, \lambda \in \mathbf{K}, \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}\end{aligned}$$

Concluimos entonces que sí es una T.L porque efectivamente cumple con las propiedades.

2) Para hallar la matriz de la transformación deberemos escribirla buscando primero la imagen de la función aplicada a la base canónica:

$\mathbf{f}(1, 0, 0) = (3, 2, 0)$

$\mathbf{f}(0, 1, 0) = (-2, 2, 1)$

$\mathbf{f}(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$

Así que nuestra matriz de transformación sería:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Empecemos por el **Nu (f)**, recordá que por definición: **Nu (f)** es el conjunto de los vectores $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ que cumplen que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. Si replanteamos $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Entonces podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Las cuentas te las dejo a vos, sólo te digo que llegás a que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
Entonces:

$\mathbf{Nu}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3 / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow$ la dim **Un (f)** = 0

Para hallar la base de la **Im (f)**, usamos 2), ya que en ese inciso aplicamos la Transformación a la base canónica, por lo que:

$\mathbf{Im}(\mathbf{f}) = \{(3, 2, 0) ; (-2, 2, 1) ; (0, 0, -1)\} \Rightarrow$ la dim **Im** = 3

4) $\mathbf{Nu}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^3 / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow$ la $\boxed{\text{dim } \mathbf{Nu} = 0}$

Corroboremos si es correcto a lo que hemos llegado respecto de las dimensiones:
Sabemos que dim**V** = 3, y por el Teorema de la dimensión:

Dim **V** = dim **Nu** + dim **Im** $\Rightarrow$ 3 = 0 + 3 perfecto ! Todo concuerda !

5) Esta parte es fácil: Dado que el **Nu (f)** = 0, entonces todos los vectores distintos de 0 (incluido este, por supuesto) pertenecen a **Im**(**f**), y listo !

Pero para practicar, veamos que es lo que haríamos de no saber que el **núcleo** de **f** sólo contiene al vector nulo.
Sea un vector **x** para el cual $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, 0, 0)$, entonces:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, x_2 - x_3) = (1, 0, 0)$$

$$3x_1 - 2x_2 = 1$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que el sistema queda resuelto para $(x_1 , x_2 , x_3) = (1/5 , -1/5 , -1/5)$, o sea, encontramos el **x** para el cual **f**(**x**) = (1 , 0 , 0), con lo que (1 , 0 , 0) pertenece a **Im** (**f**) !!!

Sigamos ahora con nuevos conceptos. Fijate esta propiedad:

Si **A** $\in IR^{mxn}$ y S $\subseteq IR^n$ es el subespacio de soluciones del sistema **AX** = 0, entonces **S** = **Nu**(**f**) si **f** es la T.L. que hace **f**(**x**) = A**x**.

Lo que esta propiedad nos dice es justamente que si **A** es la matriz que caracteriza a la T.L. **f**, entonces el conjunto **S** de soluciones del sistema homogéneo **AX** = 0, es el **Nu**(**f**). Si te fijás bien es justamente lo que estuvimos haciendo en los ejemplos anteriores cuando calculábamos el **núcleo**.

TEOREMA

Si **A** $\in IR^{mxn}$, entonces la dimensión del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones **AX** = 0 es "n - rg**A**"

Este teorema es una consecuencia del teorema de la dimensión, y de la propiedad de arriba. Todas estas propiedades y teoremas se desprenden unos de otros, es por eso que es útil saberlo, y por lo que es bueno aprenderlos (además de que algunos son importantísimos para poder resolver varios problemas).

Volvamos a la composición de T.L. Miremos qué pasa con sus matrices.

Sean **f**: $\mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}^2$ y **g**: $\mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}^2$ T.L. con las matrices:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Encontrar la matriz de la composición M(**fog**).

Acordate que $f(x,y) = M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y lo mismo para **g**. Entonces

(fog)(x , y) = f(g(x , y))

$$= f\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 7\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de la composición queda:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 9\end{pmatrix}$$ que es hacer M(**f**) M(**g**)

Esto es algo que se usa bastante, así que a prestar atención ! Siempre para la composición de T.L. se multiplican las matrices de cada una en el orden en que se haga la composición.

M(**fog**)= M(**f**)M(**g**)

Con las T.L. escritas como matrices hay muchas cosas que son re fáciles de calcular, qué bueno, no?

Para calcular el **rango** y la **nulidad** de **f**, ahora es mucho más simple, dado que dim **Im**(f) = rg(M(**f**)), donde M(**f**) es la matriz de la T.L.

Y usando el teorema de la dimensión se calcula cuánto vale dim **Nu**(**f**). Así de rápido, también se puede averiguar si una T.L. es un <u>epimorfismo</u>, un <u>monomorfismo</u> o un <u>isomorfismo</u>.

Si tengo que f: $\mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$

f(x_1 , x_2 , x_3) = (x_1 - x_2 , x_1 + x_3 , x_1 + x_2 + 2x_3)

Armo la matriz de la T.L. (acordate que era aplicar la transformación a la base canónica y escribir los vectores de la imagen obtenida en columnas)

$$M(f) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Y ahora triangulo la matriz para ver cuál es el rango

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 2 & 2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Entonces el rg(M(**f**)) = 2 así que dim **Im** (**f**) = 2.

Por el teorema de la dimensión me queda que dim **Nu** (**f**) = 3 – 2 = 1. Con esto puedo decir que la T.L. no es un monomorfismo ni un epimorfismo (entonces tampoco es un isomorfismo).

Por ahora siempre las T.L. estaban escritas en la base canónica, pero podría pasar que me la den en otra base, y ahora nos metemos en otro lío, que son los cambios de base. Ahora realmente hay que prestar atención, el cambio de base es un tema complicado, pero por enredado, no por difícil.

TEOREMA

Sean **V**, **W** dos espacios vectoriales con dim**V** = n y dim**W** = m
Tenemos **B** = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ... , $\mathbf{v_n}$} base de **V**
B´ = {$\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, ... , $\mathbf{w_m}$} base de **W**
Para cualquier T.L. **f**: **V** $\rightarrow$ **W** se puede escribir $\mathbf{f(v_i)} = a_{1i}\mathbf{w_1} + a_{2i}\mathbf{w_2} + \ldots + a_{mi}\mathbf{w_m}$
Y vamos a decir que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la matriz de **f** en las bases **B**, **B'**

Las columnas de la matriz son los coeficientes de $\mathbf{f(v_i)}$ en la base **B'**. Cuando las bases **B**, **B'** son las mismas, llamamos $M_B(\mathbf{f})$ a la matriz de la T.L.

Si una T.L. es un isomorfismo, lo va a seguir siendo aunque cambie de base. Lo mismo con epimorfismo y monomorfismo. Para todos los teoremas de antes no nos importaba la base de la T.L., tampoco para calcular las dimensiones del **núcleo** ni de la **imagen**. Lo que sí cambia con la base es la matriz.

Sea una T.L. **f**: $\mathbf{IR^3} \rightarrow \mathbf{IR^3}$, donde la matriz de la transformación en las bases **B**, **B'** es:

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Es **f** un isomorfismo ?

Para verlo hacemos lo mismo que antes y no nos preocupamos por el hecho que esté en otra base.

Calculemos el **rango** de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -17 & 18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -17 & 18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix}$$

La matriz $M_{BB'}$(**f**) tiene **rango** = 3 así que dim **Im** = 3 y dim **Nu** = 0. Entonces la T.L. es un isomorfismo !!!

A veces nos dan la T.L. escrita en una base **B** = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$} y piden que calculemos cosas, pero sin darnos la forma explícita de los vectores de la base. Por ejemplo:

Sea **B** base como arriba y una T.L. **f**: **V** $\rightarrow$ **V** con una matriz correspondiente,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- **f**(2$\mathbf{v_1}$)
- **f**(- $\mathbf{v_1}$ - $\mathbf{v_2}$)

Como **f** es una T.L. , cumple que **f**(2$\mathbf{v_1}$) = 2**f**($\mathbf{v_1}$) entonces lo que debemos encontrar es **f**($\mathbf{v_1}$). La matriz de **f** la tenemos en la base **B** así que escribiremos a $\mathbf{v_1}$ en esa base:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{1.v_1} + \mathbf{0.v_2} + \mathbf{0.v_3} = (1\ ,0\ ,0)_B$$

$$\text{entonces } f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y **f**(2$\mathbf{v_1}$) = 2**f**($\mathbf{v_1}$) = (0 , 0 , 0)

Ahora calculemos **f**(- $\mathbf{v_1}$ - $\mathbf{v_2}$) haciendo lo mismo **f**(- $\mathbf{v_1}$ - $\mathbf{v_2}$) = - **f**($\mathbf{v_1}$) - **f**($\mathbf{v_2}$)
como **f**($\mathbf{v_1}$) = 0 :

$$\mathbf{f}(-\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = -\mathbf{f}(\mathbf{v_2})$$

Repetimos lo que hicimos en el cálculo de **f**($\mathbf{v_1}$): $\mathbf{v_2} = \mathbf{0.v_1} + \mathbf{1.v_2} + \mathbf{0.v_3} = (0\ ,1\ ,0)_B$

$$\text{entonces } f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{v_2}) = (2\ ,0\ ,0)_B = 2\mathbf{v_1}$$
$$\mathbf{f}(-\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = -\mathbf{f}(\mathbf{v_2}) = -2\mathbf{v_1}$$

La regla de multiplicación de matrices para composición de T.L. sigue valiendo con cambios de base, con una regla adicional:

PROPIEDAD

Sean **f**: **V** → **W** y **g**: **W** → **U** transformaciones lineales.
Sean **B**, **B´**, **B´´** bases de **V**, **W**, **U** en ese orden. Entonces, vale que

$$M_{BB''}(\mathbf{gof}) = M_{B'B''}(\mathbf{g})\ M_{BB'}(\mathbf{f})$$

La T.L. $M_{BB''}(\mathbf{gof})$ se aplica sobre vectores expresados en la base **B**, y devuelve vectores expresados en la base **B''**. Esta regla lo que nos dice es que la base **B'** debe ser la misma para **f** y para **g**.

Veamos cómo es que funciona esto:

Sean **f**: **V** → **W** y **g**: **W** → **U**, y un vector $(\mathbf{v})_B$ de **V** (expresado en la base **B**)

La matriz $M_{BB'}(\mathbf{f})$ se aplica primero sobre $(\mathbf{v})_B$ y devuelve un vector $(\mathbf{w})_{B'}$ que pertenece a **W**. Luego aplicamos la matriz $M_{B'B''}(\mathbf{g})$ a $(\mathbf{w})_{B'}$, y eso nos arroja un vector $(\mathbf{u})_{B''}$.

$$M_{BB'}(\mathbf{f})\ (\mathbf{v})_B = (\mathbf{w})_{B'}$$
$$M_{B'B''}(\mathbf{g})\ (\mathbf{w})_{B'} = (\mathbf{u})_{B''}$$

Si queremos hacer **fog**, entonces lo que los queda es lo siguiente:

$$\mathbf{fog}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \rightarrow M_{B'B''}(\mathbf{g})\ M_{BB'}(\mathbf{f})\ (\mathbf{v})_B = M_{B'B''}(\mathbf{g})\ (\mathbf{w})_{B'} = (\mathbf{u})_{B''}$$

PROPIEDAD

Tengo **f**: **V** → **W** una T.L. que es un isomorfismo (tiene inversa).
Sean **B**, **B´** bases de **V**, **W** (en ese orden), entonces:

$$M_{B'B}(\mathbf{f}^{-1}) = (M_{BB'}(\mathbf{f}))^{-1}$$

Observá que cambia el orden de las bases. Esto pasa porque

$$V_B \xrightarrow{f} (W)_{B'}$$

Si queremos ir de atrás para adelante (que es lo que hace la inversa), partimos de **B´** y llegamos a **B**. Veamos un ejemplo:

Si **f**: $\mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$ tiene la siguiente matriz:

$$M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular $M_{BB'}(\mathbf{f}^{-1})$.

Primero que nada tenemos que ver si es que **f** es un isomorfismo. Como dim **V** = dim**W**, para hacer eso sólo nos fijamos si dim **Nu(f)** = 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Con eso vemos que el rango de la matriz es 3, con lo que dim **Im(f)** = 3, y por lo tanto dim**Nu(f)** = 0. Ahora que sabemos que **f** es un isomorfismo, podemos aplicar la propiedad que mencionamos arriba, $M_{B'B}(\mathbf{f}^{-1}) = (M_{BB'}(\mathbf{f}))^{-1}$, y lo único que debemos hacer, entonces, es invertir $M_{BB'}(\mathbf{f})$.

$$M_{B'B}\left(f^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

CAMBIOS DE BASE (Atento)

Hay unas matrices que se usan para pasar vectores de una base a otra. Son como traductores. Si tenemos un vector escrito en una base, nos lo "traduce" a otra base (nos dice como lo escribimos en otra base, sus nuevas coordenadas).

Matrices de cambio de base

Si **B** = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_n$} **B´** = {$\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... , $\mathbf{w}_n$} dos bases de un mismo espacio vectorial **V**, se llama a $C_{BB'}$ la matriz de cambio de base **B** a la base **B´**. Cómo la conseguimos ?
Tenemos que escribir a cada vector de **B** en la base **B´**

$$\mathbf{v}_i = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{ni}\mathbf{w}_n$$

y la matriz va a ser

$$C_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{mi} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Podemos pensar que en realidad son la matriz de la T.L. identidad pero en donde la base de salida es **B** y la base de llegada es **B´**.

$$C_{BB'} = M_{BB'}(id)$$

PROPIEDAD

Si tenemos una matriz de cambio de una base **B** a otra base **B'**, la matriz que cambia de **B'** a **B** está dada por:

$$(C_{BB'})^{-1} = C_{B'B}$$

Ahora que tenemos la matriz de cambio de base podemos pasar la T.L. escrita en una base a otra cualquiera. Esto sirve para lo que viene ahora:

PROPIEDAD

Muy Importante

Si **f**: **V** → **V** es una T.L. y tengo **B** y **B**' bases de **V**
Entonces

$$M_{B'}(f) = C_{BB'}\ M_B(f)\ C_{B'B}$$

Si pensamos que multiplicamos por un vector (escrito en la base **B**'), vamos de atrás para adelante. Primero multiplicamos por la matriz de cambio de base, y queda escrito en base **B**. Después le aplico la T.L. y me lo tira en la base **B** y después lo paso a la base **B**'.

Volvamos a un ejemplo viejo. Si nos dan una la T.L. así:

$$\mathbf{f}(2, 1) = (0, 3)$$
$$\mathbf{f}(1, 2) = (1, 1)$$

Queremos averiguar la matriz en la base canónica.

Pensemos que tenemos la matriz escrita en otra base. Como salimos de los vectores (2 , 1) y (1 , 2), los tomamos para que sean nuestra base **B** y a sus imágenes las tomamos como nuestra base **B´** . Entonces la matriz de **f** la podemos pensar como:

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz en la base canónica buscamos las de cambio de base a la canónica. Tenemos

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C_{B'E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $M_E(f) = C_{B'E}\, M_{BB'}(f)\, C_{EB}$. Entonces nos falta C_{EB}, pero $C_{EB} = (C_{BE})^{-1}$. Calcular la inversa de una matriz de dos por dos se hace rápido.

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$M_E(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$M_E(f) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Por ahora vimos lo de cambio de base si la T.L. sale y llega al mismo espacio vectorial. Pero podemos hacer lo mismo aunque los E.V. no sean el mismo o las bases sean distintas.

PROPIEDAD

Sean **V** , **W** dos e.v. con **E**, B bases de **V** y E´ , B´ bases de **W**.
Si **f**: **V** $\rightarrow$ **W** es una T.L. Entonces

$$M_{EE'} = C_{B'E'} . M_{BB'} . C_{EB}$$

La idea es la misma que antes. Sean **f** y **h** dos T.L.

$$f(x_1 , x_2) = (3x_1 - x_2 , x_2)$$
$$h(x_1 , x_2) = (3x_1 + x_2 , 2x_1 + x_2 , x_1 + x_2)$$

y las bases **B** = { (1 , 1) ; (0 , -1) } y **B'** = { (1 , -1 , 1) ; (0 , -1 , 2) ; (0 , 0 , 1) }
Calcular $M_{BB'}$(**hof**)

Tenemos las matrices de las T.L. expresadas en la base canónica,

$$M_E(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{EE'}(h) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como hay que encontrar $M_{BB'}$ (**hof**) tenemos que salir de la base **B** y llegar a la base **B´** . Para salir de la base **B** calculamos M_{BE}(f)

$$M_{BE}(f) = M_E(f)\,.\,C_{BE}$$

$$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos algo parecido con la matriz de **h**. Como queremos que todo termine en la base **B´** calculamos $M_{EB'}$(**h**)

$$M_{EB'}(\mathbf{h}) = C_{E'B'}\,.\,M_{EE'}(\mathbf{h})$$

Es mas fácil calcular $C_{B'E'}$ y sabemos que $C_{E'B'} = (C_{B'E'})^{-1}$

$$C_{B'E'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando la inversa nos queda que:

$$C_{E'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{EB'}(\mathbf{h}) = C_{E'B'}\; M_{EE'}(\mathbf{h})$$

$$M_{EB'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{EB'}(h) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora que tenemos esas dos matrices podemos calcular $M_{BB'}(\mathbf{hof})$

$$M_{BB'}(\mathbf{hof}) = M_{EB'}(\mathbf{h})\, M_{BE}(\mathbf{f})$$

Como cambiamos la T.L. de bases se "enganchan" bien las bases para hacer la multiplicación.

$$M_{BB'}(hof) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB'}(hof) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -12 & -3 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Hay otra manera de resolver este ejercicio. Puedo calcular primero la matriz de la composición en la base canónica $M_{EE'}(\mathbf{hof})$. Después cambio de base con las matrices de cambio de base. La cantidad de cuentas que tenemos que hacer es la misma que arriba.
Antes de terminar veamos un tipo de T.L. que tiene algunas propiedades especiales.

PROYECTOR

Si $\mathbf{p}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una T.L. que cumple que **pop** = **p** se llama proyector. O sea si aplicamos **p** dos veces la T.L. es lo mismo que hacerlo una sola.

Un ejemplo de un proyector es: Sea $\mathbf{f}: \mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}^2$ dada por: $f(x_1 , x_2) = (0 , x_2)$
Probemos qué pasa al hacer **fof**

$$f(f(x_1 , x_2)) = f(0 , x_2) = (0 , x_2)$$

PROPIEDAD

Si $\mathbf{p}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es un proyector entonces

$$\mathbf{V} = \mathbf{Nu(p)} \oplus \mathbf{Im(p)}$$

No hay muchos ejercicios con proyectores pero es un nombre que hay que saber por las dudas.

Definir un proyector $\mathbf{p}: \mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}^2$ que cumpla que

$$\mathbf{Nu(p)} = \langle(-1 , 1)\rangle \quad e \quad \mathbf{Im(p)} = \langle(1 , 1)\rangle$$

Nos dicen que (-1,1) esta en **Nu**(**p**) entonces **p**(-1,1)=(0,0)

Además como (1,1) esta en **Im**(**p**) hay algún vector **v** que cumple: **p**(**v**)=(1,1)

y como **p** es proyector, **pop**(**v**) = **p**(**v**) entonces **p**(1,1)=(1,1)

Si tomamos como base **B** = {(1,1);(-1,1)} nos queda la matriz $M_B(p)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
Y ya definimos nuestro proyector.

¿ <u>Cómo armar Transformaciones Lineales</u> ?

Hay muchos ejercicios en los que nos piden que encontremos una T.L. que cumpla ciertas condiciones. Como el ejercicio de recién, o por ejemplo:

Encontrar **f**: $\mathbf{IR}^4 \rightarrow \mathbf{IR}^4$ que cumpla :

fof = 0
f(1 , 0 , 0 , 0) = (1 , 2 , 2 , -1)
f(0 , 1 , 0 , 0) = (0 , -1 , 1 , 0)

Para estos ejercicios no hay una regla segura. Todo depende de lo que nos pidan, pero con todo lo que vimos antes, se pueden hacer. Mirá cómo se hace este para tener una idea. Como **fof** = 0 tiene que valer

f(f(1 , 0 , 0 , 0)) = (0 , 0 , 0 , 0)
f(f(0 , 1 , 0 , 0)) = (0 , 0 , 0 , 0)

Entonces,

f(1 , 2 , 2 , -1) = (0 , 0 , 0 , 0)
f(0 , -1 , 1 , 0) = (0 , 0 , 0 , 0)

Como los cuatro vectores son L.I y sabemos lo que vale **f** ahí, la T.L. queda definida. Si queremos escribir la matriz de la T.L. podemos hacerla armando una base como hicimos en otros ejercicios. Tomamos **B** = { (1 , 0 , 0 , 0) ; (0 , 1 , 0 , 0) ; (1 , 2 , 2 , -1) ; (0 , -1 , 1 , 0) } que son los vectores donde esta definida la T.L. Me da:

$$M_{BE}(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Y ya tenemos la matriz de la T.L. !!

FIN TEORIA DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Hagamos un pequeño resumen

TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRIZ CAMBIO DE BASE

Una **Transformación Lineal** f: $\Re^n \rightarrow \Re^n$ es una función que toma un vector **x** del espacio $\Re^n$ y nos devuelve otro vector **y** de este mismo espacio (f(**x**) = **y**).

Ahora, este vector **x** sobre el que actúa f puede estar expresado en cualquiera de las bases que describa al espacio $\Re^n$ (Acordate que base es un conjunto de n vectores linealmente independientes, donde n es la dimensión del espacio). Es decir, si consideramos la base **B** que genera a $\Re^n$, el vector **x** tiene asociado una terna de coordenadas $(\mathbf{x})_B$ respecto a esta base. A su vez, la transformación f puede asociarse a una matriz $M_{BB'}(f)$ "con base de entrada **B** y base de salida **B'** " que, al multiplicarla por el vector de coordenadas de **x** respecto a **B**, nos da el vector de coordenadas de **y** respecto a la base **B'**.
Tanto palabrerío lo escribimos así

$$M_{BB'}(f)(\mathbf{x})_B = (\mathbf{y})_{B'}$$

Pero qué pasa si queremos escribir un vector dado en la base **B,** en otra **B'** ? Es posible esto también? Sí, ellos están relacionados por medio de la **matriz de cambio de base** $C_{BB'}$ de esta forma:

$$C_{BB'}\,(\mathbf{x})_B = (\mathbf{x})_{B'}$$

(fijate que el vector **x** es el mismo, sólo que están dadas sus coordenadas en relación a distintas bases).
Lo mismo si tengo un vector expresado en la base **B'** y lo quiero escribir expresado en la base **B**, uso la matriz de cambio de base $C_{B'B}$, de esta manera

$$C_{B'B}\,(\mathbf{x})_{B'} = (\mathbf{x})_B.$$

Podemos ver entonces que $C_{BB'} = (C_{B'B})^{-1}$, lo que significa que $C_{BB'}$ hace lo inverso que $C_{B'B}$. Bien. Muy bonito todo, pero... Cómo calculamos $C_{BB'}$?
Rta:Es una receta...lo que hacemos es:

1) tomar cada vector de la base **B** y escribirlo como combinación lineal de los vectores de la base **B'.**

2) colocarlos como columnas de una matriz y luego bautizar a ésta como $C_{BB'}$.
Veamos un ejemplo para que resulte más fácil entenderlo: Sean las bases de $\Re^3$

$$\mathbf{B} = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \} \quad \text{y} \quad \mathbf{B'} = \{ (-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1) \}$$

Tomamos el primer vector de la base **B** y lo escribimos como combinación lineal de los de la base **B'**

$$(1, 1, 1) = a\,(-1, 1, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 1, 1) = (-a, a + b + c, c)$$

Y encontramos que los valores de los coeficientes, para que la igualdad se satisfaga, deben ser: $a = -1$, $b = 1$ y $c = 1$. Estas son entonces las coordenadas del vector (1, 1, 1) en la base **B'**:

$$(1, 1, 1)_{B'} = (-1, 1, 1)$$

Calculamos de la misma manera las coordenadas de los demás vectores de la base **B** en la **B'** y obtenemos que:

$$(1, 1, 0)_{B'} = (-1, 2, 0) \quad \text{y} \quad (1, 0, 0)_{B'} = (-1, 1, 0)$$

Y finalmente colocamos estos vectores escritos en la base **B**′ como columnas en una matriz a la que llamaremos " matriz de cambio de base de **B** a **B'** ":

$$C_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si necesitamos la de cambio de base de **B'** a **B**, esto es $C_{B'B}$, sólo tenemos que calcular la inversa de $C_{BB'}$. (pues $C_{B'B} = (C_{BB'})^{-1}$).

También puede pasar que en ciertos casos, nos den la matriz de transformación de f, $M_{BB'}(f)$, que es la que actúa sobre vectores expresados en la base B y nos devuelve otros en la base B′. Pero qué pasa si queremos que nos devuelva vectores en la misma base B? es posible esto? Cómo es la matriz $M_{BB}(f)$ que hace esto??

Veamos qué podemos hacer… $M_{BB'}(f)\,(\mathbf{x})_B$ es un vector $(\mathbf{y})_{B'}$. Lo que nosotros estamos buscando es que este vector esté expresado en la base **B**, pero ya vimos que con la matriz de cambio de base $C_{B'B}$ podemos escribir $C_{B'B}\,(\mathbf{y})_{B'} = (\mathbf{y})_B$. De modo que aplicando $C_{B'B}M_{BB'}(f)$ a $(\mathbf{x})_B$ obtenemos $(\mathbf{y})_B$, un vector expresado en la base B, como queríamos.

Por lo tanto, podemos identificar $M_{BB}(f) = C_{B'B}\,M_{BB'}(f)$ como la matriz de transformaciones de f que toma y devuelve vectores expresados en la base B.
Estas son algunas de las situaciones o problemas en los que nos podemos encontrar.

Pero como estamos viendo, pensando un poquito y valiéndonos de lo que sabemos, vamos a poder encontrarle la vuelta para resolverlos.
Volviendo ahora a la f, de la que todavía tenemos para hablar un rato, pues ni mencionamos que existe la función f^{-1} muy emparentada con ella, ya que es la inversa de f y actúa exactamente al revés, esto es, $f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Hasta ahora, hablamos de transformaciones lineales. Vimos que éstas transforman vectores, pero nos preguntamos porqué decimos " lineales " ??
Rta: Simplemente, porque tienen esta importante cualidad:

$$f(a\,\mathbf{x}_1 + b\,\mathbf{x}_2) = a\,f(\mathbf{x}_1) + b\,f(\mathbf{x}_2).$$

Existen además otras propiedades que deben cumplir las transformaciones lineales, una muy importante y que vamos a usar mucho es el **teorema de la dimensión:**

Sean los espacios vectoriales V y W , y la T.L. $f : V \to W$, entonces se cumple que

$$\dim V = \dim Nu(f) + \dim Im(f)$$

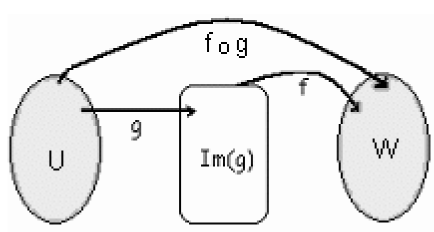
Donde el núcleo de f (Nu(f)) es el conjunto de todos los vectores del dominio V, que al ser transformados por f dan cero (van a parar al vector nulo del codominio):

$$Nu(f) = \{ \mathbf{v} \in V / f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}$$

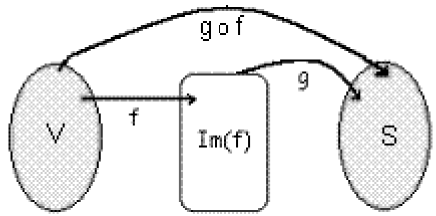
Y el otro conjunto, la imagen de f (Im(f)), está formado por todos los vectores de W que son imagen de algún vector de V:

$$Im(f) = \{ \mathbf{w} \in W / f(\mathbf{v}) = w \text{ para algún } \mathbf{v} \in V \}$$

Ahora, si además de $f : V \to W$, tenemos otra T.L., por ejemplo, $g: U \to S$, podemos combinarlas para hacer una **Transformación Lineal Compuesta**. Con estas 2 podríamos hacer las siguientes composiciones: $g \circ f: V \to S$ y $f \circ g: U \to W$. Pero ojo ! No siempre son posibles de hacer, sólo si los espacios involucrados cumplen con ciertas relaciones, veamos... Si $Im(g) \subseteq V$, entonces podemos construir $f \circ g: U \to W$



Si en cambio, Im(f) $\subseteq$ U, entonces podemos construir gof : V $\to$ S



(Un detallecito, decir f $\circ$ g(**x**) es lo mismo que f(g(**x**)), son expresiones equivalentes).

EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

1. Sean **f**: $\mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$ **g**: $\mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^2$ dos T.L. Sean **B** base de $\mathbf{IR}^3$ y **B´** base de $\mathbf{IR}^2$ que cumplen que,

$$M_{BB'}(gof) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que:
a) f es un isomorfismo
b) Hallar $M_{BB'}(g)$

a) Como **f** sale de un espacio de dim = 3 y llega a otro de la misma dimensión, nos alcanza con probar que es epimorfismo o que es monomorfismo. Triangulamos M_B(**f**) y miramos qué **rango** tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz que queda tiene **rango** = 3. Entonces M_B(**f**) tiene **rango** = 3. La T.L. **f** es un epimorfismo y por lo que dijimos antes, entonces es un isomorfismo. Ya probamos la parte a) !

b) Tenemos $M_{BB'}$(**gof**), entonces para sacar $M_{BB'}$(**g**) debemos hacer desaparecer a **f** de la composición. Como **f** es un isomorfismo, sabemos que tiene inversa, y usando las propiedades, podemos calcular $M_{BB'}$(**g**) a partir de los datos que tenemos.
Pensemos que **g** = **g**o(**fof** $^{-1}$) porque **fof** $^{-1}$ = identidad. Entonces,

$$M_{BB'}(g) = M_{BB'}(\mathbf{gofof}^{-1}) = M_{BB'}(\mathbf{gof})\, M_B(\mathbf{f}^{-1}) = M_{BB'}(\mathbf{gof})\, (M_B(\mathbf{f}))^{-1}$$

Hay que encontrar $(M_B(\mathbf{f}))^{-1}$ que es la inversa de la que tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calculemos los determinantes chiquitos

Primera columna $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Segunda columna $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Tercera columna $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ahora escribimos la matriz con estos minideterminantes

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A esta matriz la trasponemos y dividimos todos los números por el det de $M_B(\mathbf{f})$.
La traspuesta es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y para el determinante podemos usar los determinantes chiquitos que calculamos antes

$$\det(M_B(f)) = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.2 - 0.0 + 1.(-3) = 2 - 3 = -1$$

Entonces al dividir por –1 nos queda la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (M_B(f))^{-1}$$

Y finalmente tenemos que

$$M_{BB'}(g) = M_{BB'}(\mathbf{gof})\,(M_B(\mathbf{f}))^{-1}$$

Entonces:

$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Que era lo que nos pedían !!

---

2. Sean:

B = { (1 , 1 , 1) ; (1 , 0 , -1) ; (0 , 0 , 1) } , **B'** = { (-1 , 1 , 1) ; (0 , 1 , -1) ; **w** } y
f: $\mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$ la T.L. tal que:

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar **w** tal que **B'** sea base de $\mathbf{IR}^3$ y f(4 , -5 , 1) = (2 , 1 , 1)

Tenemos $M_{BB'}(f)$ que es la matriz que define **f** con respecto a **B** y **B'**. Entonces, para poder aplicar **f** al vector (4, -5, 1), tenemos que escribirlo en la base **B**. Nos queda

$$(4 , -5 , 1) = -5\,(1 , 1 , 1) + 9\,(1 , 0 , -1) + 15\,(0 , 0 , 1)$$

Entonces ahora le aplicamos la matriz de **f**:

$$M_{B'B}(f)(4,-5,1)_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como esto está representado en la base **B'**, y nos piden que el resultado sea igual al vector (2,1,1) escribimos:

$$5\,(-1 , 1 , 1) + (-4)\,(0 , 1 , -1) + 3\,(w_1 , w_2 , w_3) = (2, 1, 1)$$

Entonces podemos escribir este sistema de ecuaciones:

$$-5 + 3\,w_1 = 2 \quad\Rightarrow\quad w_1 = 7/3$$
$$1 + 3\,w_2 = 1 \quad\Rightarrow\quad w_2 = 0 \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{w} = (7/3\ ,\ 0\ ,\ -8/3)$$
$$9 + 3\,w_3 = 1 \quad\Rightarrow\quad w_3 = -8/3$$

Ahora solamente falta verificar que con este vector **w** que obtuvimos el conjunto **B'** = { (-1 , 1 , 1) , (0 , 1 , -1) , **w** } es una base de $\mathbf{IR}^3$. Para eso hay que ver si los vectores son linealmente independientes ... pero... ¿ y cómo hacemos eso?

⇒ si (-1, 1, 1), (0, 1, -1), (7/3, 0, -8/3) son base, la combinación lineal

$$\mathbf{0} = a\,(-1,1,1) + b\,(0,1,-1) + c\,(7/3, 0, -8/3)$$

tiene que dar a = b = c = 0
Resolvamos las ecuaciones y corroboremos si los resultados son los correctos...

$$-a + c\,7/3 = 0 \quad\Rightarrow\quad a = 7/3\,c$$
$$a + b = 0 \quad\Rightarrow\quad b = -a = -\,7/3\,c$$
$$a - b - c\,8/3 = 0 \quad\Rightarrow\quad 7/3\,c - (-7/3\,c) - 8/3\,c = 14/11\,c = 0$$

$$\Rightarrow\quad a = b = c = 0$$

Por lo que podemos ver, el resultado es el esperado, es decir **B'** es base de $\mathbf{IR}^3$!!
Así que el vector que encontramos nos sirve !!

---

1. Sean $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_4 = x_1 + x_3 = 0\right\}$, $\mathbb{T} = \left\langle(1,3,1,2);(1,1,0,1)\right\rangle$ y $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.
Definir una t.l. $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que g no sea isomorfismo y $f(g(\mathbb{S})) = \mathbb{T}$.

1) Tenemos que definir una transformación lineal g (de $\mathfrak{R}^4$ en $\mathfrak{R}^4$) que **no** sea un isomorfismo y que actúe sobre los elementos del conjunto **S**, de modo tal que f(g(**S**)) = **T**
Para encontrar una g que satisfaga esto, antes que nada tenemos que saber cómo son los vectores que generan **S.** Y a estos los vamos a encontrar a partir de la información que nos dan sobre las componentes de los vectores que pertenecen a este espacio:

$$S = \{\ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^4\ /\ x_1 + x_2 - x_4 = x_1 + x_3 = 0\ \}$$

De aquí, vemos que podemos expresar algunas componentes en función de otras, porque reescribiendo las ecuaciones tenemos que $x_3 = -x_1$ y $x_4 = x_1 + x_2$.

Y así podemos decir que los vectores **x** que forman **S** sólo dependen de 2 variables (x_1 y x_2) y se pueden escribir como

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, -x_1, x_1 + x_2) = x_1 (1, 0, -1, 1) + x_2 (0, 1, 0, 1)$$

Así, **cualquier** combinación lineal de estos últimos 2 vectores nos dará algún vector en **S** y, por lo tanto, estos vectores generan el espacio. Como además son linealmente independientes (LI) también forman una base para S: (se ve a ojo, no??)

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \} = \{ (1, 0, -1, 1); (0, 1, 0, 1) \}$$

¿ Por qué queríamos conocer estos vectores de la base ? Rta: Porque queremos definir $g(\mathbf{S})$, O sea, decir cómo g transforma a los vectores de este espacio. Pero como a todo vector de **S** lo puedo expresar como una combinación lineal de los vectores de la base, esto es:
$\mathbf{x_S} = a.\ \mathbf{s_1} + b.\ \mathbf{s_2}$, vemos que es lo mismo hacer $g(\mathbf{x_S})$ que $g(a\ \mathbf{s_1} + b\ \mathbf{s_2})$.
Además, nos piden que g sea lineal, por lo que debe cumplir $g(a.\mathbf{s_1} + b.\mathbf{s_2}) = a\ g(\mathbf{s_1}) + b\ g(\mathbf{s_2})$. Y acá vemos bien clarito que definiendo cómo transforma g a los vectores de la base de **S**, estamos definiendo como transforma g a todo el espacio.

Bueno…. Todo esto salió de que queremos que $f(g(\mathbf{S})) = \mathbf{T}$. Este último espacio, está generado por los vectores $\mathbf{t}_1 = (1, 3, 1, 2)$ y $\mathbf{t}_2 = (1, 1, 0, 1)$, que también son LI y por lo tanto base de **T**, con lo que un vector de **T** tiene la pinta $\mathbf{x_T} = c.\mathbf{t_1} + d.\mathbf{t_2}$.
Entonces, si por ejemplo definimos la ley de transformación en una forma resimple:

$$f(g(\mathbf{s_1})) = \mathbf{t_1} \qquad \text{y} \qquad f(g(\mathbf{s_2})) = \mathbf{t_2}\ ,$$

g satisface parte de lo que buscamos. Ahora, del enunciado sabemos cómo transforma f y cómo son los vectores $\mathbf{t_1}$ y $\mathbf{t_2}$, veamos qué podemos hacer con este saber…
Queremos que sea $f(g(\mathbf{s_1})) = (1, 3, 1, 2)$, pero considerando que la f actúa según

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

Entonces deben cumplirse las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Despejando encontramos que las componentes del vector sobre el cual actúa f para darnos $\mathbf{t_1}$, es decir, las componentes de $g(\mathbf{s_1})$ ni mas ni menos, son

$$x_1 = 1\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_3 = 0\ ;\ x_4 = 0$$

Del mismo modo, si queremos que $f(g(\mathbf{s_2})) = (1, 1, 0, 1)$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones a resolver

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Despejando vemos que las componentes del vector $g(\mathbf{s_2})$ son
$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$

$$\Rightarrow \quad g(\mathbf{s_2}) = (0, 1, 0, 1)$$

Entonces ya tenemos definida g de modo que cumple con $f(g(\mathbf{S})) = \mathbf{T}$. Pero para definir g completamente debemos dar $g(\Re^4)$, esto es, decir cómo actúa sobre el espacio $\Re^4$ entero, no sólo sobre el subespacio **S**. Y para esto, debemos decir cómo transforma a alguna base de $\Re^4$. Por supuesto que podemos, y vamos a, utilizar una base que contenga a los vectores $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$, pues ya definimos de qué manera g actúa sobre ellos.
Agarrando 2 vectores linealmente independientes, entre ellos y además con $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$, tendremos una base de $\Re^4$. Busquemos una entonces…

Tomemos un vector humilde y sencillo como el (1, 0, 0, 0) por ejemplo, e intentemos escribirlo como combinación lineal de $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$.

$$\mathbf{s_3} = (1, 0, 0, 0) = a\,(1, 0, -1, 1) + b\,(0, 1, 0, 1) = (a, b, -a, a + b)$$

Pero entonces debe ser $a = 1$ y $-a = 0$ al mismo tiempo… $\rightarrow$ Absurdo !
Y así vemos que este $\mathbf{s_3}$ no puede ser escrito a partir de $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$, por lo tanto ya tenemos una terna de vectores L.I. Pero necesitamos un vector más, tomemos otro vector sencillo, como el (0, 1, 0, 0) y veamos si podemos escribirlo o no en función de los otros.

$$(0, 1, 0, 0) = a\,(1, 0, -1, 1) + b\,(0, 1, 0, 1) + c\,(1, 0, 0, 0)$$

$$= (a + c, b, -a, a + b)$$

Luego debe ser $a + b = 0$ y además $b = 1$ y $-a = 0$, lo que es imposible.

$$\Rightarrow \mathbf{s_4} = (0, 1, 0, 0).$$

Y así encontramos 4 vectores LI que forman una base de $\Re^4$. ($B = \{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3}, \mathbf{s_4}\}$).

Como dijimos, tenemos que definir la acción de g sobre toda la base del espacio donde actúa ($\Re^4$). Para esto, sólo nos falta definir $g(\mathbf{s_3})$ y $g(\mathbf{s_4})$.

Pero ojo ! Acá falta imponer la última restricción que nos pide el enunciado: que *g* sea no isomorfa.
Bien. Isomfris, eh…isofrismo, isfomsri.. frismosis… mmm.. sí morfi… snif, snif.
¿ Es qué ???!

Aclaremos: " …se dice que una transformación que va desde un espacio vectorial a otro es un isomorfismo si es lineal y biyectiva (esto es: inyectiva y sobreyectiva) "

Uff.. viste por qué siempre es bueno saber estas cosas ? Je je.. Bueno son dos definiciones bien sencillas:
Una aplicación **inyectiva** es aquella que lleva siempre dos vectores **distintos** en dos vectores **distintos**.

$$\text{Si } x_1 \neq x_2 \quad \text{entonces} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Una aplicación se dice **sobreyectiva** si **todo** elemento del espacio de llegada **es imagen** de algún elemento del espacio de salida. O sea

$$\text{Si } f: V \to W \text{ entonces todo } w \in W,$$
$$\text{puede escribirse como } w = f(v), \text{ para algún } v \text{ de } V.$$

Pero nosotros queremos justamente que *g* <u>no sea</u> isomorfismo, como ella es lineal, deberá pasar que no sea biyectiva. Hay muchas formas de lograr eso. Basta con que *g* no sea inyectiva o sobreyectiva.
Entonces, podemos definir, por ejemplo, que *g* lleve dos vectores distintos a un solo vector en el espacio de llegada (vector imagen), con esto *g* no deja de ser inyectiva.

Teniendo esta arbitrariedad con respecto a la definición de *g*, es posible obtener muchas (hasta infinitas) funciones *g* que satisfagan lo que nos piden.
Una posible es:

$$g: \Re^4 \to \Re^4 \text{ tal que } \quad \begin{aligned} g(\mathbf{s_1}) &= g((1, 0, -1, 1)) = (1, 1, 0, 0) \\ g(\mathbf{s_2}) &= g((0, 1, 0, 1)) = (-1, 2, 1, 1) \\ g(\mathbf{s_3}) &= g((1, 0, 0, 0)) = (0, 0, 0, 0) \\ g(\mathbf{s_4}) &= g((0, 1, 0, 0)) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

O sea, matamos la inyectividad de *g* mandando dos vectores ($\mathbf{s}_3$ y $\mathbf{s}_4$), al mismo vector (el vector nulo).

2. Sean $B = \{(1,0,1);(0,1,1);(1,0,0)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

Encontrar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(\mathrm{Nu}\, f) = 1$ y $f(b,1,1) = (1, 1-b, 0)$.

La matriz asociada a la transformación f, $M_{BE}(f)$, toma vectores de $\Re^3$escritos en la base B que nos dan y luego de actuar sobre ellos nos devuelve un vector, también de $\Re^3$ pero expresado en la base canónica que es la $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
Ahora bien, lo que nos piden es encontrar a y b tales que ocurran simultáneamente estas dos cosas:

i) **dim Nu(f) = 1**
ii) **f(b, 1, 1) = (1, 1 – b, 0)**

Empecemos con la primera.... que nos quiere decir? Si el núcleo de la transformación tiene dimensión uno quiere decir que existe sólo un vector $\mathbf{v_0} \neq 0$ tal que $f(\mathbf{v_0}) = \mathbf{0}$.
(En realidad esto pasa con $\mathbf{v_0}$ y todos sus múltiplos, pero la cuestión es que no hay dos o más vectores LI que estén en el núcleo…).

Podemos pensar que $\mathbf{v_0}$, escrito en la base B, tiene estas componentes $(\mathbf{v_0})_B = (v_1, v_2, v_3)$, entonces, aplicando la matriz $M_{BE}(f)$ a este vector, debemos obtener el vector nulo. Hagamos este producto y veamos qué condiciones encontramos sobre a y b para que esto pase:

$$M_{BE}(f)(\mathbf{v_0})_B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, v_1 + v_2 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 - v_2 + b\, v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -a\, v_1 \\ v_3 = v_2 \\ v_1 - (-a v_1) + b\,(-a\, v_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + a\ v_1 - b\ a\ v_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 + a - a\ b)\ v_1 = 0$$

Fijate que v_1 tiene que ser $\neq 0$, pues sino el vector $\mathbf{v_0}$ sería nulo pues las 3 coordenadas dependen de este valor. Por lo tanto, para que se cumpla la ecuación lo que debe ser nulo es el paréntesis que multiplica a v_1, esto es:

$$1 + a - a\, b = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b\ -1}} \quad \text{con} \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{1}$$

Y acá ya tenemos una condición y relación sobre a y b. Fijate que el único valor que b no puede tomar es el 1, pues en este caso el denominador es nulo y la división por cero no es posible !!!

Ahora, lo segundo que debe pasar es que f(b, 1, 1) = (1, 1 – b, 0). Hagamos entonces esta cuenta matricialmente, pero ojo !! Debemos escribir los vectores en sus bases correspondientes !!!

La matriz de transformación de la función f actúa sobre vectores escritos en la base B, por lo tanto, vamos a encontrar como es $(b, 1, 1)_B$. ... y cómo hacíamos esto? Fácil, fácil !! Escribiéndolo como combinación lineal de los vectores de B:

$$(b, 1, 1)_B = c_1 (1, 0, 1) + c_2 (0, 1, 1) + c_3 (1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (b, 1, 1)_B = (c_1 + c_3 , c_2 , c_1 + c_2)$$

Debe ser entonces
$$\begin{cases} \mathbf{c_2} = \mathbf{1} \\ c_1 + c_2 = 1 \quad \Rightarrow \mathbf{c_1} = \mathbf{0} \\ c_1 + c_3 = b \quad \Rightarrow \mathbf{c_3} = \mathbf{b} \end{cases}$$

Estos coeficientes que encontramos son justamente las coordenadas del vector en la base B. Así, lo escribimos como:

$$(b, 1, 1)_B = (0, 1, b)$$

Por otro lado, el (1, 1 – b, 0) (que debemos imponer como vector resultado) ya está expresado en la base en que la f nos devuelve los vectores (la base canónica), así que no necesitamos hacer nada más, ya podemos ir a las cuentas y ver que pasa…

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-b \\ b^2-1 \end{pmatrix} \text{ y pedimos } \begin{pmatrix} 1 \\ 1-b \\ b^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que se cumpla la igualdad debe cumplirse

$$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = \pm\ \mathbf{1}.$$

Encontramos entonces que b puede tomar sólo 2 valores, 1 ó –1. Pero si además debe cumplir con la primera condición, sólo nos queda la opción de b = - 1. Como además, a está en función de b, simplemente reemplazamos el valor de b en esa relación y encontramos que a = - 1/2 .

$\therefore$ ($\leftarrow$ por lo tanto) **b = –1** y **a = –1/2** son los bichos que buscábamos

---

1. Definir una transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

i) $\mathrm{Nu}\, f = \mathrm{Im}\, f$

ii) $f(2,1,-1,0) = f(1,0,3,1) = (1,0,2,1)$.

Calcular $f(0,0,3,0)$.

Estos problemas en los que nos piden definir una transformación lineal que cumpla tal y tal cosa, generalmente tienen varias soluciones, es decir, podemos definir más de una función que satisfagan el pedido (o infinitas, depende las restricciones). Así que ahora vamos a encontrar sólo una de esas…

Veamos… la condición i) nos exige **Nu f** = **Im f** (oja aca!!! este Im es imagen y no imaginario!!!). Al leer el resumen teórico recordamos o aprendimos el teorema que relaciona la dimensión del espacio, la imagen y el núcleo no? Mmm… por si sos poco memorioso:

Teorema de la dimensión.

$$\text{Sea } f\colon V \to W \quad \Rightarrow \quad \dim V = \dim \mathrm{Nu}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

En nuestro problema, el espacio vectorial de llegada y salida sobre los cuales actúa f es $\Re^4$, por lo que el teo de la dim queda:

$$\dim \Re^4 = \dim \mathrm{Nu}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

$$4 = \dim \mathrm{Nu}(f) + \dim \mathrm{Nu}(f) \qquad (\text{ pues tenemos } \mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) \text{ })$$

$$4 = 2.\ \dim \mathrm{Nu}(f)$$

$$\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Nu}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = 2$$

Y así encontramos que la dimensión del núcleo, tanto como la de la imagen, es 2.

Esto nos indica que vamos a tener exactamente 2 vectores LI tal que f de ellos es cero (de estos 2 vectores y todas sus combinaciones lineales posibles) y que a la vez, estos 2 vectores pertenecen a la imagen, así que también precisamos que ellos sean el resultado de alguna transformación de f.

La condición ii) nos dice $f(2, 1, -1, 0) = f(1, 0, 3, 1) = (1, 0, 2, 1)$

$$\begin{array}{lccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Para simplificar llamemos:} & v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

Y de acá vemos que $\mathbf{v_3} \in$ Im f y, por ende, él también $\in$ Nu(f), (pues Nu(f) = Im(f)). Sabemos que la dimensión de los mismos es 2, por lo que todavía nos está faltando un vector linealmente independiente con $\mathbf{v_3}$ que pertenezca al núcleo e imagen simultáneamente.

La transformación f que estamos queriendo definir, es lineal. Esto quiere decir que cumple que $f(a\,\mathbf{u_1} \pm b\,\mathbf{u_2}) = a\,f(\mathbf{u_1}) \pm b\,f(\mathbf{u_2})$, donde a, b son ctes y $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son vectores.

Tenemos además que $f(\mathbf{v_1}) = f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_3}$, lo que nos da pie para generar al vector nulo restando simplemente $f(\mathbf{v_2})$ a $f(\mathbf{v_1})$

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(v_1 - v_2) = 0$$

Este nuevo vector $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = (1, 1, -4, -1)$ es LI con $\mathbf{v_1}$ (y con $\mathbf{v_2}$), esto lo vemos sin necesidad de hacer cuentas ya que $\mathbf{v_1}$ tiene la cuarta componente nula, lo que hace imposible generarnos el -1 del vector $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$.

Entonces, ya encontramos otro vector que está en el Nu(f) y en consecuencia en la Im(f). Entonces nos falta definir una transformación de algún vector que mediante la acción de la f vaya a parar a $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$, es decir definir un $\mathbf{v_4}$, tal que $f(\mathbf{v_4}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$.
Y este $\mathbf{v_4}$ puede ser cualquier vector ? Cómo lo encontramos ?
Recordemos que la f actúa sobre todo el espacio $\Re^4$, por lo tanto, para definirla completamente debemos decir como actúa no sobre cada uno de los vectores que forman $\Re^4$, (esto sería una locura pues son infinitos !!), sino sobre cada uno de los vectores de alguna base de este espacio.
Hasta ahora definimos que

$f(v_1) = v_3$	Estos 3 vectores v_1, $v_1 - v_2$, v_3 son LI.
$f(v_1 - v_2) = 0$	Por lo tanto, encontrando un vector v_4,
$f(v_3) = 0$	LI con los otros 3, tenemos una base de $\Re^4$.

Tomemos uno bien sencillo, como el (1, 0, 0, 0) y veamos si es posible expresarlo como combinación lineal de los otros 3.

$$(1,0,0,0) \stackrel{?}{=} a(2,1,-1,0) + b(1,1,-4,-1) + c(1,0,2,1)$$
$$= (2a+b+c,\ a+b,\ -a-4b+2c,\ -b+c)$$

Igualando componente a componente tenemos por la 2° y 4° que debe ser $a = -b = -c$. Reemplazando estas relaciones en la ecuación resultante de la 3° componente tenemos que $-a - 4b + 2c = -a + 4a - 2a = a = 0 \Rightarrow a = 0$ y, en consecuencia, $b = c = 0$.
Por lo tanto, el vector (1, 0, 0, 0), al que vamos a llamar $\mathbf{v_4}$, no puede escribirse como comb. lineal de los otros y es LI con ellos.

Y entonces listo !!! No es eso lo que queríamos ? Saber quien era $\mathbf{v_4}$? Pues ya definimos cómo debe transformar f este vector, debía ser $f(\mathbf{v_4}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$.
Así que ya tenemos definida una f que verifica simultáneamente i) y ii). Ella es

$$f: \Re^4 \to \Re^4 \text{ tal que} \qquad f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_3} \qquad f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = \mathbf{0}$$
$$f(\mathbf{v_4}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \qquad f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{0}$$

Bien. Ahora sólo nos falta calcular f(0, 0, 3, 0). Cómo ??!?!!
No habíamos terminado ?!?!?
<u>Rta</u>: No. Pero falta poquito… pues ahora que tenemos definida la f, sabemos cómo actúa sobre cualquier vector de $\Re^4$. Sólo basta expresar a éste en la base que conocemos… Hagámoslo:

$$(0,0,3,0) = a(2,1,-1,0) + b(1,1,-4,-1) + c(1,0,2,1) + d(1,0,0,0)$$
$$= (2a+b+c+d,\ a+b,\ -a-4b+2c,\ -b+c)$$

De la 2da. y 4ta. componentes tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=0 \Rightarrow b=-a \\ -b+c=0 \Rightarrow c=b \end{array}\right\} \Rightarrow c = b = -a$$

Y de la primera y tercera componentes tenemos

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b+c+d=0 \Rightarrow d=-c-a=-(-a)-a=0 \\ -a-4b+2c=3 \Rightarrow -a+4a-2a=\mathbf{a = 3} \end{array}\right\} \Rightarrow d = 0 \text{ y } a = 3$$

Luego los coeficientes son: $\mathbf{a = 3,\ b = -3,\ c = -3,\ d = 0}$

Y así, podemos escribir al vector (0, 0, 3, 0) como:

$$(0, 0, 3, 0) = 3\ \mathbf{v_1} - 3\ (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) - 3\ \mathbf{v_3} + 0\ \mathbf{v_4}.$$

Considerando entonces la linealidad de f podemos calcular lo que nos piden:

$$f(0, 0, 3, 0) = f(3\ \mathbf{v_1} - 3\ (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) - 3\ \mathbf{v_3})$$

$$= 3\ \{ f(\mathbf{v_1}) - f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) - f(\mathbf{v_3}) \}$$

$$f(0,0,3,0) = f\left(3\ \mathbf{v_1} - 3(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) - 3\ \mathbf{v_3} \right)$$

$$(\text{por linealidad de f } \rightarrow) \quad = 3\left(\underbrace{f(v_1)}_{v_3} - \underbrace{f(v_1 - v_2)}_{0} - \underbrace{f(v_3)}_{0} \right) = 3v_3$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{f(0,\ 0,\ 3,\ 0) = 3\ v_3 = 3\ (1,\ 0,\ 2,\ 1)}$$

Uffff…. Al siguiente !

---

2. Sean $B = \{(1,0,1);(-1,0,1);(0,1,0)\}$ y $B' = \{(1,2,1,1);(0,1,2,1);(0,0,2,1);(0,0,0,1)\}$ y

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Encontrar $f^{-1}(1,2,-3,-2)$.

La función f actúa así $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ y su inversa f^{-1} de esta manera $f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Por lo tanto, una forma alternativa de calcular $f^{-1}(\mathbf{y})$ es encontrar para qu **x** pasa que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Resolverlo de esta forma resulta conveniente en este caso que lo que conocemos es la matriz de transformación de f y no de f^{-1}.

Pero tenemos que tener en cuenta que esta matriz de transformación, $M_{BB'}(f)$, actúa sobre vectores **x** expresados en la base B y nos devuelve vectores **y** escritos en la base B'. Esto es:

$$M_{BB'}\ f(\mathbf{x_B}) = \mathbf{y_{B'}}$$

Así que lo que debemos hacer es escribir nuestra $\mathbf{y} = (1, 2, -3, -2)$ en la base de salida.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y_{B'}} = (1, 2, -3, -2)_{B'}$$

$$= a\ (1, 2, 1, 1) + b\ (0, 1, 2, 1) + c\ (0, 0, 2, 1) + d\ (0, 0, 0, 1)$$

$$= (a, 2a + b, a + 2b + 2c, a + b + c + d)$$

O sea

$$\begin{cases} 1 = a & & \\ 2 = 2a + b & \Rightarrow b = 0 & \\ -3 = a + 2b + 2c & \Rightarrow -3 = 1 + 2c & \Rightarrow c = -2 \\ -2 = a + b + c + d & \Rightarrow -2 = 1 + c + d & \Rightarrow d = -1 \end{cases}$$

$$\therefore\ \mathbf{y}_{\mathbf{B'}} = (1, 2, -3, -2)_{B'} = (a, b, c, d) = (1, 0, -2, -1)$$

Y ahora sí, podemos hacer el producto considerando un $\mathbf{x}_\mathbf{B}$ con componenetes x_1, x_2, x_3 en la base B, las cuales vamos a determinar para que la igualdad efectivamente se cumpla:

$$M_{BB'}(f)(\mathbf{x})_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{y})_{B'}$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones a resolver

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 & \\ -x_2 + x_3 = -2 & \Rightarrow x_2 = x_3 + 2 \\ x_1 + 2x_3 = -1 & \Rightarrow x_1 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

Si reemplazamos estos valores en las otras 2 ecuaciones, vemos que ellas se cumplen para todo x_3 y no sólo para un valor en particular.

Entonces los vectores de la forma

$$(\mathbf{x})_\mathbf{B} = (-1 - 2x_3, x_3 + 2, x_3) = x_3\ (-2, 1, 1) + (-1, 2, 0) \text{ con } x_3 \in \Re$$

son llevados por f a $(\mathbf{y})_{B'} = (1, 0, -2, -1)$. Bien, ya casi tenemos la respuesta, sólo debemos expresar estos vectores en la base canónica, lo que no es complicado, porque ya conocemos los coeficientes que multiplican a los vectores de la base B. A ver:

$$(-2, 1, 1) \rightarrow -2\ (1, 0, 1) + 1\ (-1, 0, 1) + 1\ (0, 1, 0) = (-3, 1, -1)_B$$

$$(-1, 2, 0) \rightarrow -1\ (1, 0, 1) + 2\ (-1, 0, 1) + 0\ (0, 1, 0) = (-3, 0, 1)_B$$

$$\therefore \ \mathbf{x} = x_3 \ (-3, 1, -1) + (-3, 0, 1) \quad \text{con } x_3 \in \Re$$

Así que no tenemos una respuesta, tenemos infinitas !!!! Porque por cada valor distinto que de a la variable x_3 obtengo otro valor de $f^{-1}(1, 2, -3, -2)$. Pero como hoy día se trata de economizar en todo, también lo vamos hacer en las palabras… por eso reducimos estas quichicientas soluciones en un simple renglón:

$$f^{-1}(1, 2, -3, -2) = x_3 \ (-3, 1, -1) + (-3, 0, 1) \quad \text{con } x_3 \in \Re$$

FIN TRANSFORMACIONES LINEALES

NÚMEROS COMPLEJOS

Hasta ahora veníamos haciendo cuentas con números reales, y parecía que estaba todo bien. Pero ahora aparecen los números complejos. ¿ Para qué sirven estos números raros ? ¿ Hacen falta en serio o son un invento más de los matemáticos para complicar las cosas ?
Rta: Los números complejos se "inventaron" porque hay cuentas que no se pueden hacer con los números reales. Eso quizás suene medio raro, pero en realidad es lo mismo que venimos haciendo desde la primaria: cuando hay cuentas que no se pueden hacer, inventamos un tipo de números nuevos. Fijate:
Al principio, empezamos haciendo cuentas con los números naturales (N), o sea 1,2,3, ... Se llaman así porque son los que usamos para contar, y uno siempre sabe contar aunque no sepa nada de álgebra (es algo natural...). Pero cuando empezamos a trabajar con las operaciones más comunes (sumar, restar, multiplicar, dividir), vemos que hay cuentas muy simples que no se pueden hacer con los números naturales.

Por ejemplo, 2 – 5. Eso no se puede calcular, porque 5 es más grande que 2. Para arreglar eso, inventamos un nuevo conjunto de números: los números enteros (Z), que incluyen a los positivos y los negativos. Ahora sí, la cuenta 2 – 5 nos da como resultado -3.

También hay problemas con las divisiones. Por ejemplo 2/3 no se puede calcular, porque no da como resultado un número entero. Entonces, inventamos el conjunto de los números racionales (Q), que incluye todas las fracciones, positivas y negativas.

Cuando nos metemos con operaciones más complicadas, como las potencias y las raíces, también nos aparecen problemas, porque las raíces casi nunca dan como resultado una fracción. El ejemplo típico es $\sqrt{2}$. Como no se puede escribir como una fracción, decimos que es un número irracional (o sea, que no es racional, que no está en Q). Y como los números irracionales aparecen mucho (por ejemplo, π es un número irracional), inventamos el conjunto de los números reales (R).

Pero con los números reales no está todo arreglado, porque sigue habiendo muchas cuentas que no se pueden hacer: dividir por cero, raíces pares de números negativos, log(0), y muchas más. Con los números complejos (C) arreglamos el tema de las raíces de números negativos. Para eso, definimos un nuevo número "i" que cumple que

$$i^2 = -1$$

Fijate que "i" no puede ser un número real, porque cualquier número real elevado al cuadrado da como resultado un número positivo (o cero). Entonces, como no es un número real, decimos que es un número **imaginario**.

Todos los múltiplos de "i" también son imaginarios, porque cuando los elevamos al cuadrado dan como resultado un número negativo. Fijate que, si k es un número real nos queda:

$$(k \,.\, i)^2 = k^2 \,.\, i^2 = k^2 \,(-1) = -\,k^2$$

Como $k \in R$, k^2 es positivo (o cero) y $-k^2$ es negativo. Entonces, definimos como número imaginario a cualquier múltiplo de "i".

Ahora que ya sabemos qué es un número imaginario, veamos una definición más o menos formal de complejos.

NÚMEROS COMPLEJOS. DEFINICIÓN

Se define como un número complejo, a la suma de un número real y otro imaginario. O sea que z es un número complejo ($z \in C$) si se lo puede escribir como

$$z = a + b \,.\, i$$

En la expresión $z = a + b \,.\, i$, a y b son números reales.
Veamos ahora un par de definiciones más:

- La **parte real** de z es $Re(z) = a$. Cuando $a = 0$, decimos que $z = b \,.\, i$ es un número imaginario puro, porque su parte real es 0.

- La **parte imaginaria** de z es $Im(z) = b$. Cuando $b = 0$, nos queda $z = a$, que es un número real. Esto quiere decir que los números reales son solamente un caso particular de los números complejos (cuando $Im(z) = 0$). Esto no es tan sorprendente, es lo mismo que cuando vimos por primera vez los números enteros: los naturales son solamente un caso particular de los enteros.

Sumar, restar o multiplicar dos números complejos no tiene mucho secreto: es exactamente lo mismo que con los números reales, acordandote que $i^2 = -1$. Veamos algunos ejemplos:

- $z = (1 + 2i) \,.\, (-4 - i) = ?$

Distribuimos el producto de los dos paréntesis como:

$z = (1 + 2i) \,.\, (-4) - (1 + 2i) \,.\, (i) = -4 - 8i - i - 2 \,.i^2 = -4 - 9i + 2 \quad \Rightarrow \quad z = -2 - 9i$

- $z = (2 + i) \quad .\, (5 - 3i) - (4 - 2i) = ?$

$z = 2 \,.\, (5 - 3i) + i \,.\, (5 - 3i) - 4 + 2i = 10 - 6i + 5i - 3i^2 - 4 + 2i$

$$\Rightarrow z = 9 + i$$

CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El conjugado de un complejo z = a + bi se define como:

$$\bar{z} = a - bi$$

O sea, todo lo que hicimos fue cambiar el signo de la parte imaginaria. Ya vamos a ver de qué sirve, por ahora veamos qué propiedades tiene.

1) Es distributivo con la suma, resta, producto y división (siempre que no se divida por cero). O sea, que el conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados, y lo mismo con la resta, el producto y la división

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

2) $z + \bar{z} = 2 \cdot a = 2 \cdot Re(z)$

3) $z - \bar{z} = 2 \cdot b \cdot i = 2 \cdot Im(z) \cdot i$

4) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = [Re(z))^2 + (Im(z)]^2$

Estas últimas tres propiedades se pueden demostrar muy fácil: solamente hay que hacer la cuenta y ver que son verdad.

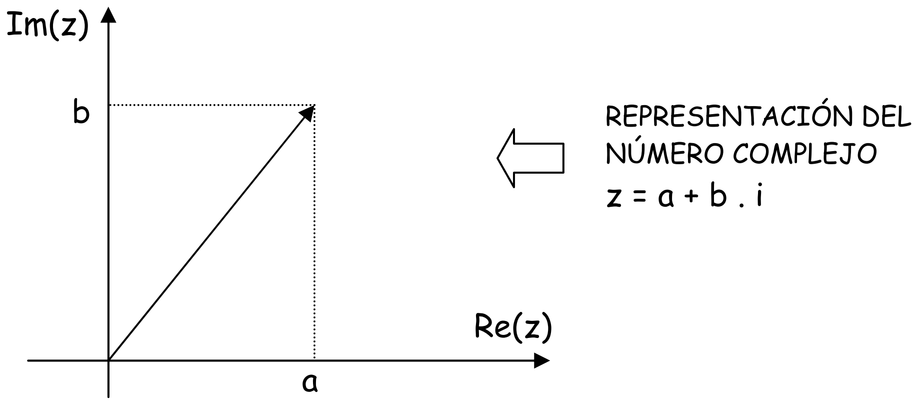
Plano complejo

El plano complejo es el equivalente a la "recta real" en el caso de los números complejos. ¿ Cómo era eso?

- En la recta real aparecen todos los números reales positivos y negativos ordenados de menor a mayor.
- Y en los complejos es lo mismo?
- Es algo parecido, pero no es lo mismo. Una propiedad muy importante de los complejos es que **no están ordenados**, o sea que no se puede decir que un complejo sea más grande o más chico que el otro. (Atento !). Entonces lo que hacemos es ubicarlos en un plano.

  Para eso, hacemos un gráfico con dos ejes: en uno ponemos la parte real de z (eje real), y en el otro la parte imaginaria (eje imaginario). Lo bueno de esto es que como Re(z) y Im(z) son números reales, los dos ejes son algo así como "dos rectas reales" porque sí están ordenados.

  El gráfico es una cosa así:



O sea que a cada número le corresponde un punto en el plano complejo. Y ese punto lo podemos representar por un vector de R^2. Entonces, el número z = a + b . i corresponde al vector (a,b). Esto sirve solamente para tener una interpretación "geométrica" de los números complejos: podemos pensarlos como vectores en un plano

MÓDULO Y ARGUMENTO

Hasta ahora venimos escribiendo a los números complejos como z = a + b .i. Esta forma de escribirlos se llama la **forma binómica** de z ("bi" quiere decir dos: es la suma de dos términos, uno real y otro imaginario).

Pero no es la única forma de escribir un número complejo. Como vimos que son algo así como vectores de R^2, para decir cuánto vale z tenemos que dar dos números.

- Y bueno, esos dos números son la parte real y la parte imaginaria
- Sí, está bien. Esa es una forma (la binómica). Pero también podemos dar otros dos datos de z. La más común es con el módulo y el argumento.

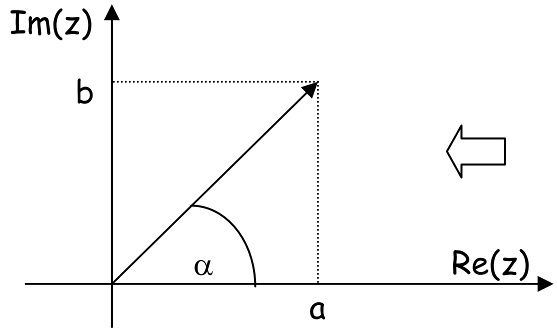
- El **módulo** de un complejo z = a + b . i es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

  Fijate que el módulo de un complejo no es otra cosa que la norma del vector (a,b). O sea, nos está diciendo la longitud de ese vector. De alguna forma, significa lo mismo que para los números reales: el módulo es la distancia al cero.

  Nota: $|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$

- El **argumento** de un complejo z = a + b . i es el ángulo que forma el vector (a,b) con el eje real. Acordate que los ángulos se miden en el sentido antihorario (o sea, al revés que como giran las agujas del reloj).

Veámos todo esto en un gráfico.



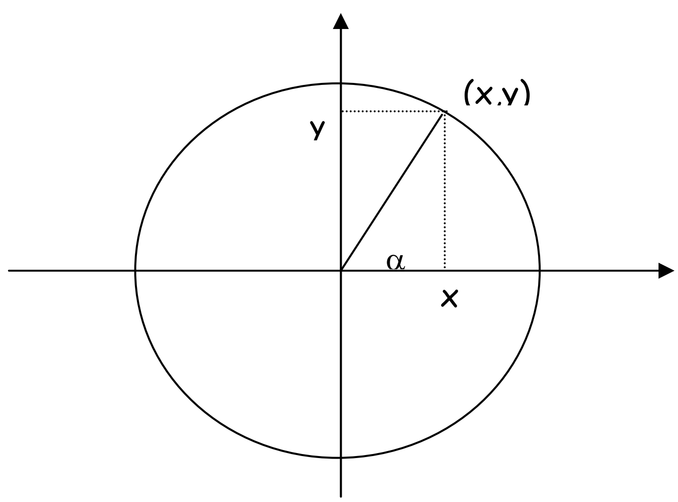
Entonces, el argumento de z es el ángulo α. Bueno, ¿ y cómo se calcula ?
Rta: No es tan simple. Antes repasemos un poco de ángulos y trigonometría.

Antes que nada, veamos un poco cómo medimos los ángulos. Hasta ahora, los venimos usando el sistema sexagesimal: o sea, con grados, minutos y segundos (1 grado son 60 minutos y un minuto son 60 segundos). Así, un ángulo recto mide 90°, y uno llano mide 180°. Este sistema se inventó porque 60 es el número menor que cien con mayor cantidad de divisores. Entonces, es más fácil hacer cuentas.

Pero una vez que se inventó la calculadora, dejó de ser importante que las cuentas sean fáciles, total las hace una máquina. Entonces, se buscó un nuevo sistema que arregle las pequeñas fallas del sistema sexagesimal:

- hay que manejarse con unidades (grados, minutos, segundos); y pasar de una a otra es engorroso (hay que hacer muchas cuentas)
- El ángulo más grande que hay es 360°, que sería todo un círculo.

Para eso se inventó el sistema de **radianes.** Ahora los ángulos se definen distinto. En el sistema sexagesimal, 1 grado se define como 1/90 de un ángulo recto (que entonces mide 90°). Ahora, se definen a partir de una circunferencia.



Definimos los ángulos a partir de la relación entre el arco de circunferencia y el radio, así:

$$\alpha = \textbf{longitud arco / radio}$$

Fijate que α no tiene unidades de nada porque las longitudes están en metros. Entonces, las unidades son m/m = 1. Un ángulo de 1 radián es aquel donde el arco y el radio son iguales. Pero como suena muy mal eso, decimos que ese ángulo mide 1 radián.

- Y cómo paso un ángulo en radianes a grados ?
- Para eso necesitamos saber cuánto vale algún ángulo en particular. Lo más fácil es tomar la circunferencia entera, o sea un ángulo de 360º.

- ¿ Cuánto vale en radianes?

Muy fácil. Usamos la fórmula anterior y nos queda:

$$\alpha = \text{long. circunferencia / radio} = 2\,\pi\,.\ \text{radio / radio} = 2\,\pi$$

O sea que 360º es lo mismo que 2π radianes. O sea que un radián equivale a

$$1 \text{ radián} = 360 / 2\pi = 57{,}29577...\ ^{\circ}$$

Pero no hace falta que te acuerdes ese número feo. Nada más acordate que 2π es lo mismo que 360º. Y a partir de ahí podés sacar cualquier ángulo.
Por ejemplo, 180º es π; 90º es $\pi/2$; 60º es $\pi/3$ .....

Ya vimos que no tenemos más el problema de las unidades. Tampoco tenemos el problema de ángulos mayores a 360º. Ahora está todo bien: un ángulo de 540º (o sea, de 3π radianes) equivale a una circunferencia y media.

- ¿ Pero entonces 180º (π) es lo mismo que 540º (3π) ?
- No, no es lo mismo. Pensá en una carrera de atletismo. No es lo mismo dar media vuelta (180º) que una vuelta y media (540º). Es verdad que terminás en el mismo lugar, pero recorriste más distancia. Entonces de alguna forma, los ángulos "se repiten" cada 2π.

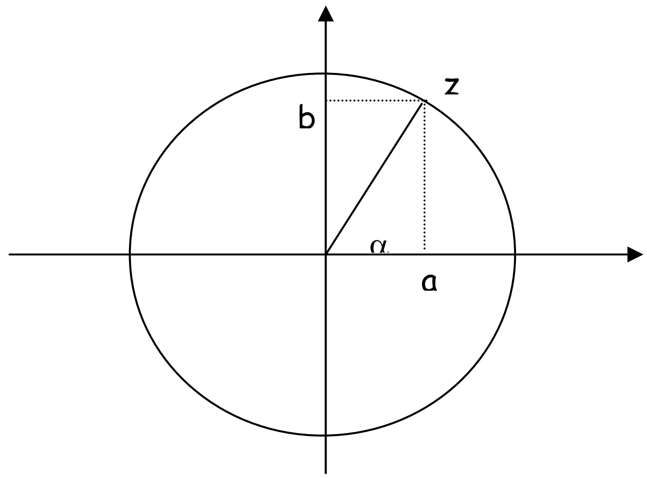
Fijate en la circunferencia de la página anterior, de radio R. A cada ángulo a le corresponde un punto (x,y) de la circunferencia. A partir de esto, se definen las tres funciones trigonométricas básicas, que van a aparecer todo el tiempo.

$$\text{sen}\,\alpha = y / R \quad ; \quad \cos\alpha = x / R\,; \qquad \text{tang}\,\alpha = y / x$$

Así nomás de la definición, salen dos propiedades de estas funciones que se usan mucho:

1) $(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ >>>>>> también se escribe como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2) $\text{tang}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha / \cos\alpha$

Ahora que ya repasamos un poco, volvamos a nuestro tema: ¿cómo calculamos el argumento de un número complejo ? Veamoslo en el plano complejo:



A cada punto z = (a,b) = a + b .i , lo podemos poner sobre una circunferencia de radio |z|. Entonces, fijate que en las definiciones de seno y coseno de un ángulo. Queda así:

$$\text{Cos}\,(\alpha) = a \,/\, |z| \quad \text{y} \quad \text{sen}\,(\alpha) = b \,/\, |z|$$

El argumento de z es el valor de α que verifica esas dos ecuaciones al mismo tiempo.

- Pero, ... hay un problema. Antes te dije que los ángulos de alguna forma se "repiten" cada 2π. Entonces, hay infinitas soluciones de esas ecuaciones
- Es verdad. Como nos tenemos que quedar con una sola, nos quedamos con la que está en el intervalo $[0\ ,\ 2\pi)$. O sea, a es mayor o igual que cero y menor que 2π.
- En ese intervalo, la solución es única.

Fijate que si dividimos la segunda ecuación por la primera nos queda:

$$\text{tang}\alpha = b \,/\, a = \text{Im}\,(z) \,/\, \text{Re}\,(z)$$

Veamos un ejemplo:

- Hallar el módulo y el argumento de z = 3 + 4 . i
  El módulo es siempre la parte más fácil. Nos queda:

$$|z| = \sqrt{3^2+4^2} \qquad \Rightarrow |z| = 5$$

Ahora el argumento. Es el valor de a entre 0 y 2π que cumple las dos ecuaciones:

$$\cos\alpha = 3/5 \quad ; \quad \text{sen}\alpha = 4/5$$

Para resolver esto, nos conviene dividir la segunda ecuación por la primera:

$$\text{sen}\alpha / \cos\alpha = {}^4/_5 \;\; / \;\; {}^3/_5$$

$$\text{>>>>>} \quad \text{tang}\alpha = 4/3$$

Para resolver esto, tenemos que "pasar la tangente al otro miembro". Para eso existen las funciones inversas a las trigonométricas. En este caso, usamos la función arco tangente, (a veces se la llama tang^{-1}). Esta función resuelve el problema:

$$\text{tang}\alpha = 4/3 \quad \text{>>>>>} \; \alpha = \text{tang}^{-1}(4/3) = 53° = 0{,}925 \text{ radianes}$$

Y listo, eso es todo. Ahora que tenemos el módulo y el argumento, podemos escribirlo como:

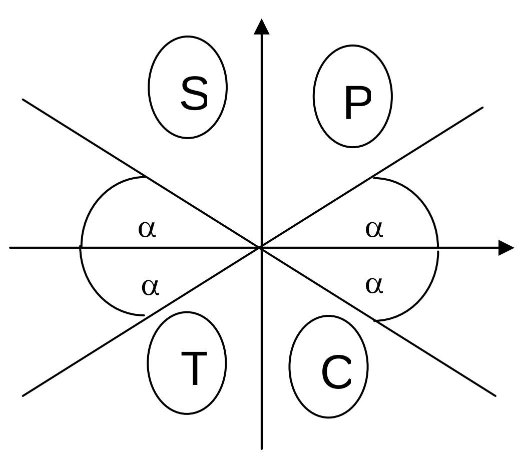
$$z = 3 + 4.i = 5 \,.\, (\cos 53° + i \,.\, \text{sen } 53°)$$

Esta última es la **forma trigonométrica de z**., justamente porque aparecen el seno y el coseno (funciones trigonométricas) del argumento. Encontrar la forma binómica a partir de la trigonométrica no tiene ningún secreto, todo lo que hay que hacer es calcular el seno y el coseno.

- Encontrar la forma trigonométrica de $z = -3 - 4.i$

Haciendo las mismas cuentas de antes, llegamos a que $|z| = 5$, y que $\text{tang}\alpha = 4/3$
Si usamos la arco tangente, llegamos al mismo resultado de antes. Y eso no puede ser, porque los dos números son distintos, entonces no pueden tener el mismo módulo y el mismo argumento. Claro, pasa que nos estamos olvidando de algo.
La ecuación $\text{tang}\alpha = 4/3$ tiene dos soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$

- Pero la arco tangente nos da una sola solución. ¿Cómo encontramos la otra?
- Por cada ángulo a entre 0 y 2π hay dos ángulos para los que el seno, el coseno y la tangente valen lo mismo y otros dos con el signo cambiados. Algo así



- ¿ Y cómo sabemos en qué cuál es el positivo y cuál el negativo ?
- Ah, para eso hay una regla que sirve mucho:

- En el **P**rimer cuadrante, todas las funciones son **P**ositivas
- En el **S**egundo cuadrante, solamente el **S**eno es positivo, y el resto negativos
- En el **T**ercero, la **T**angente es positiva
- En el **C**uarto, el **C**oseno es positivo, y los demás negativos

Se entendió la reglita ? Bueno, en este caso, estamos buscando que la tangente sea positiva. Entonces, el resultado puede estar en el primer o en el tercer cuadrante.

Por eso siempre conviene ubicar primero al número en el plano complejo. Como las a y b (las partes real e imaginaria) son negativas, está en el tercer cuadrante. Entonces, el argumento es $53° + 180° = 233° = 4{,}066$ radianes.

$$z = -3 - 4 \cdot i = 5 \cdot (\cos 233° + i \cdot \text{sen } 233°)$$

Por últimos, veamos cuáles son los argumentos en casos muy simples:

- Los números reales tienen argumento 0 si son positivos o $180° = \pi$ si son negativos. ¿Y si es cero? Bueno, el número $z = 0$ es el único que no tiene argumento. Eso es porque, como su módulo es $|0| = 0$, no importa cuál sea el valor de α
- Los números imaginarios puros tienen argumento $90° = \pi/2$ si son positivos, o $270° = 3\pi/2$ si son negativos.

Esto que hicimos recién de pasar de la forma binómica a la trigonométrica se hace mucho; y no solamente para números complejos sino para cualquier vector de R^2.

En definitiva, hicimos un cambio de coordenadas, porque en vez de manejarnos con (x,y), trabajamos con el módulo y el ángulo. Esto se llama pasar de coordenadas rectangulares (x,y) a **polares**. Y se usa mucho, en especial cuando son problemas con circunferencias, donde el módulo es una constante (el radio) y sólo cambia el ángulo.

PRODUCTO ENTRE COMPLEJOS

La suma y la resta de complejos se puede hacer muy fácil con la forma binómica; pero el producto no es tan fácil. Es mucho más simple multiplicar trabajando con la forma trigonométrica. Hay un teorema, llamado "Teorema de De Moivre" que dice que si z y w son dos números complejos con argumentos a y b respectivamente:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta))$$

O sea que el módulo del producto es igual al producto de los módulos; y el argumento es igual a la suma de los argumentos.

<u>OJO</u>: si esta suma es mayor que 2π (o menor que 0), hay que restarle (o sumarle) 2π; porque acordate que el argumento tiene que ser un número entre 0 y 2π

Este teorema no es para nada difícil de demostrar. Todo lo que hay que hacer es multiplicar los dos números a partir de su forma trigonométrica; y ver que da ese resultado. Para eso hay que usar las fórmulas del coseno de la suma de dos ángulo, y lo mismo para el seno; por eso no te lo muestro, pero no es nada complicado.

Veamos algunos ejemplos:

- $(\sqrt{2} + \sqrt{2} . i) . (-3 + 4 . i) = ?$
  Tenemos el producto de dos complejos:

$z = \sqrt{2} + \sqrt{2} . i = 2 . (\cos (45^\circ) + i . \text{sen} (45^\circ))$ y

$w = -3 + 4.i = 5 . (\cos (127^\circ) + i . \text{sen} (127^\circ))$

Como dijimos antes, el módulo del resultado es $|z . w| = |z| . |w| = 2 . 5 = 10$
Y el argumento es $45^\circ + 127^\circ = 172^\circ$. Entonces, el resultado es:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2} . i) . (-3 + 4 . i) = 10 . (\cos 172^\circ + i . \text{sen } 172^\circ)$$

Así de simple. Ahora veamos: ¿qué pasa si multiplicamos por un número de módulo 1 y argumento α ?

El módulo no cambia, porque todo lo que hacemos es multiplicar por 1. Pero sí cambia el argumento porque le estamos sumando α. Entonces, todo lo que hicimos fue girar el número complejo un ángulo α.
Por ejemplo, si multiplicamos $(3 + 2.i) . i$, todo lo que hicimos fue rotar $(3 + 2 . i)$ un ángulo de 90°, porque el argumento de i es 90°. Esto refuerza la idea de la interpretación geométrica de los números complejos como vectores de R^2.

<u>**COCIENTE ENTRE COMPLEJOS**</u>

Antes que nada, dejemos en claro que igual que en los números reales, no se puede dividir por 0. Ese es un principio básico de la matemática, y todo va a cambiar el día que se descubra cómo dividir por cero. Entonces, a partir de ahora, siempre que diga "dividimos por z", estamos suponiendo que z no es 0.

- ¿Te acordás de cuando vimos el conjugado, que vimos unas cuántas propiedades pero no para qué sirve? Bueno, uno de los usos que tiene es para dividir.
- ¿Cómo es eso?

Una de las propiedades más importantes del conjugado es que:

$$z . \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \qquad \Rightarrow z . (\bar{z} / |z|^2) = 1$$

O sea que encontramos un números que cuando lo multiplicamos por z nos da 1. Eso no es otra cosa que el **inverso multiplicativo de z**, y se escribe z^{-1}.

$$z^{-1} = \bar{z} \;/\; |z|^2$$

Para entenderlo un poco mejor, pensémoslo en los números reales. (Acordate que los números reales son un caso particular de los complejos).
El inverso multiplicativo de 3 es $3^{-1} = {}^1/_3$. Esto quiere decir que si yo quiero dividir por 3, tengo que multiplicar por ${}^1/_3$. O sea que 8/3 = 8 . ${}^1/_3$. Entonces, estamos diciendo que dividir por z es lo mismo que multiplicar por z-1. Veamos algún ejemplo en los complejos:

- Calcular w/z con w = 3 + i y z = 1 – i

Lo primero que hay que hacer es calcular z^{-1}.

$$\bar{z} = 1 + i \quad ; \; |z|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow z^{-1} = (1 + i) \;/\; 2$$

Ahora que tenemos el inverso multiplicativo de z, hacemos la cuenta:

$$w/z = w \;.\; z^{-1} = (3 + i) \;.\; (1 + i)/2 \quad = (3 + i + 3i + i^2) \;/2$$

$$\Rightarrow w/z = 1 + 2\,i$$

Bueno, eso no fue tan complicado. Pero si fuera un ejercicio con números no tan simples, o si hubiera que hacer muchas divisiones seguidas, se complicaría más.

Para eso hay un método más fácil, trabajando con la forma trigonométrica; o sea, con el módulo y el argumento. La idea es la misma, multiplicar por z^{-1}. Pero veamos:

- El módulo de z^{-1} es :

  $|z^{-1}| = |\bar{z}| \;/\; |z|^2 = |z| \;/\; |z|^2$ >>>>> $|z^{-1}| = 1 \;/\; |z| = |z|^{-1}$

- También podemos calcular el argumento, así:
  $z \;.\; z^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \arg(z) + \arg(z^{-1}) = \arg(1) = 0$

$$\Rightarrow \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$$

<u>Nota</u>: como z^{-1} es un múltiplo de $\bar{z}$, también se cumple que $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

O sea que si $z = |z| \;.\; (\cos\alpha + i \;.\; \mathrm{sen}\,\alpha)$ >>>>

$$z^{-1} = 1/|z| \cdot (\cos(-a) + i \cdot \text{sen}(-a))$$

Entonces veamos cómo queda la división de dos complejos w /z con:

$$w = |w| \cdot (\cos \beta + i \cdot \text{sen}\, \beta) \quad ; \quad z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \text{sen}\, \alpha)$$

$$w/z = w \cdot z^{-1} = |w| \,/\, |z| \cdot (\cos(\beta-\alpha) + i \cdot \text{sen}(\beta-\alpha))$$

Fijate que nos quedó algo muy parecido al producto:

- El módulo de un producto es igual al producto de los módulos. Bueno, con la división es lo mismo pero al revés: el módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos
- El argumento de un producto es igual a la suma de los argumentos: para la división es al revés, nos da la resta de ambos argumentos.

Veamos cómo nos queda la división del ejemplo anterior con este método:

- Calcular w/z con w = 3 + i y z = 1 – i

Lo primero que hay que hacer es pasar ambos números a su forma trigonométrica. Esto te dejo que lo hagas vos, te paso los resultados. Nos quedan así:

$$w = \sqrt{10} \cdot (\cos 18{,}4° + i \cdot \text{sen}\, 18{,}4°) \; ; \quad z = \sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \cdot \text{sen}\, 315°)$$

$$w/z = \sqrt{10} \,/\, \sqrt{2} \cdot (\cos(18{,}4°-315°) + i \cdot \text{sen}(18{,}4° - 315°))$$

$$w/z = \sqrt{5} \cdot (\cos -296{,}6° + i \cdot \text{sen}-296{,}6°)$$

<u>OJO</u>: acordate que el argumento es un número entre 0 y 2π (o sea entre 0 y 360°). Entonces, tenemos que sumarle 2π (360°), y nos queda -296,6° + 360° = 63,4°

$$w/z = \sqrt{5} \cdot (\cos 63{,}4° + i \cdot \text{sen}\, 63{,}4°) = 1 + 2 \cdot i$$

Llegamos al mismo resultado. O sea que las dos formas valen. Elegí la que más te guste. Cuando hay que hacer una división muy simple, quizás convenga hacerlo con la forma binómica; pero por lo general siempre conviene manejarse con el módulo y el argumento.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Ya vimos que los números complejos se pueden escribir de dos formas: la binómica (con la parte real y la imaginaria) y la trigonométrica (con el módulo y el argumento).

La notación exponencial es como un forma resumida de la trigonométrica. Si z es un complejo de módulo $|z|$ y argumento α, se escribe:

$$z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) = |z| \cdot e^{i\alpha}.$$

Esta notación es mucho más simple para las divisiones y productos, porque todo lo que hay que hacer es sumar (si es producto) o restar (si es división) los exponentes. Veamos algunos ejemplos:

- $w = 3 \cdot e^{i\pi} = -3$; $z = 2 \cdot e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3} \cdot i$

$w \cdot z = 3 \cdot e^{i\pi} \cdot 2 \cdot e^{i\pi/3} = 6 \cdot e^{i4\pi/3} = 6 \cdot (\cos 4\pi/3 + i \cdot \operatorname{sen} 4\pi/3) = -3 - 3 \cdot \sqrt{3}\, i$

$w / z = 3 \cdot e^{i\pi} / (2 \cdot e^{i\pi/3}) = 3/2 \cdot e^{i2\pi/3} = 3/2 \cdot (\cos 2\pi/3 + i \cdot \operatorname{sen} 2\pi/3)$

$$\Rightarrow w/z = -3/4 + 3/4 \cdot \sqrt{3}\, i$$

No tiene más secreto, y sirve mucho para productos y cocientes.

POTENCIAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

La potencia es multiplicar un número por sí mismo. Por ejemplo,

$$z^2 = z \cdot z; \quad z^3 = z \cdot z \cdot z$$

En general, $z^n = z \cdot z \,.....\, z$, n veces. Entonces, si aprendiste bien cómo es el producto no vas a tener problema con la potencia. Las potencias grandes son difíciles de calcular con la forma binómica. Por ejemplo, para calcular $(1 + i)^8$, hay que multiplicar 1 + i por sí mismo 8 veces, y eso es muy complicado. Por eso, siempre se trabaja con la forma trigonométrica (o la notación exponencial, que es lo mismo); excepto para calcular z^2, que se puede hacer con la forma binómica, porque no son tantas cuentas. Con la notación exponencial es más fácil:

$$z^n = (|z| \cdot e^{i\alpha})^n = |z|^n \cdot e^{in\alpha}$$

Esto es muy fácil. Entonces, la única parte difícil de calcular una potencia es pasar primero el número complejo a la forma trigonométrica o exponencial. Algunos ejemplos:

- Calcular z^6 con $z = \sqrt{3} + i$

Primero buscamos la forma exponencial. Para eso necesitamos:

- el módulo: $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

- el argumento α: tang α = Im(z) / Re(z) = 1 / √3.

  Como α es un ángulo del primer cuadrante, nos queda a = 30° = $\pi/6$

El número z en forma exponencial es $z = 2 \cdot e^{i\pi/6}$. Y ahora es muy simple.

$$z^6 = (2 \cdot e^{i\pi/6})^6 = 2^6 \cdot e^{6 \cdot i\pi/6} = 64 \cdot e^{i\pi} = 64 \cdot (\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$$

$$\rightarrow \underline{z^6 = -64}$$

RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO

La radicación es la operación inversa de la potencia. O sea, que si decimos que $z = \sqrt[7]{2}$, queremos decir que $z^7 = 2$.

- Ah, entonces si sé como calcular potencias, también se cómo calcular raíces: es la operación inversa.
- Sí, pero no es tan simple. Para los números reales sí es así de simple, porque las raíces son únicas. Quiero decir que hay un sólo número real tal que $x^3 = 8$, y es
- x = 2. Esto quiere decir que la raíz cúbica de 8 es única y vale 2.
- ¿ Y en los complejos no es única ?
- No. Por ejemplo, existen tres raíces cúbicas de 8. Además de x = 2, hay dos soluciones más. Quizás suene raro, pero es así. Es más, en general, hay n raíces n-ésimas distintas de cualquier número complejo. Esto es muy poco intuitivo, pero ya lo vamos a ver mejor. Veamos cómo se calculan las raíces.

Dijimos que es la operación inversa de la potencia. O sea que, si la $z^{1/n} = w$, quiere decir que $w^n = z$. Una vez más, es mucho más fácil con la forma exponencial. Si α es el argumento de w y β es el argumento de z nos queda:

$$w^n = z \quad \Rightarrow |w|^n \cdot e^{in\alpha} = |z| \cdot e^{i\beta}.$$

Para que dos números complejos sean iguales, tienen que ser iguales los módulos y los argumentos tienen que diferir en un múltiplo de 2π (acordate que los ángulos se "repiten" cada 2p, porque el seno y coseno valen lo mismo). Entonces tenemos dos ecuaciones:

$$|w|^n = |z| \qquad y \qquad n \cdot \alpha = \beta + 2 \cdot k \cdot \pi \qquad \text{donde k es un número entero.}$$

La primera ecuación es fácil, porque los módulos son números reales. La solución es

$$|w| = |z|^{1/n}.$$

La segunda ecuación nos queda:

$$\alpha = (\beta + 2\,k\pi) / n$$

Entonces vemos que hay más de 1 solución, porque k puede tomar muchos valores. Es más, en principio hay infinitas soluciones, porque k es cualquier número entero.

Pero en realidad, no hay más de n soluciones distintas. Porque después de n valores de k, se empiezan a repetir, ya que si los argumentos difieren en un múltiplo de 2π es como si fueran iguales. Para entender mejor esto, veamos un ejemplo:

- Calcular todas las raíces cúbicas de 1.

O sea, buscamos números complejos $w = |w| \cdot e^{i\alpha}$ tales que $w^3 = 1$

$$|w| = |1|^{1/3} = 1^{1/3} = 1$$

$$\alpha = (\arg(1) + 2k\pi)/3 = (0 + 2k\pi)/3 = 2/3\, k\pi$$

En principio, k es un número entero cualquiera. Pero en realidad no puede tomar cualquier valor, porque a (el argumento de w) tiene que estar entre 0 y 2π. Entonces, k puede tomar solamente tres valores:

$$k_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow w_1 = 1 \cdot e^{i0} = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0) \Rightarrow w_1 = 1$$

$$k_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 2\pi/3 \Rightarrow w_2 = 1 \cdot e^{i2\pi/3} = 1 \cdot (\cos 2\pi/3 + i \cdot \operatorname{sen} 2\pi/3)$$

$$\Rightarrow w_2 = -{}^1/_2 + \sqrt{3}/2\, i$$

$$k_3 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = 4\pi/3 \Rightarrow w_3 = 1 \cdot e^{i4\pi/3} = 1 \cdot (\cos 4\pi/3 + i \cdot \operatorname{sen} 4\pi/3)$$

$$\Rightarrow w_3 = -{}^1/_2 - \sqrt{3}/2\, i$$

Si tomamos k = 3 nos da exactamente el mismo resultado que con k = 0. Eso es lo que dijimos antes: las raíces se empiezan a "repetir" después de n valores de k.

Y con esto podemos resolver muchas ecuaciones con números complejos. No hace falta saber nada más. Veamos un ejemplo más y ya terminamos:

- Encontrar todos los valores de $z \in C$ tales que $z^3 = (1 + i)^6$

Lo primero que uno piensa en hacer es pasar el 3 para el otro miembro como raíz cúbica y simplificarla con el seis. Nos quedaría algo así:

$$z^3 = (1 + i)^6 \Rightarrow z = (1 + i)^2$$

Pero acá hay un problema: llegamos a una solución única, y eso no puede ser. Si estamos calculando una raíz cúbica, tiene que haber tres soluciones distintas. Entonces, no podemos simplificar así nomás. Mejor calculemos primero cuánto vale $(1 + i)^6$.

Para eso, primero escribimos 1 + i en su forma exponencial: $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4.}$

$$(1 + i)^6 = (\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4})^6 = 2^3 \cdot e^{6i\pi/4} = 8 \cdot e^{i3\pi/2} = - 8 \cdot i$$

Nos quedó para resolver $z^3 = 8 \cdot e^{i3\pi/2}$. O sea, tenemos que calcular las tres raíces cúbicas de ese números. Para eso necesitamos:

- el módulo: $|z| = 8^{1/3} = 2$
- el argumento: $\arg(z) = \alpha = (3\pi/2 + 2k\pi)/3 = \pi/2 + 2/3\ k\pi$

k es un número entero, que puede tomar 3 valores (porque son raíces cúbicas). Y como α tiene que estar entre 0 y 2π, los únicos valores para k son 0, 1 y 2 (si k es más grande o más chico, α queda afuera del intervalo $[0,2\pi]$)

$k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \pi/2 \Rightarrow z_1 = 2 \cdot e^{i\pi/2} = 2 \cdot (\cos\pi/2 + i \cdot \text{sen}\,\pi/2)$

$$\Rightarrow z_1 = 2.i$$

$k = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 7\pi/6 \Rightarrow z_2 = 2 \cdot e^{i7\pi/6} = 2 \cdot (\cos 7\pi/6 + i \cdot \text{sen}\,7\pi/6)$

$$\Rightarrow z_2 = -\sqrt{3} - i$$

$k = 2 \Rightarrow \alpha_3 = 11\,\pi/6 \Rightarrow z_3 = 2 \cdot e^{i11\pi/6} = 2 \cdot (\cos 11\pi/6 + i \cdot \text{sen}\,11\pi/6)$

$$\Rightarrow z_3 = \sqrt{3} - i$$

Entonces, las tres soluciones son $z_1 = 2.i$; $z_2 = -\sqrt{3} - i$ y $z_3 = \sqrt{3} - i$.

NÚMEROS COMPLEJOS - RESUMEN

No existe una única forma de escribir a los **números complejos z**, pero esto no es para confusión, al contrario, es conveniente manejarse bien con todas las representaciones pues esto nos permite luego tener más opciones a la hora de encarar un problema, pues saber elegir en qué notación trabajar suele simplificar muchísimo el trabajo. Vamos entonces a repasar o conocer las distintas formas de escribir este mismo N°:

REPRESENTACIÓN BINÓMICA.

Expresamos al número z como suma de un término real y otro puramente imaginario:

$$z = x + iy, \qquad \text{donde } x \text{ e } y \in \Re$$

Y es por esto entonces que se dice que x es la parte real de z, esto es: $x = \text{Re}(z)$ y del mismo modo que $y = \text{Im}(z)$ es la parte imaginaria de z (← ojo ! La notación $y = \text{Im}(z)$ no tiene nada que ver con la imagen de una función !!).

En esta notación, el **módulo** del número se obtiene tomando la raíz a la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria, esto es:

$$|z| = \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

El **complejo conjugado** $\bar{z}$ de z, se obtiene cambiando la parte Im(z) por –Im(z), es decir

$$\bar{z} = x - i\,y$$

REPRESENTACION TRIGONOMÉTRICA.

Escribimos a z en función de un radio r y un ángulo polar θ: $z = r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Donde

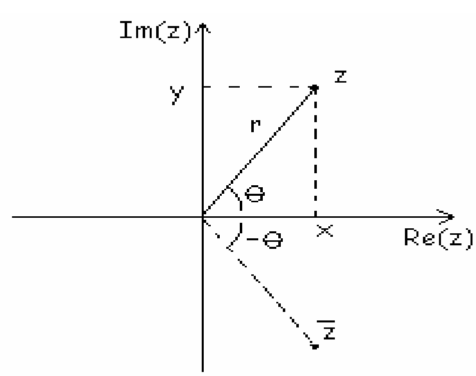
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ y como vimos } \rightarrow \quad r = |z| \text{ es la longitud del n° complejo.}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \rightarrow \quad \theta = \text{Arg}(z) \text{ es el argumento del complejo.}$$

y en esta notación el complejo conjugado se escribe $\bar{z} = r\,(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Es fácil representar a z gráficamente, veamos... Consideremos el espacio bidimensional, es decir, un plano. Coloquemos un eje coordenado, xy, donde decimos ahora que el eje de las x representa el eje real y el de las y, el eje imaginario. Ya dijimos cómo obtener r, la longitud del vector que parte desde el origen, pero hacia dónde? Esto es fácil de responder si conocemos θ (o cómo calcularlo) pues éste es el ángulo que forma el vector con respecto al eje real. Veamos el dibujito :



Del gráfico podemos ver un "detalle" muy importante: hay infinitas formas de describir al mismo nº complejo z. Del gráfico vemos eso ?? Infinitas ???!!!

Rta: Sí! Fijate, marquemos en el mismo plano el nº $z' = r\,(\cos(\theta + 2\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta + 2\pi))$. No es exactamente el mismo que z ? sí, porque dimos una vuelta entera y llegamos al mismo punto. (Acordate que 2π es equivalente a 360 grados, por lo que cambiar el valor de θ en 2π es lo mismo que sumarle una vuelta, después de la cuál caemos en el mismo punto que al comienzo...) Y si en vez de una damos 2, 3, 4, 1000 ??? Es lo mismo. De modo que si sumamos al argumento de un Nro. complejo múltiplos de 2π, vamos a seguir hablando del mismo número.

REPRESENTACIÓN EXPONENCIAL.

Como en la forma anterior, de nuevo escribimos a z en función de un radio r y un ángulo polar θ:

$$z = r\, e^{i\theta}, \qquad \text{donde } e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$$

El módulo de z es r (siempre positivo eh ?!!!), pues para cualquier argumento (ángulo) pasa que

$$\left| e^{i\theta} \right| = |\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\mathrm{sen}\theta)^2} = 1 \quad ,$$

$$\Rightarrow \qquad |z| = |r.e^{i\theta}| = |r|.|e^{i\theta}| = r$$

El conjugado $\bar{z} = e^{-i\theta}$ y el $\arg(z) = \theta$ (o lo que sea que esté multiplicando a la i en la exponencial).

Ahora rapidito veamos cómo escribir 2 números muy usados en las distintas representaciones: el i y el -1. Empezamos por este último. Fijate que en la forma binominal es simplemente tomar $x = -1$ e $y = 0$, quedando $z = -1$. Y tanto en la forma trigonométrica como en la exponencial, es $r = 1$ y el ángulo θ es tal que

$$\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \theta = \pi + 2n\pi = (2n+1)\,\pi, \ \ n \in Z \quad \Rightarrow \quad -1 = e^{i(2n+1)\pi} \ \text{ con } n \in Z$$

Ahora, i en la forma binomial exige que $x = 0$ e $y = 1$. Mientras que en las otras representaciones tenemos que debe ser $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ y el ángulo tal que

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi = (4m+1)\,\frac{\pi}{2}, \ \ m \in Z \quad \Rightarrow \quad i = e^{i(4m+1)\frac{\pi}{2}} \ \text{ con } m \in Z$$

EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

3. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican simultáneamente:

i) $\arg(-6z^4) = \arg(-iz^2)$

ii) $\left|z^2(1-i)\right| = 50\sqrt{2}$

Viste que en el resumen teórico ya hablamos de las diferentes formas de expresar a los números complejos no? Depende de nosotros decidir con que notación es más sencillo trabajar teniendo en cuenta el problema que tengamos que resolver. Y para esta decisión no hay receta que valga, solo intuición que se adquiere con la práctica. Se que a esta altura de mi sermón ya perdí todo el aprecio que me tenías, pero…
Es sassií… que le vamo a ssshasser….
Bueno, vamos a encontrar todos esos z que deben cumplir con

i) $\mathbf{arg\ (-6\ z^4\ ) = arg\ (-i\ z^2\ )}$

En la notación exponencial $z = r\, e^{i\theta}$ el argumento aparece de forma explícita, ya que es la cantidad que multiplica a i en la exponencial, es decir, el ángulo. Por lo tanto vamos a escribir a z de esa forma.

$$-6\, z^4 = (-1).6\, r^4\, e^{i4\theta} = \quad 6\, r^4\, e^{i(2m+1)\pi}\, e^{i4\theta}$$

$$\text{pues} \qquad -1 = e^{i(2m+1)\pi}$$

$$\Rightarrow \qquad -6\, z^4 \ = 6\, r^4\, e^{i(4\theta + (2m+1)\pi)}$$

$$\therefore\ \arg(-6\, z^4) = 4\,\theta + (2m+1)\,\pi \qquad \text{con} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$-i\, z^2 = (-1)\, i\, r^2\, e^{i2\theta} = \quad r^2\, e^{i(2k+1)\pi}\, e^{i(4n+1)\pi/2}\, e^{i2\theta}$$

$$\text{pues} \qquad i = e^{i\,(4n+1)\,\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad -i\, z^2 \ = r^2\, e^{i(2\theta + (2k+1)\pi + (4n+1)\pi/2)} \qquad \text{con} \qquad k,n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore\ \arg(-i\, z^2) = 2\,\theta + (2k+1)\,\pi + (4n+1)\,\pi/2$$

Ya tenemos los argumentos buscados. Ahora tenemos que ver para que θ´s se cumple la igualdad:

$$\arg(-6\, z^4) = \arg(-i\, z^2)$$

$$4\,\theta + (2m+1)\,\pi = 2\,\theta + (2k+1)\,\pi + (4n+1)\,\pi/2$$

$$4\,\theta \;\; - 2\,\theta \;\; = (2k+1)\,\pi - (2m+1)\,\pi + (4n+1)\,\pi/2$$

$$\theta \;\; = (k-m+n)\,\pi + \;\; \pi/4$$

$$\Rightarrow \qquad \theta \;\; = (4(k-m+n)+1)\,\pi/4$$

Para simplificar un poco, es conveniente considerar lo siguiente: como k, m y n son números enteros arbitrarios, cualquier valor de ellos es válido y nos da una solución. Pero cada combinación de k, m y n nos producen un nuevo nº entero dentro del paréntesis ahí arriba, que podemos llamar p (o sea $p = \;\; k - m + n$). Al variar k, m y n sobre todos los valores posibles, p tomará también todos los valores enteros posibles. Y así, podemos directamente escribir

$$\theta \;\; = (4p+1)\,\pi/4, \quad \text{con } p \in \mathbb{Z}$$

Y por lo tanto, los z que cumplen con la primera condición tienen esta pinta:

$$z = r\,e^{i\,(4p+1)\,\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}$$

ii) $\left| z^2\,(1-i) \right| = 50\,\sqrt{2}$

De sólo recordar que el módulo de $e^{i\theta}$ es 1 independientemente del valor de θ, y además de ya venir trabajando con esa notación, creo que es conveniente que hagamos las cuentas considerando a z en la representación polar $z = r\,e^{i\theta}$.

$$\left| z^2\,(1-i) \right| = \left| z^2 \right| \left| 1-i \right| = \left| r^2 e^{i\,2\theta} \right| \left| 1-i \right| = r^2\,\sqrt{1^2+1^2} = r^2\;\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left| z^2\,(1-i) \right| = r^2\;\sqrt{2} = 50\,\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad r = \pm\sqrt{50}$$

Pero el radio r es una cantidad positiva, por lo que el único valor que puede tomar es $\sqrt{50}$. Y así, los z que cumplen esta segunda condición tienen este radio y cualquier argumento:

$$z = \sqrt{50}\,e^{i\theta}$$

Pero nosotros estamos interesados sólo en los z que cumplan simultáneamente ambas condiciones. Por lo tanto, estos z deben tener el argumento determinado por i) y el radio dado en ii). Esto es:

$$z = \sqrt{50}\,e^{i\,(4p+1)\,\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}$$

Fijate que son infinitos los z que satisfacen lo que queremos, pues para cada valor que de a p, obtengo un z distinto que cumple con i) y ii).

Hallar todos los z que pertenecen a C tal que $|3z| = 5$ y $|3\overline{z} - 5| = 5$

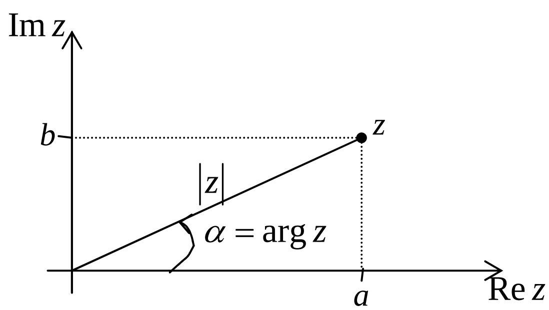
* Cuando nos dan un ejercicio de números complejos lo más importante es saber bien de qué manera nos conviene escribir al número. Tenemos tres opciones:

- **Binómica:**

Lo que se hace es separar al número complejo en su parte real ($\operatorname{Re} z$) y su parte imaginaria ($\operatorname{Im} z$, se escribe igual que la imagen de una T.L. pero no tiene nada que ver). Si suponemos que a es la parte real de z, y b es su parte imaginaria, la forma binómica de z es:

$$z = a + ib$$

Esa i es el número imaginario $i = \sqrt{-1}$



Trigonométrica:

El ángulo a que hay entre el eje de los reales y el número complejo es llamado argumento, es por eso que se lo suele escribir $\arg z$. El módulo de un número complejo es, la distancia entre el origen y el número en el plano complejo. Si usamos un poco de trigonometría podemos escribir que:

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{|z|} \quad \rightarrow \quad a = |z|\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{|z|} \quad \rightarrow \quad b = |z|\operatorname{sen}\alpha$$

Si metemos esto en la forma binómica, nos queda:

$$z = \overbrace{|z|\cos\alpha}^{a} + i\,\overbrace{|z|\operatorname{sen}\alpha}^{b} \xrightarrow[\text{factor común}]{\text{Sacando } |z| \text{ como}} z = |z|\left(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\right)$$

Ésta es la forma trigonométrica de un número complejo. Muchas veces al módulo de z se le pone otro nombre en lugar de usar las barras. No importa qué nombre tenga, si tiene esa forma podés estar seguro de que es el módulo del complejo.

- **Exponencial:**

Para escribir un complejo usando la notación exponencial se usa un resultado conocido que no te voy a demostrar para evitar confusiones innecesarias. Si te interesa el tema te recomiendo que te busques en alguno de los libros de la bibliografía que tenés en la última hoja de la guía. Este resultado dice que es lo mismo escribir $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ que $e^{i\alpha}$. Entonces, metiendo esto en la forma trigonométrica nos queda:

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

Y ésa es la llamada notación exponencial del número complejo. Hecha esta intro vamos a arrancar con nuestro ejercicio. En el enunciado nos dan dos condiciones para hallar el complejo. Éstas son $|3z| = 5$ y $|3\overline{z} - 5| = 5$. De la primera podemos despejar el módulo del complejo:

$$|3z| = 3|z| \quad \rightarrow \quad |z| = \tfrac{5}{3}$$

Como el módulo de un complejo $z = a + ib$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, esto nos queda:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \tfrac{5}{3} \xrightarrow[\text{al cuadrado}]{\text{Elevamos todo}} a^2 + b^2 = \tfrac{25}{9} \xrightarrow{\text{Y despejamos } a^2} a^2 = \tfrac{25}{9} - b^2$$

En la segunda condición nos hablan del complejo <u>conjugado</u> de z, o sea $\overline{z}$. El conjugado de un complejo tiene la misma parte real, pero la parte compleja está cambiada de signo. En nuestro caso sería $\overline{z} = a + i(-b) = a - ib$. Ahora vamos con esto a la segunda condición:

$$|3(a - ib) - 5| = 5 \quad \rightarrow \quad |(3a - 5) + i(-3b)| = 5$$

El término izquierdo de esta igualdad es el módulo de un número complejo, o sea que podemos escribir:

$$\sqrt{(3a-5)^2 + (-3b)^2} = 5 \quad \rightarrow \quad (3a-5)^2 + (-3b)^2 = 25 \quad \rightarrow \quad 9a^2 - 30a \cancel{+25} + 9b^2 = \cancel{25}$$

Y vamos a reemplazar a^2 por lo que sacamos de la primera condición:

$$9\left(\tfrac{25}{9} - b^2\right) - 30a + 9b^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 25 \cancel{-9b^2} - 30a \cancel{+9b^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 30a = 25$$

Ya encontramos la parte real de z, y ésta es $a = \frac{5}{6}$. Para terminar vamos a volver con este resultado a lo que extrajimos de la primera condición para sacar la parte imaginaria de z:

$$a^2 = \tfrac{25}{9} - b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = \tfrac{25}{9} - a^2 = \tfrac{25}{9} - \tfrac{25}{36} \quad \rightarrow \quad b = \pm\sqrt{\tfrac{25}{12}}$$

Esto no quiere decir más que tenemos dos complejos z que satisfacen las condiciones que nos dan en el enunciado. Éstos son:

$$\boxed{z_1 = \tfrac{5}{6} + i\sqrt{\tfrac{25}{12}}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{z_2 = \tfrac{5}{6} - i\sqrt{\tfrac{25}{12}}}$$

FIN NUMEROS COMPLEJOS

POLINOMIOS

Antes que nada, tenemos que decir que los polinomios son funciones de x. O sea que a cada valor de x le asignan otro número, que se calcula con alguna fórmula.

- Bueno, eso es muy general. ¿ Pueden ser cualquier función ? Entonces sen(x) es un polinomio?
- No, no. Son un tipo muy especiales de funciones. Pero, antes que nada son funciones. Entonces, cumplen con todas las propiedades de las funciones. Por ejemplo, forman un espacio vectorial; y para que dos polinomios sean iguales entre sí, tienen que ser iguales para cualquier valor de x.

Esas son las primeras generalidades sobre los polinomios. Ahora veamos una definición.

POLINOMIOS. DEFINICIÓN

Un polinomio es una función de x que se forma solamente con potencias enteras y no negativas de x. Entonces, la forma general de un polinomio es:

$$P(x) = a_0 . x^0 + a_1 . x^1 + a_2 . x^2 + ... + a_n . x^n$$

$a_0, a_1, ... ,a_n$ son los **coeficientes** del polinomio P, y no son otra cosa que números. Si son números reales, decimos que P es un polinomio real, o un polinomio a coeficientes reales. Lo mismo si son racionales, complejos o lo que sea.

Se define el "espacio de polinomios" **K [X]** como el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en K (K puede ser N, Z, Q, R ó C). Este espacio, con la suma y el producto usuales es un EV.
Un detalle importante: de acá en adelante, excepto que se aclare lo contrario, suponemos que, en principio, los coeficientes pueden ser números complejos. O sea, estamos tomando el caso más general $a_j \in C$

Este dato de que K[X] es un EV nos sirve de algo: podemos hablar de cosas como combinación lineal, conjuntos LI y demás. En particular, las potencias de x con distintos exponentes son linealmente independientes: o sea que, por ejemplo $\{x^2, x^5\}$ es LI

- Y eso de qué sirve?
- En realidad no sirve de mucho. Casi lo único para lo que sirve es para demostrar que dos polinomios son iguales solamente cuando todos sus coeficientes son iguales.

Si tenemos dos polinomios: $P(x) = a_0 . x^0 + ... + a_n . x^n$ y $Q(x) = b_0 . x^0 + ... + b_n . x^n$, veamos qué tiene que pasar para que sean iguales:

$$a_0 . x^0 + ... + a_n . x^n = b_0 . x^0 + ... + b_n . x^n$$

$$\Rightarrow (a_0 - b_0) . x^0 + ... + (a_n - b_n) . x^n = 0$$

Fijate que nos quedó una CL de $\{x^0, ... , x^n\}$ igualada a cero. Como ese conjunto es LI, todos los coeficientes tienen que ser iguales a cero, o sea:

$$a_0 - b_0 = 0 \text{ , ... , } a_n - b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = b_0 \text{ , ... , } a_n = b_n$$

Y eso es justamente lo que dijimos antes: dos polinomios son iguales cuando lo son coeficiente a coeficiente.

GRADO DE UN POLINOMIO

Acá hay que hacer una distinción. Como K [X] es un espacio vectorial, tiene un elemento neutro de la suma. Ese no es otra cosa que el **polinomio nulo**, que es el que tiene todos los coeficientes $a_j = 0$. Ese polinomio es muy poco interesante, porque básicamente vale siempre cero. Por eso casi siempre se lo deja afuera de todos los análisis.

Si $P(x) = a_0 . x^0 + ... + a_n . x^n$ con $a_n \neq 0$ y $a_j = 0$ para todo $j > n$, decimos que el **grado** de P es n. O sea, el grado es la máxima potencia de x que aparece con coeficiente no nulo en P.
Veamos algunos ejemplos rápidos:

- $P(x) = 3x^4 + x^2 - 5x + 8 \quad \Rightarrow$ El grado de P es 4 y se escribe gr(P) = 4
- $P(x) = -x^3 + 2 \quad \Rightarrow \quad gr(P) = 3$
- $P(x) = 0 \quad \Rightarrow$ Lo primero que se te ocurre es que gr(P) = 0, pero no es así. Este es el polinomio nulo, y no tiene grado, porque no hay ningún coeficiente no nulo. Los polinomios de grado cero son las constante (distintas de cero), o sea los de la forma $P(x) = k$, con $k \neq 0$. Fijate que acá no aparece la x, entonces el máximo exponente es x^0 (acordate que $x^0 = 1$). Por eso, el grado es cero.

Al coeficiente que está con la mayor potencia se lo llama **coeficiente principal**. Entonces, si P es un polinomio de grado n, el coeficiente principal es a_n. Y al que está con la menor potencia (o sea, con x0) se lo llama **término independiente**, justamente porque no está multiplicado por x

- Calcular el grado de P + 2Q con $P = 2x^3 + 8x - 4$ y $Q(x) = -x^3 + 3x^2$

$$P + 2Q = (2x^3 + 8x - 4) + 2 .(-x^3 + 3x^2) = 6x^2 + 8x - 4$$

Fijate lo que pasó: estamos sumando dos polinomios de tercer grado, y el resultado nos quedó un polinomio de segundo grado. O sea, se achicó el grado. Y claro, eso pasó porque los coeficientes principales de P y de 2Q son opuestos. Entonces, al sumarlos, se anula el término de x^3, y se achica el grado. Este ejemplo es para mostrarte que, si $P + Q \neq 0$:

$$gr\,(P + Q) \leq g\,rP \qquad y \qquad gr\,(P + Q) \leq gr\,Q$$

- Eso es para la suma. ¿ Y para las demás operaciones ?
- Bueno, para la resta es lo mismo, porque acordate que la resta no es otra cosa que sumar el opuesto; así que valen las misas propiedades. Para el producto, si ninguno de los polinomios P,Q son el polinomio nulo, se cumple que

$$gr\,(P\,.\,Q) = gr\,P + gr\,Q$$

La división de polinomios es una cosa más complicada, así que mejor la dejamos para después. Antes definamos la **especialización de P** en z simplemente como P(z).

Así, por ejemplo, si $P(x) = x^2 + 3x - 2$, la especialización de P en 4 se calcula como:

$P(4) = 4^2 + 3\,.\,4 - 2 = 26$. Si $P(z) = 0$, se dice que z es una **raíz** de P.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Esta parte no es nada fácil, así que prestá atención. Si tenemos dos polinomios P y Q ($Q \neq 0$) tales que $gr\,P > gr\,Q$, podemos escribir:

$$P = S\,.\,Q + R$$

donde S y R son polinomios únicos. S es el cociente y R es el resto, y cumple que $R = 0$ ó $grR < grQ$. Si $R = 0$, decimos que Q **divide** a P.

- Ahhhh.... bueno .... todo muy lindo. Pero cómo hago para encontrar S y R?
- Esa es la parte complicada. Primero te muestro unos ejemplos.

Si $P = x^3 + 8x^2 - 4x - 5$ y $Q = x + 2$, la división de P por Q se hace así:

$$\begin{array}{rl}
x^3 + 8x^2 - 4x - 5 & \underline{|\; x + 2 \quad} \\
-\;\underline{x^3 + 2x^2 \qquad\qquad} & x^2 + 6x - 16 \\
6x^2 - 4x - 5 & \\
-\;\underline{6x^2 + 12x \qquad} & \\
-16x - 5 & \\
-\;\underline{-16x - 32} & \\
27 &
\end{array}$$

La idea es dividir el primer término del dividiendo (P) por el primer término del divisor

(Q). Así nos queda $x^3 / x = x^2$. El próximo paso es multiplicar ese resultado por Q, y restárselo al dividendo P. Y después, repetir el procedimiento hasta que nos quede un resto de grado menor que el divisor. En este caso, nos quedó R = 27, un polinomio de grado cero, mientras que gr Q = 1 , así que está bien.

Decimos que el cociente de la división es $S = x^2 + 6x - 16$; y el resto es R = 27.

Ahora veamos un ejemplo un poco más difícil:

$P = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; $Q = x^2 - 2x + 3$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{3-3}
- & \underline{2x^4 - 4x^3 + 6x^2} & 2x^2 - x - 11 \\
 & -x^3 - 9x^2 + 2x - 1 & \\
- & \underline{-x^3 + 2x^2 - 3x} & \\
 & -11x^2 + 5x - 1 & \\
- & \underline{-11x^2 + 22x - 33} & \\
 & -17x + 32 &
\end{array}
$$

Ahora el resto nos quedó R = - 17 x + 32, un polinomio de primer grado. Eso está bien, porque gr Q = 2. Y bueno, la idea es siempre la misma. El procedimiento es parecido a la división entre números. Veamos un ejemplo fácil >

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 128 & 3 \\ \cline{3-3}
- & \underline{12} & 42 \\
 & 8 & \\
- & \underline{6} & \\
 & 2 &
\end{array}
$$

El cociente es 42, y el resto es 2. Entonces 128 = 42 . 3 + 2. Fijate que la división se terminó cuando el resto quedó más chico que el divisor (2 < 3). En el caso de los polinomios es más o menos lo mismo: la división se termina cuando el grado del resto es menor que el del divisor, o el resto es cero.

DIVISIÓN POR POLINOMIOS DE PRIMER GRADO DE LA FORMA Q = X – A

Hay un caso muy particular en la división de polinomios y es cuando el divisor tiene la forma $Q = x - a$. Como son polinomios de primer grado, el resto de la división tiene que tener grado cero o R = 0. Sea como sea, el resto será una constante, o sea un número. Hay un teorema bastante importante, llamado **"Teorema del Resto"** que dice:

"El resto de dividir P(x) por (x – a) es R = P(a)"

Una consecuencia importante de este teorema es que si P(a) = 0, o sea, si a es una raíz de P, el resto de P(x) dividido x – a es cero. O sea, que x – a divide a P y podemos escribir:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Esto nos sirve mucho para encontrar todas las raíces de un polinomio P. Si conocemos una , podemos dividirlo por x – a, y ahora tenemos que encontrar las raíces del polinomio Q, que es un grado más chico. Mejor veamos un ejemplo.

- Encontrar todas las raíces de $P(x) = x^2 + x - 12$ sabiendo que una raíz es a = 3

Lo primero que hacemos es dividir P(x) por (x-3). Nos queda así:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 + x - 12 & \underline{x - 3} \\ - & \underline{x^2 - 3x \quad\quad} & x + 4 \\ & \quad 4x - 12 & \\ - & \underline{\quad 4x - 12} & \\ & \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Como era de esperar por el Teorema del resto, el resto nos dio cero. Y el cociente nos dio Q = x + 4. Entonces, el polinomio P lo podemos escribir como:

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x + 4)$$

Las raíces son los valores de x para los que P(x) = 0. Para que se anule un producto, se tiene que anular alguno de los paréntesis. Entonces, las dos raíces son a = 3 y b = - 4.

REGLA DE RUFFINI

Ya dijimos que los polinomios de la forma Q = x - a son bastante especiales para las divisiones. Son tan especiales, que para ellos hay un método más simple de calcular las divisiones: el método de Ruffini. Te lo explico con un ejemplo:

$P = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$; $Q = x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & & 3 & 15 & 33 \\ \hline & 1 & 5 & 11 & 38 \end{array}$$

La idea es ubicar en una primera fila a los coeficientes de P, desde el coeficiente principal hasta el término independiente, sin dejar ninguna (o sea, que si hay alguno que “no aparece” porque vale cero, ponemos un cero). También ubicamos sobre un costado al valor de a (en este caso a = 3). El procedimiento es:

- bajar el coeficiente principal
- Multiplicar el número de la última fila por a, y ubicar el resultado en la segunda columna
- Sumar la segunda columna y ubicar el resultado en la última fila
- Multiplicar por a y ubicar en la tercera columna .... y así hasta terminar
- Y cómo se lee el resultado?
- Bueno, acordarte que el resultado va a ser un polinomio un grado menor que P.
  De los n números (n es el grado de P) que quedaron en la última fila, el último es el resto de la división y el resto es el cociente.
  Entonces, en este caso, el cociente es $S = x^2 + 5x + 11$ y el resto es 38. Fijate que se verifica el teorema del resto, porque $P(3) = 38$.

Veamos un último ejemplo de Ruffini antes de cambiar de tema:

- $P = 5x^4 - 8x^3 + x^2 - 2x + 4$; $Q = x + 2$

	5	-8	1	-2	4
-2		-10	36	-74	152
	5	-18	37	-76	156

El cociente es $S(x) = 5x^3 - 18x^2 + 37x - 72$ y el resto es $R = 156$.

CÁLCULO DE RAÍCES

Ahora que sabemos cómo hacer operaciones entre polinomios, vamos a lo que realmente importa: ćomo calcular las raíces. Esto es tan importante porque muchas veces tenemos ecuaciones con polinomios, y las podemos transformar a la forma $P(x) = 0$. O sea que todo el problema se reduce a encontrar las raíces de P.

- Pará pará pará.... Estamos seguros de que $P(x) = 0$ siempre tiene solución ? O sea, siempre cualquier polinomio P tiene raíces ?
- Y... no, no siempre hay solución. Por ejemplo, con los polinomios de grado cero, o sea de la forma $P(x) = k \neq 0$, esos no tienen ninguna raíz.
- Bueno, está bien. Para los de grado cero seguro que no. Y para los demás ?
- Sí, los polinomios de grado mayor o igual que 1 siempre tienen al menos una raíz. Pero eso no es tan obvio, sino que hay un teorema muy fuerte que dice eso: es el **Teorema Fundamental del Álgebra**. Este teorema lo desarrolló Gauss. (Maestro) Es muy importante (fundamental) porque dice que siempre hay solución. Eso sirve porque hay veces que cuesta mucho encontrar las soluciones, y uno empieza a dudar de que haya o no soluciones. Bueno, Gauss y su Teorema Fundamental dicen que sí, siempre que gr $P \geq 1$, P tiene al menos una raíz **compleja**.

Y este teorema también nos está diciendo que si gr P = n (con $n \geq 1$) P tiene a lo sumo n raíces distintas. Claro, porque si P tiene al menos una raíz x_1 (y el Teorema Fundamental asegura que sí), lo puedo dividir por $x - x_1$ y nos queda:

$$P = (x - x_1) . Q$$

Ahora bien, si gr Q = $n - 1 \geq 1$, también tiene una raíz x_2, y puedo hacer lo mismo. Si seguimos haciendo lo mismo hasta llegar a un polinomio de grado cero, este polinomio será el coeficiente principal a_n y nos queda:

$$P(x) = a_n . (x - x_1) . (x - x_2) . ... (x - x_n)$$

- Y si ahí aparecen n raíces, ¿ por qué decimos que P tiene "a lo sumo" n raíces ?
- Porque no necesariamente todas las raíces $x_1, x_2, ... , x_n$ son distintas. Entonces tiene a lo sumo n raíces distintas.
  OJO: hay que tener mucho cuidado, porque los teoremas de matemática usan un lenguaje demasiado preciso, tanto que confunde.

MULTIPLICIDAD DE UNA RAÍZ

Decimos que x = a es una raíz de multiplicidad k del polinomio P si

$$P(x) = (x - a)^k . Q(x) \qquad \text{con} \quad Q(a) \neq 0$$

Esto quiere decir que si hacemos lo que dijimos antes: encontrar las raíces de a una, y dividir por $x - x_1$, después por $x - x_2$, y así; la raíz x = a aparece repetida k veces.

La multiplicidad de una raíz también tiene que ver con que sea o no raíz de los polinomios derivados, que no son otra cosa que las derivadas de P, y se calculan como:

$P = a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2 + ... + a_n . x^n$

$P' = a1 . x^{1-1} + a_2 . 2 .x^{2-1} + ... + a_n . n . x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + ... + n\, a_n x^{n-1}$

$P'' = 2 . a_2 + 3 . 2 . a_3 . x + ... + n . (n-1) . a_n . x^{n-2}$

Y así lo mismo para calcular $P^{(k)}$, derivamos k veces.

Hay un teorema que dice que si a es una raíz de multiplicidad k de P entonces:
$P(a) = P'(a) = P''(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0$ y $P^{(k)}(a) =/ 0$

Veamos algún ejemplo para ver que se cumple.

- $P(x) = (x - 1)^3 . (x + 2) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5 x - 2$

x = 1 es una raíz triple (porque x – 1 aparece elevado al cubo). Entonces, se tendría que anular P(1) y las primeras dos derivadas, y la tercera no. Veamos:

$P(x) = x^4 - x^3 -3x^2 + 5x - 2 \quad \Rightarrow \quad P(1) = 1^4 - 1^3 - 3.1^2 + 5.1 -2 = 0$

$P'(x) = 4 .x^3 - 3.x^2 - 6.x + 5 \quad \Rightarrow \quad P'(1) = 4.1^3 - 3.1^2 - 6.1 + 5 = 0$

$P''(x) = 12 x^2 - 6x - 6 \Rightarrow \quad P''(1) = 12 . 1^2 - 6 . 1 - 6 = 0$

$P''' (x) = 24x - 6 \quad \Rightarrow \quad P''' (1) = 24 . 1 -6 = 18 \neq 0$

Esto por ahora parece que no sirve de mucho, pero más adelante en análisis vas a ver que sí. O sea, está diciendo que se anula la función y las primeras k-1 derivadas. Pero bueno, eso va más allá de esta materia.

Hasta ahora vimos muchas cosas sobre las raíces, pero todavía no vimos cómo se calcular. Ya dijimos que los polinomios de grado cero no tienen raíces, así que empecemos por los que les siguen en facilidad: los de primer grado.

RAÍCES DE UN POLINOMIO DE PRIMER GRADO

Son polinomio de la forma $P = a . x + b$ con $a \neq 0$. En principio, a y b pueden ser números complejos. Si son reales, podemos dibujarlas en un par de ejes (x,y); en el eje y ponemos los resultado de la cuenta $P(x) = a . x + b$. Esos gráficos son rectas ni horizontales ni verticales; y que siempre pero siempre cortan al eje x una vez. Eso quiere decir que tienen una raíz, porque el eje x corresponde a $P(x) = 0$.

- Cómo se calcula esa raíz?
- Muy fácil. Simplemente de la ecuación $a . x + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$. Y esa cuenta siempre se puede hacer, porque dijimos que $a \neq 0$. Por ejemplo, si $P(x) = 2x + 3$, la única raíz es $x = -3/2$.
- Ah bueno pero eso no tiene ningún secreto. Pasemos a algo más difícil

RAÍCES DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

Estos son polinomios de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a =/ 0.
Una vez más, en principio los coeficientes pueden ser complejos; pero si son reales tienen una interpretación geométrica. Si los coeficientes son reales, las curvas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ son parábolas. Y estas pueden cruzar dos veces, una sola o ninguna al eje x, dependiendo de la forma que tengan.

- Cómo es eso? Pueden no tener ninguna raíz ? Si recién vimos un Teorema que nos dice que siempre los polinomios de grado mayor que uno tienen raíces.
- Claro, pero ese teorema dice que siempre existen raíces complejas. Y esas no tienen ninguna interpretación geométrica como una parábola. Eso solamente funciona para los números reales. Entonces, todo lo que estamos diciendo que de las raíces del polinomio, 2, 1 o ninguna pueden ser reales.

– Bueno, y más allá de la interpretación, ¿ cómo se calculan las raíces?

Para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ existe una fórmula bien conocida, que es:

$$x = \frac{-b + w}{2a}$$

donde w es un número complejo que cumple $w^2 = b^2 - 4.a.c.$

Como vimos antes, si $b^2 - 4.a.c \neq 0$, hay dos soluciones para w, que dan dos soluciones para x. Y si $b^2 - 4\,ac = 0$ hay una única solución. Entonces decimos que esa raíz es doble.

Veamos un par de ejemplillos:

- <u>Con coeficientes reales</u>: $P(x) = 4x^2 - 4x - 3$

Las raíces son $x = (4 + w)/8$, donde $w^2 = (-4)^2 + 4.4.3 = 64 \Rightarrow w_1 = 8$; $w_2 = -8$

$$x_1 = (4 + 8)/8 = 3/2 \quad ; \quad x_2 = (4 - 8)/8 = -\tfrac{1}{2}$$

Las dos raíces son reales. Esto quiere decir que si graficamos la parábola, esta cruza dos veces al eje x, una vez en $x = -\frac{1}{2}$ y otra vez en $x = 3/2$.

<u>Nota</u>: si los coeficientes de un polinomio de segundo orden son reales, hay algunas relaciones interesantes entre las dos raíces x_1,x_2, sean reales o complejas:

1) $x_1 + x_2 = -b / a$
2) $x_1 . x_2 = c /a$

Estas dos relaciones, que parecen sacadas de la galera, salen directamente de la fórmula para calcular las raíces, no hay ningún secreto. Fijate que en ese ejemplo se verifican.

- <u>Con coeficientes complejos</u>: $P(x) = x^2 + (1 - i)\,x + 1 - {}^5/_4\, i$

Las raíces son $x = \dfrac{-1 + i + w}{2}$

donde $w^2 = (1 - i)^2 - 4 . 1 . (1 - {}^5/_4\, i) = -4 + 3\,i$

Los dos valores posibles para w son las dos raíces complejas de -4 + 3 i. La cuenta te la dejo que la hagas vos, te digo directo el resultado:

$$w_1 = \sqrt{2} + {}^3/_2 . \sqrt{2} . i \quad \text{y} \quad w_2 = -w_1 = -\sqrt{2} - {}^3/_2 . \sqrt{2} . i$$

Entonces, las dos raíces del polinomio son

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{1+3/2.\sqrt{2}}{2}i \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2}-1}{2} + \frac{1-3/2.\sqrt{2}}{2}i$$

Vemos que la única diferencia entre los polinomios con coeficientes reales y complejos es que las cuentas son más complicadas, nada más.

POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2

Ya para polinomios de grado 3 o mayor no existe ninguna fórmula explícita para calcular las raíces. Entonces estamos bastante perdidos, hay que encontrarlas de alguna forma que nadie sabe cómo es. Pero hay algunos trucos para encontrarlas. Y acordate que una vez que encontrás una raíz $x = a$, podés dividir el polinomio por $x - a$ y te queda un polinomio de un grado más chico. La idea es ir haciendo eso hasta llegar a un polinomio de segundo grado, donde podemos usar la fórmula de antes.

Uno de los trucos para encontrar las raíces es el **Teorema de Gauss**. Este teorema dice que si $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n . x^n$ es un polinomio con coeficientes enteros (o sea que todos los $a_0, a_1, ..., a_n$ son enteros) y tiene raíces racionales, se pueden calcular como:

$$x = p/q, \text{ con } q > 0$$

donde p divide al término independiente a_0 y q es un divisor del coeficiente principal a_n. Esto parecería que no sirve de mucho, porque solamente se puede usar para coeficientes enteros, y solamente me permite encontrar raíces racionales.
- Pero, y ¿qué pasa si las raíces no son racionales?
- Y bueno, en ese caso el teorema no nos sirve para encontrar las raíces

Y sí, el teorema es un poco limitado. Pero bueno, es lo que tenemos para trabajar, sirve en algunos casos, por ejemplo:

- $P(x) = 4x^3 + 3x - 2$.

El teorema de Gauss dice que si estamos buscando raíces racionales, solamente hay un puñado de valores posibles p/q, que cumplen que
p es un divisor de $a_0 = 2$. Entonces, p puede valer 1, 2, -1, ó -2.
q es un divisor de $a_n = 4$. Entonces q puede valer 1, 2 ó 4.

Vemos que hay varias posibilidades, porque podemos combinar cualquier valor de p con cualquier valor de q. Y todo lo que podemos hacer es probar con esas posibilidades hasta encontrar una raíz.
Veamos:

$P(1) = 4 \,.\, 1^3 + 3 \,.\, 1 - 2 = 7$

$P(\frac{1}{2}) = 4 \,.\, (\frac{1}{2})^3 + 3 \,.\, (\frac{1}{2}) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$ es una raíz de P

Y ahora que tenemos una raíz, podemos dividir por $x - \frac{1}{2}$ y así achicamos un poco el problema. Como estamos dividiendo por un polinomio de la forma $x - a$, podemos usar Ruffini, que es mucho más fácil que el otro método.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & 3 & -2 \\ \frac{1}{2} & & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Nos queda que $P(x) = (x - \frac{1}{2}) \,.\, (4x^2 + 2x + 4)$

Ahora tenemos que encontrar las raíces del polinomio de segundo grado que nos quedó. Pero eso ya es más fácil, porque tenemos una fórmula para hacerlo. Todo lo que hay que hacer es meter los números en la fórmula y hacer las cuentas, no hay mucho secreto.

El teorema de Gauss dice bien claro que solamente funciona cuando los coeficientes del polinomio son enteros. Pero también se lo puede hacer andar cuándo los coeficientes son racionales. Fijate en este ejemplo:

$P(x) = \frac{1}{2} x^3 + x^2 - 4$

En este caso, los coeficientes son racionales, no enteros, pero veamos. Encontrar las raíces de ese polinomio no es otra cosa que resolver la ecuación:

$$\frac{1}{2} x^3 + x^2 - 4 = 0$$

Ahora bien, si multiplicamos esta ecuación por 2 a ambos miembros nos queda:

$$x^3 + 2x^2 - 8 = 0$$

Y esto es encontrar las raíces de un polinomio con coeficientes enteros, donde podemos usar el Teorema de Gauss. Entonces, si bien solamente se puede usar para coeficientes enteros, hay un truquito cuando los coeficientes son racionales

Pero bueno, muchas veces este teorema no nos sirve simplemente porque las raíces no son racionales. En ese caso, no hay nada que se pueda hacer: no se pueden calcular las raíces sin conocer alguna otra.
Mejor dicho, no hay ninguna fórmula a seguir para encontrarlas; pero se pueden encontrar probando. Por eso, siempre que parezca imposible encontrar raíces, conviene probar con números sencillos como 0, 1 , -1, 2, i, -i, ...

Y una vez que encontramos una raíz (no importa cómo, si fue probando o si alguien nos la dijo), encontrar las otras es más fácil, porque podemos reducir el grado del polinomio.
La cosa es un poquito más fácil cuando los coeficientes son reales, porque hay un teorema que ayuda un poco.

TEOREMA:
Si P es un polinomio de coeficientes reales y $z \in C$ es una raíz de P, entonces $\bar{z}$ también es una raíz de P. Aun más, si z es una raíz de multiplicidad k, $\bar{z}$ también lo es de multiplicidad k.

Nota: Fijate que si z es una solución real, este teorema no dice nada nuevo, porque $z = \bar{z}$.

Esta propiedad ayuda mucho, porque cuando encontramos una raíz compleja (que no sea puramente real), en realidad estamos encontrando 2. Eso facilita el problema. Veamos un ejemplo:

- $P(x) = 9x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1$

Este es un polinomio de cuarto grado. No hay ninguna forma de encontrar las raíces. Así que vamos a tener que encontrar dos raíces de alguna forma de la galera para poder reducir el grado hasta un polinomio de segundo grado.
Por suerte es un polinomio con coeficientes enteros, así que podemos usar el Teorema de Gauss. Entonces, buscamos raíces de la forma $x = p/q$, donde

p es un divisor de $a_0 = 1 \Rightarrow p = 1$ ó $p = -1$
q es un divisor de $a_n = 9 \Rightarrow q = 1, 3, 9$

Te ahorro el trabajo de probar con todas las combinaciones posibles entre p y q. Una que funciona es $x_1 = -1/3$. Una vez que encontramos esta raíz, dividimos al polinomio por $x + 1/3$. Obviamente, como es mucho más fácil, usamos el método de Ruffini.

	9	6	10	6	1
-1/3		-3	-1	-3	-1
	9	3	9	3	0

Nos queda $P(x) = (x + {}^1/_3) \cdot (9x^3 + 3x^2 + 9x + 3)$.

Como todos los coeficientes son múltiplos de 3, podemos sacarlo como factor común, así no trabajamos con números tan grandes y nos queda:

$$P(x) = 3 \,.\, (x + {}^{1}/3) \,.\, (3x^3 + x^2 + 3x + 1)$$

Como de vuelta nos quedó un polinomio de coeficientes enteros, podríamos probar de vuelta de usar el Teorema de Gauss. Pero te propongo otra cosa, mejor probemos con números sencillos a ver si funcionan. Ensayamos con $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$.
Todos esos no funcionaron. Ahora probemos con $x_2 = i$. Ese sí funciona. Entonces ahora sabemos por el teorema anterior que $x_3 = -i$ también es raíz. La ventaja de este método de tanteo es que encontramos las raíces de a 2. Ahora reducimos de vuelta el grado del polinomio dividiendo por $(x+i) \,.\, (x-i) = (x^2 +1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +x^2 & +3x & +1 & x^2 +1 \\ \hline -\,3x^3 & & +3x & & 3x + 1 \\ \hline & x^2 & & +1 & \\ & x^2 & & +1 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

El polinomio P(x) escrito como producto de polinomio de primer grado nos queda:

$$P(x) = 3 \,.\, (x + {}^{1}/_{3}) \,.\, (x - i) \,.\, (x + i) \,.\, (x + 1)$$

Esta forma de escribir al polinomio se conoce como factorización de P, porque está escrito como un producto de varios factores. Y la ventaja de que sean todos polinomios de primer grado es que salta a simple vista cuáles son las raíces: $-1/3$, i , $-i$, -1.

- Cómo darse cuenta tan rápido?
- Fácil. x es una raíz si $P(x) = 0$. Ahora bien, para que un producto se anule, alguno de los factores (en este caso cada factor es un paréntesis) tiene que valer 0. Entonces así salen muy pero muy fácil las raíces.
- Cada uno de eso factores se llaman polinomios irreducibles en C, porque no se pueden factorizar más. Si estuviéramos trabajando solamente sobre los números reales hay algo mal, porque no puede aparecer un término $(x + i)$. Entonces, el factor irreducible es $x^2 + 1$; porque no lo podemos reducir a $(x + i) \,.\, (x - i)$

Y eso es todo lo que hay que saber sobre polinomios. Para terminar, veamos algunos ejercicios típicos que no son como los que vimos hasta ahora de calcular raíces. Hay de varios tipos:

- Un tipo de ejercicio es el de calcular cuánto vale un parámetro a para que se cumpla una condición. Bueno, eso no tiene mucho secreto, son ejercicios de la forma:

Cuánto tiene que valer $a \in R$ para que $P(x) = a.x^2 + a.x + 5$ cumpla que $P(-1) = 5$ y $gr\, P = 2$?

Para resolver estos ejercicios, todo lo que hay que hacer es reemplazar esas condiciones y hacer las cuentas.

$$P(-1) = a\ .\ (-1)^2 + a\ .\ (-1) + 5 = a - a + 5 = 5$$

Vemos que la primera condición se cumple para cualquier valor de a. Entonces, en principio uno diría que a puede valer cualquier cosa. Pero eso no es verdad, porque también se tiene que cumplir la segunda ecuación.

Para que gr P = 2, el coeficiente que va con x^2 no puede ser cero. O sea $a \neq 0$. Entonces, la respuesta a este problema es que a puede valer cualquier número real excepto el 0. Listo.

- Otro ejercicio típico es el de encontrar un polinomio que cumpla con ciertos requisitos. Veamos un ejemplo:

Encontrar un polinomio P de coeficientes reales de grado mínimos tal que x = 4 es una raíz simple de P ; x = 3 + i es una raíz doble y P(5) = 50.

Lo primero que hay que hacer en este tipo de ejercicios es averiguar de qué grado es el polinomio que estamos buscando. Eso lo podemos averiguar a partir de las raíces.

Como tiene que tener una raíz simple (x = 4) y una doble (x = 3 + i), debe ser grP ≥ 3.

Ahora bien, como los coeficientes son reales, si z es un raíz de P entonces $\bar{z}$ también, por el teorema que vimos antes.

Entonces, x = 3 – i también es una raíz doble de P.

Quiere decir que buscamos un polinomios con una raíz simple y dos raíces dobles. Para eso, tiene que ser gr P ≥ 5. Como nos piden un polinomio de grado mínimo, buscamos un polinomio de grado 5.

- Y cómo lo encontramos ?
- La forma más fácil es a partir de sus raíces en la forma factorizada. Nos queda:

$$P(x) = A\ .\ (x - 4)\ .\ [x - (3+i)]^2\ .\ [x - (3 -i)]^2 = A\ .\ (x - 4)\ .\ [(x - 3)^2 + 1]^2$$

$$P(x) = A\ .\ (x - 4)\ .\ [x^2 - 6x + 10]^2$$

Pero el problema no se terminó acá, porque todavía no sabemos cuanto vale la constante A. Para eso usamos la última condición que nos dan, que P(5) = 50.

$$P(5) = A\ .\ (5\text{-}4)\ .\ [5^2 - 6\ .5 + 10]^2 = A\ .\ 25 = 50$$

$$\Rightarrow A = 2$$

Listo, ahora que sabemos cuánto vale A ya tenemos el polinomio.

$$P(x) = 2 \,.\, (x - 4) \,.\, [x^2 - 6x + 10]^2$$

En realidad el problema se terminó acá, pero como por lo general no estamos acostumbrados a leer los polinomios como productos sino como suma de potencias, conviene desarrollar los productos y expresar el resultado como:

$$P(x) = 2x^5 - 32\,x^4 + 108\,x^3 - 688\,x^2 + 1.160\,x - 800$$

POLINOMIOS - RESUMEN

Supongamos un polinomio cualquiera: $P(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$, donde los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ pueden ser reales o complejos.

Ahora mirémoslo un poquito… que podemos decir sobre él? Sabemos a simple vista cuáles son sus raíces? Cómo son? Cuántas tiene?

Así de sólo mirarlo, podemos responder algunas de estas cuestiones… por ejemplo, P(x) es de grado n (esto es que la mayor potencia del polinomio es xn) y por lo tanto, tiene n raíces, ya sean estas reales o imaginarias.

Que tenga n raíces, quiere decir que existen n números z1, z2,…, zn (ojo! no necesariamente distintos) tales que $P(z1) = P(z2) = \dots = P(zn) = 0$.

De este hecho, surge una forma alternativa de expresar al polinomio, ya que podemos reescribirlo como un producto de términos que involucran solamente a sus raíces y a la variable x:

$$P(x) = an\,(x - z1)\,(x - z2)\,\dots\,(x - zn)$$

Bien. Y algo más podemos decir? Hay un teoremita que es muy útil, a la hora de buscar raíces, si conocemos los coeficientes $a_0, \dots, a_n$. Así que es bueno tenerlo siempre a mano en el bolsillo de la memoria, fijate:

"Si 1 polinomio tiene todos sus coeficientes reales, y si z_0 es una raíz del polinomio, entonces su conjugado $\overline{z_0}$ también es raíz".

Y por último, un detalle no sobre P(x), si no para cuando estés calculando explícitamente sus raíces, no te vayas a olvidar que $\sqrt{-1} = i$.

Y acá cerramos esta parte imaginaria, listos para volver a la realidad y resolver problemas.

EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

3. Sea $P(x) = x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + \alpha$. Determinar α para que $2+i$ sea raíz de P, y hallar todas las raíces de P.

Qué es una raíz de un polinomio ??? Simplemente es un punto en el cual el polinomio se anula. y conociendo al polinomio (de sólo verlo), sabemos cuantas raíces él tiene? Sí. Tantas como el grado del polinomio (la potencia más alta de equis).

Así que por ejemplo, mirando el polinomio $P(x) = x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + \alpha$, que nos dan, podemos asegurar que tiene 4 raíces, es decir, que existen 4 números x_i (generalmente distintos) tales que $P(x_i) = 0$. Lo que tenemos que hacer es hallar todas estas raíces. En realidad tres de ellas, pues ya nos dan una. Sabemos que $(2 + i)$ es raíz de P(x), es decir $P(2 + i) = 0$.

Haciendo esta cuenta, determino cuánto debe valer α para que la igualdad se cumpla.

$$P(2+i) = (2+i)^4 - 10(2+i)^3 + 39(2+i)^2 - 70(2+i) + \alpha = 0$$

Calculemos primero las potencias de (2 + i)

$$\mathbf{(2+i)^2} = (2+i)(2+i) = 4 + 4i - 1 = \mathbf{3 + 4i}$$

$$\mathbf{(2+i)^3} = (2+i)^2(2+i) = (3+4i)(2+i) = 6 + 3i + 8i - 4 = \mathbf{2 + 11i}$$

$$\mathbf{(2+i)^4} = (2+i)^3(2+i) = (2+11i)(2+i) = 4 + 22i + 2i - 11 = \mathbf{-7 + 24i}$$

Ahura reemplacemos todos estos valores en el polinomio… prestemos atención que son muchos números y un error de cuentas (que es lo más común en los parciales!!!), nos puede llevar a cualquier lado ! Así que después de una buena dosis de café seguimos…

$$\Rightarrow \quad P(2+i) = -7 + 24i - 10(2+11i) + 39(3+4i) - 70(2+i) + \alpha$$

$$= -7 + 24i - 20 - 110i + 117 + 156i - 140 - 70i + \alpha$$

$$= -50 + 0i + \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P(2+i) = -50 + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{50}$$

Y así el querido polinomio (de quien tenemos que encontrar 3 raíces todavía) es:

$$\mathbf{P(x) = x^4 - 10\,x^3 + 39\,x^2 - 70\,x + 50}$$

Pero a no desesperar ya que leímos el resumen teórico (ah no???!!) y sabemos de este teoremita que nos viene a dar una mano en esta situación:

"…si 1 polinomio tiene todos sus coeficientes reales, y z_0 es una raíz del polinomio, entonces su conjugado $\overline{z_0}$ también es raíz"

$\Rightarrow$ si $(2 + i)$ es raíz también lo es $\overline{2+i} = 2 - i$

Conociendo ya 2 de sus raíces podemos reescribir el polinomio de esta forma (acordate que todo polinomio se puede expresar como producto de los términos (x – zi) donde los zi son sus raíces):

$$P(x) = (x - (2 + i))\,(x - (2 - i))\,Q(x)$$

$$= (x2 - 4x + 5)\,Q(x)$$

Y las raíces restantes serán las de Q(x). Y quién es este polinomio???

Fijate que simplemente despejando obtenemos que:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{(x^2 - 4x + 5)} = x^2 - 6x + 10$$

Sí, lo que en realidad es simple es despejar, pero no tanto la cuentita !!!

La división está hecha acá

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
_\; x^4 & -10x^3 & +39x^2 & -70x & +50 & & x^2 - 4x + 5 \\
x^4 & -4x^3 & +5x^2 & & & & \hline x^2 - 6x + 10 \;\rightarrow\; Q(x) \\ \hline
_\; 0 & -6x^3 & +34x^2 & -70x & +50 & & \\
 & -6x^3 & +24x^2 & -30x & & & \\ \hline
 & _\; 0 & +10x^2 & -40x & +50 & & \\
 & & 10x^2 & -40x & +50 & & \\ \hline
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

(Existen otras formas de hacer esta división, por ejemplo, por el método del viejo Rufinni. Pero en realidad no importa el medio, el resultado tiene que ser siempre el mismo, así que hacela como sepas o prefieras y compará los cocientes).

Bueno basta !! Calculado Q(x), vamos a buscar lo que nos interesa: sus raíces. Fijate que Q(x) es un polinomio de grado 2, por lo tanto, tiene exactamente 2 raíces, que nos la da la famosa formula que ya sabés desde cole...

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i \quad \rightarrow \text{ raíces de } Q(x)$$

(Acá no pasó nada raro, acordate que $\sqrt{-1} = i$). Y finalmente podemos escribir a P (x) en función de sus raíces

$$P(x) = (x - (\mathbf{2} + \mathbf{i}))(x - (\mathbf{2} - \mathbf{i}))(x - (\mathbf{3} + \mathbf{i}))(x - (\mathbf{3} - \mathbf{i}))$$

En resumen:

α = **50** y las raíces de P(x) son **2** ± **i** y **3** ± **i.**

Hallar un polinomio con coeficientes reales de grado mínimo que verifique 2+i es raíz de P, 0 es raíz triple de P y la parte imaginaria de P(-2i) es igual a 5.

Como 2 + i debe ser raíz del polinomio, entonces su conjugada compleja 2-i también es raiz. Por lo tanto el polinomio tiene que tener un término del tipo:

$$\left[x-(2+i)\right]\cdot\left[x-(2-i)\right] = x^2 - x(2+i+2-i) + \underbrace{(2+i)(2-i)}_{4+2i-2i-i^2=5} = x^2 - 4x + 5$$

Para que 0 sea raíz triple del polinomio, simplemente tenemos que multiplicar al término anterior por x3 :

$$P(x) = \left[x^2 - 4\cdot x + 5\right]\cdot x^3 \cdot Q(x)$$

Donde $Q(x)$ es algún polinomio, aún desconocido. Para determinar que aspecto tiene, notemos que $P(x)$ tiene que tener el mínimo grado posible y que en el enunciado ya no hay condiciones sobre raíces, entonces $Q(x)$ es simplemente una constante real, Q_0 (porque todos los coeficientes de $P(x)$ tienen que ser reales)

$$P(x) = Q_0\left[x^2 - 4\cdot x + 5\right]\cdot x^3$$

Por último, la parte imaginaria de $\mathrm{P}(-2\mathrm{i})$ es igual a 5:

$$\mathrm{Im}[\mathrm{P}(-2\mathrm{i})] = 5 \Rightarrow$$

$$\mathrm{P}(-2\mathrm{i}) = \mathrm{Q}_0\left[(-2\mathrm{i})^2 - 4\cdot(-2\mathrm{i}) + 5\right]\cdot(-2\mathrm{i})^3 \Rightarrow$$

$$\mathrm{P}(-2\mathrm{i}) = \mathrm{Q}_0[-4 + 8\mathrm{i} + 5]\cdot 8\mathrm{i} = \mathrm{Q}_0[-64 + 8\mathrm{i}] \Rightarrow$$

$$5 = 8\mathrm{Q}_0 \Rightarrow \mathrm{Q}_0 = \frac{5}{8}$$

Finalmente, el polinomio que estamos buscando es:

$$\boxed{P(x) = \frac{5}{8}\left[x^2 - 4\cdot x + 5\right]\cdot x^3}$$

FIN POLINOMIOS

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Vamos a ver un poco de teoría sobre **autovalores** y **autovectores**. Quizás en algún otro libro los encuentres como **eigenvalores** (o **valores propios**) y **eigenvectores** (o **vectores propios**). Te lo cuento para que no te desorientes si encontrás estos nombres raros.

Bien, empecemos por definir esto: ...

> Definición: "Si **A** es una matriz **n** × **n**, decimos que un vector distinto de 0 en $\mathbf{R}^n$ es un autovector de **A** si se cumple:
>
> $$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$
>
> Donde λ es algún escalar, que es entonces llamado autovalor de A. Además, decimos que **x** es un autovector asociado al autovalor λ."

Se va entendiendo hasta ahora ? No ? Bueno, veamos un ejemplo:

Si tenemos la matriz **A**, decimos que **x** es un **autovector** asociado a λ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 3$$

Porque

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3x = \lambda x$$

La pregunta sería: ¡¿cómo encontramos uno de estos **autovalores**?! Pues bien, veamos:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \approx \quad \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Ix} \quad \approx \quad (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$$

O sea, hemos reescrito la definición de **autovalor** (**autovector**) de manera de poder expresarlo como un sistema homogéneo, y por un viejo Teorema ya conocido, sabemos que el sistema tiene solución distinta de 0 si y solo si el determinante de esa expresión es igual a 0. Eso es lo que a nosotros nos permitiría decir que λ es **autovalor** de **A** !!!!

Entonces llegamos a la expresión:

$\boxed{\text{Det }(\lambda I - A) = 0}$ que es la llamada "ecuación característica de **A**"

Los escalares que satisfagan esta ecuación serán los **autovalores** de **A**. Si desarrollamos este determinante, llegamos a lo que llamamos "el polinomio característico de **A** = **P(λ)**".

Como ayuda-memoria, recordá estas propiedades:

λ es autovalor ⇔ ∃ un autovector **x** ≠ **0** asociado a él.

λ es autovalor ⇔ **(λI-A)** es no inversible ⇔ **det(λI-A)** = **0**

Sí, ya sé, querés un ejemplito que aclare un poco más todo esto que hemos dicho (con justos motivos, es algo complicado) ... ahí va:

Ejemplo:
Si nos piden que hallemos los **autovalores** y los **autovectores** asociados de alguna matriz, hago esto: Tengo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo **(λI-A)**:

$$(\lambda I - A) = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1/2 \\ -6 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos su determinante:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1/2 \\ -6 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1) - (6.1/2) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda = \textit{polinomio característico de } A = P(\lambda)$$

Qué nos quedó ? Sí ! Una ecuación cuadrática ! Para resolver el valor de λ tenemos que calcular las raíces de:

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$ ⇒ tenemos 2 autovalores para **A**: $\lambda_1 = \mathbf{0}$ y $\lambda_2 = \mathbf{4}$

Ahora, para ver qué **autovectores** tiene asociado cada unos de estos **autovalores**, lo que voy a hacer es escribir: **Ax** = λ_i**x** (i = 1, 2)

$\lambda_1 = \mathbf{0}$:

$$Ax = \lambda_1 x \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2/2 \\ 6x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda un sistemita de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2/2 &= 0 \quad \Rightarrow -6x_1 = x_2 \\ 6x_1 + \quad x_2 &= 0 \quad \Rightarrow 6x_1 = 6x_1 \end{aligned}$$

Si tomamos $x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6 \quad \Rightarrow \ (x_1 , x_2) = (1 , - 6)$

¿ Qué nos dice esto ? Que todo vector de la forma **(k , -6k)** con $k \neq 0$, es un **autovector** de **A** asociado a $\lambda_1 = \mathbf{0}$; en particular elegimos el vector (1 , -6) y le llamaremos autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = \mathbf{0}$. Una manera más formal y bonita de escribir esto que puse sería:

$$W_1 = \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \ / \ (x_1 , x_2) = (k , -6k) \ \forall \ k \in \mathbf{R} \}$$

El conjunto de vectores **x** que cumplen que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ conforman el subespacio asociado al **autovalor** λ, más el vector nulo .
(No confundirse ! el vector nulo no es autovector asociado, solo aparece por definición de subespacio).

Estos subespacios asociados son también llamados **Espacios Invariantes**. Esto se debe a que al aplicar la Transformación Lineal que la matriz **A** representa, a los vectores de este subespacio, resulta un vector que también pertenece al subespacio. O sea, el aplicar **A** al subespacio asociado, devuelve el mismo subespacio !

También podemos darle otro significado más al efecto de una matriz y sus autovectores, la llamada interpretación geométrica:

Si λ es un autovalor de A que tiene asociado el autovector x, entonces $Ax = \lambda x$, de modo que la multiplicación por A dilata o contrae a x, o invierte su dirección, dependiendo del valor de λ.

Uy nos fuimos! ... volvamos al ejemplo ... Repetimos la historia para el otro **autovalor** $\lambda_2 = \mathbf{4}$: En este caso nos queda un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2/2 &= 4x_1 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = x_2 \\ 6x_1 + x_2 \quad &= 4x_2 \quad \Rightarrow \quad 8x_1 = 8x_1 \end{aligned}$$

Si tomamos $x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \ (x_1 , x_2) = (1 , 2)$

De nuevo traducimos: con el **autovalor** $\lambda_2 = \mathbf{4}$ esta asociado el autoespacio vectorial generado por **(1 , 2)**.

Todo vector de la forma **(k , 2k)** con k ≠ 0 de este subespacio, es un autovector de **A** asociado a λ_2 = **4** ...

$$W_2 = \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 / (x_1 , x_2) = (k , 2k) \ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

Ahora veamos otro ejemplo, para no quedarnos sólo con las ocasiones en que todo funciona perfecto, porque no siempre es así...

Ejemplo:

Si ahora la matriz que nos dan es $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ y nos vuelven a pedir sus **autovalores**, repetimos lo anterior. Recordá, primero escribimos (λ I − A):

$$(\lambda I - A) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ahora vemos su determinante:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 9 = P(\lambda)$$

Ahora la ecuación que deberemos resolver será: $\lambda^2 + 9 = 0$. Perooooooo ... sus raíces son $\lambda = \pm$ **3 i** que son números imaginarios ! Si estamos suponiendo que trabajamos sólo para valores reales, en este caso diríamos que **A no tiene autovalores**.

En estos dos casos fue más que simple la resolución, en general es siempre así ... ¿ en qué se puede complicar ? Pues bien, podemos tener un determinante feo de calcular o que la ecuación del polinomio característico sea molesta de resolver ... pero ya estamos acostumbrados a eso, ¿ no ?

En general lo complicado del cálculo de **autovalores** y **autovectores** aumenta con el tamaño de la matriz que estemos tratando. Te paso un último ejemplo que engloba lo que te digo para que veas a qué me refiero:

Ejemplo: Supongamos que tenemos una matriz 3x3, y hay que averiguar sus **autovalores**. Hacemos igual que antes. Primero veamos cuál es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Y el pedazo de cuenta que hay que hacer es el siguiente:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -8 & -4 \\ -2 & \lambda - 7 & -3 \\ -3 & -6 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

El cálculo es largo, feo, y sobre todo, propenso a que hagamos muuuuchos errores en el camino. Es justo acá donde más cuidado hay que tener. El resultado es:

$$\boxed{\mathbf{P(\lambda)} = \lambda^3 - 10\,\lambda^2 - 23\,\lambda}$$

(Se entiende a lo que me refiero con determinantes feos de calcular ? Ni un solo 0 que permita simplificar la cuenta !!)

Ahora que resolvimos este horrible determinante, lo que tenemos que hacer es calcular las raíces del polinomio característico ... que también es una espantosidad !!!
Tenemos que resolver una ecuación cúbica !
Bueno, finalmente podemos decir que los autovalores de la matriz **A** son:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5 + 4\sqrt{3} \quad \lambda_3 = 5 - 4\sqrt{3}$$

En definitiva, el método de calcular **autovalores** no es complicado, sólo te la complican el determinante y el polinomio característico.

Hay que tener siempre en cuenta todas las propiedades de los determinantes para hacer más fácil los cálculos, sino podemos vernos metidos en una cantidad impensable de cuentas, y a recordar: cuantas menos cuentas hagamos, mejor! De eso se trata la matemática: poder resolver las cosas tratando de hacer la menor cantidad de cálculos posibles.

Ahora veamos algunas propiedades de los **autovalores** y **autovectores**:

- Una matriz real simétrica tiene sus **autovalores** reales.
- Los **autovalores** de una matriz, son los recíprocos de los **autovalores** de su matriz inversa, pero los autovectores son los mismos.
- Los **autovalores** de una matriz son iguales a los de su transpuesta.
- Los **autovalores** de una matriz diagonal o triangular, son los elementos de la diagonal principal.
- La suma de los **autovalores** de una matriz cualquiera, es igual a la traza de esa matriz.
- Si una matriz se multiplica por una constante, los **autovalores** resultarán multiplicados por esa constante, pero los **autovectores** no cambian.
- Los **autovectores** de autoespacios diferentes de una matriz simétrica son siempre ortogonales entre sí.
- Si dos matrices son semejantes, tienen los mismos **autovalores**.

Acá van un poco más de ejemplos, confirmando algunas de estas propiedades.

Ytambién para que veas el método a seguir en la resolución de este tipo de problemas con esto de los **autovalores** y los **autovectores**. (y qué problemas !)

<u>Ejemplos</u> (son muchos, pero es para que quede claro qué son estas propiedades):

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

Ahora los que tenemos que hacer es encontrar las soluciones del polinomio característico, es decir, las soluciones de:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Trabajando un poquito llegamos a que $\lambda_1 = \mathbf{1}$, $\lambda_2 = \mathbf{2}$, $\lambda_3 = \mathbf{3}$. Ahora busquemos sus autovectores asociados:

<u>Para $\lambda_1 = \mathbf{1}$</u>:

$$Ax = \lambda_1 x \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \approx \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nos queda:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 = x_1 &\Rightarrow x_2 = -2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 = x_2 &\Rightarrow x_2 = -2x_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = x_3 &\Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}}$$

Si tomamos $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -2 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0, -2, 1)$

$$W_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,/\, (x_1, x_2, x_3) = (0, -2k, k) \ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

<u>Para $\lambda_2 = \mathbf{2}$</u>:

$$Ax = \lambda_2 x \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \approx \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Nos queda:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2x_1 \quad &\Rightarrow \quad 2x_3 = x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2x_2 \Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = x_1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2x_3 \quad &\Rightarrow \quad 2x_3 = 0 \end{aligned}}$$

Si tomamos $x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x_1 , x_2 , x_3) = (1 , 1 , 0)$

$$W_2 = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 / (x_1 , x_2 , x_3) = (k , k , 0) \ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

<u>Para $\lambda_3 = \mathbf{3}$</u>:

$$Ax = \lambda_3 x \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

Nos queda:

$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3x_1 & \Rightarrow & x_2 + 2x_3 = 2x_1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 3x_2 & \Rightarrow & 2x_3 = x_2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3x_3 & \Rightarrow & x_1 = x_2 \end{array}$$

Si tomamos $x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (x_1 , x_2, x_3) = (2 , 2 , 1)$ es un **autovector** asociado a $\lambda_3 = 3$ y el subespacio generado:

$$W_3 = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 / (x_1 , x_2 , x_3) = (2k , 2k , k) \ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

Sin mucho esfuerzo podemos darnos cuenta de que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$ y eso es igual a la traza de A (la suma de los elementos de la diagonal de A). Veamos que pasa con la inversa de A, para comprobar. Primero calculamos $\mathbf{A^{-1}}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Después calculamos el polinomio característico:

$$\mathbf{P}(\lambda) = \lambda^3 - 11/6\ \lambda^2 + \lambda - 1/6$$

Y calculamos sus raíces (notemos que son los inversos de los **autovalores** de **A**),

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 1} \qquad \boldsymbol{\lambda_2 = 1/2} \qquad \boldsymbol{\lambda_3 = 1/3}$$

Y para finalizar, los **autovectores** asociados a estos **autovalores** (los cuales son los que generan los **autoespacios** asociados) son:

$$\mathbf{v_1} = (0 , -2 , 1) \qquad \mathbf{v_2} = (1 , 1 , 0) \qquad \mathbf{v_3} = (2 , 2 , 1)$$

¿ Notás que los **autovectores** son los mismos que los de **A** ?

Veamos que sucede con una matriz simétrica, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos su polinomio característico, haciendo det (λ**I** –**A**) = 0

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81$$

Y sus raíces, por ende **autovalores**, son:

$\lambda_1 = \mathbf{3}$ $\lambda_2 = \mathbf{-3}$ $\lambda_3 = \mathbf{9}$ Reales !

Los cálculos quedan de ejercicio, para que practiques ! Sus **autovectores** asociados son:

$\mathbf{v_1}$ = (1 , 1 , 1) $\mathbf{v_2}$ = (0 , -1 , 1) $\mathbf{v_3}$ = (-2 , 1 , 1)

Y como podemos comprobar tr(**A**) = 9 = $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Además, como se trata de una matriz simétrica, podemos ver que sus **autovectores** son ortogonales:

$v_1 \cdot v_2$ = (0 , -1 , 1) . (1 , 1 , 1) = 0 – 1 + 1 = 0
$v_2 \cdot v_3$ = (-2 , 1 , 1) . (0 , -1 , 1) = 0 – 1 + 1 = 0
$v_1 \cdot v_3$ = (-2 , 1 , 1) . (1 , 1 , 1) = -2 + 1 + 1 = 0

Al principio del capítulo teníamos un ejemplo con la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Y habíamos llegado a que sus autovalores eran $\lambda_1 = \mathbf{0}$ y $\lambda_2 = \mathbf{4}$. Los cuales tenían asociados lo autovectores (1 , -6) y (1 , 2). Supongamos ahora que hacemos: 2A, nos quedaría:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos **autovalores** y **autovectores** comenzando por:

$$(\lambda I - A) = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 6 & -1 \\ -12 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos su determinante:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 6 & -1 \\ -12 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 2) - 12 =$$
$$= \lambda^2 - 8\lambda = P(\lambda)$$

$\boxed{\lambda^2 - 8\lambda = 0 \Rightarrow \text{tenemos 2 autovalores para } \mathbf{A}\text{: } \lambda_1 = \mathbf{0} \text{ y } \lambda_2 = \mathbf{8}}$

Nos quedan los mismos **autovalores** pero multiplicados por 2 !! Ahora, con respecto a los **autovectores**, sabemos que todo vector de la forma **(k , -6k)** con k $\neq$ 0, es un **autovector** de **A** asociado a $\lambda_1 = \mathbf{0}$. En particular elegimos el vector (1 , - 6)

$W_1 = \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 / (x_1 , x_2) = (k , -6k) \ \forall \ k \in \mathbf{R} \}$

Veamos λ_2 = **8**:
En este caso nos queda un sistema de ecuaciones de la forma:

$$6x_1 + x_2 = 8x_1 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = x_2$$
$$12x_1 + 2x_2 = 8x_2 \quad \Rightarrow \quad 16x_1 = 16x_1$$

Si tomamos $x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \ (x_1 , x_2) = (1 , 2)$
De nuevo traducimos: con el **autovalor** λ_2 = **8** esta asociado el autoespacio vectorial generado por **(1 , 2)**. Todo vector de la forma **(k , 2k)** con $k \neq 0$ de este subespacio, es un autovector de **A** asociado a λ_2 = **4** ...

$W_2 = \{ x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 / (x_1 , x_2) = (k , 2k) \ \forall \ k \in \mathbf{R} \}$

O sea, llegamos que los **autovectores** asociados siguen siendo los mismos !!

- Ahora un caso en el que nos ahorraríamos muchísimo tiempo y esfuerzo, con tan sólo notar una cosa:

Sea la matriz 4x4 siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -6 & -8 & -9 \\ 0 & \lambda - 3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Este determinante estuvo facilito ! Alcanzaba con recordar que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal !, bueno, sigamos ....

Como el polinomio característico está en su forma factorizada es fácil ver cuales son las raíces:

$$\lambda_1 = \mathbf{1} \quad \lambda_2 = \mathbf{3} \quad \lambda_3 = \mathbf{2} \quad \lambda_4 = \mathbf{-1}$$

$$Ax = \lambda_1 x \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Nos queda:

$$\begin{aligned} -x_4 = x_4 &\Rightarrow x_4 = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 = x_3 &\Rightarrow x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = x_2 &\Rightarrow x_2 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 = x_1 &\Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Si tomamos $x_1 = 1$, un **autovector** asociado a $\lambda_1 = \mathbf{1}$ es (1 , 0 , 0 , 0), y el subespacio asociado a este **autovalor** es:

$$W_1 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \in \mathbf{R}^4 \,/\, (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (k , 0 , 0 , 0)\ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

Ahora veamos para los demás **autovalores**: <u>Para $\lambda_2 = \mathbf{3}$</u>:

$$Ax = \lambda_2 x \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\approx \qquad \begin{pmatrix} x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \\ 3x_4 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{aligned} -x_4 = 3x_4 &\Rightarrow x_4 = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 = 3x_3 &\Rightarrow x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3x_2 &\Rightarrow 0 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 3x_1 &\Rightarrow x_1 = 3x_2 \end{aligned}$$

Tomamos $x_2 = 1$, y el **autovector** asociado a $\lambda_2 = \mathbf{3}$ resulta (3 , 1 , 0 , 0)
El subespacio generado es entonces de la forma:

$$W_2 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \in \mathbf{R}^4 \,/\, (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (3k , k , 0 , 0)\ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

<u>Con $\lambda_3 = \mathbf{2}$</u>:

$$Ax = \lambda_3 x \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{pmatrix}$$

Que corresponde a:

$$
\begin{aligned}
-x_4 = 2x_4 \quad &\Rightarrow \quad x_4 = 0 \\
2x_3 + 3x_4 = 2x_3 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 0 \\
3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 2x_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -5x_3 \\
x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 2x_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -22x_3
\end{aligned}
$$

Tomamos $x_3 = 1$, y el **autovector** asociado a $\lambda_3 = \mathbf{2}$ resulta (-22 , -5 , 1 , 0).
El subespacio generado es entonces de la forma:

$$W_3 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \in \mathbf{R}^4 \,/\, (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (-22k , -5k , k , 0) \; \forall\, k \in \mathbf{R} \}$$

<u>Por último, con $\lambda_4 = \mathbf{-1}$</u>:

$$Ax = \lambda_4 x \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$$

Que corresponde a:

$$
\begin{aligned}
-x_4 = -x_4 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 0 \\
2x_3 + 3x_4 = -x_3 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = -x_4 \\
3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -x_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -1/4x_4 \\
x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 = -x_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 1/4x_4
\end{aligned}
$$

Tomamos $x_4 = 1$, y el **autovector** de $\lambda_4 = \mathbf{-1}$ es (1/4 , -1/4 , -1 , 1)
El subespacio generado está dado por:

$$W_4 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \in \mathbf{R}^4 \,/\, (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (k/4 , -k/4 , -k , k) \; \forall\, k \in \mathbf{R} \}$$

Esta matriz 4x4 es triangular, y si preste atención a las propiedades de **autovalores** y **autovectores**, seguro notaste que no hacía falta calcular los **autovalores**, eran los de la diagonal ! Es justamente ese tipo de "atajos" los que salvan tiempo, y los que hay que aprender a usar rápidamente.

Veamos un ejercicio típico, del tipo que se toman en algunos finales, que implica el cálculo y resolución de **autovalores** y **autovectores**, con un poco de todo, y que no es completamente similar a los anteriores.

El método es el mismo pero cambia lo que estamos buscando. Fijate:

- Sea **f**: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + x_2, ax_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

Determinar **a** $\in$ **R** para que –3 sea **autovalor** de **f**, y para ese valor, hallar el subespacio de **autovectores** asociados a él.

Para este problema es bueno recordar otra propiedad que nos recuerda la relación entre Transformaciones Lineales y matrices (que casi se puede decir que son prácticamente la misma cosa, pero sólo casi):

> Sea **f**: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal. Si **x** es un **autovector** de **f** asociado al **autovalor** λ, y **A** es la matriz que representa a **f**, entonces **x** es un **autovector** de **A** asociado al mismo **autovalor** λ, pues:
>
> $$A\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$$

Vamos a empezar por armar la matriz **A** que se corresponde con la Transformación Lineal del problema. Para hacer eso, aplicamos **f** a la base canónica de $\mathbf{R}^3$:

$$f(1, 0, 0) = (-2, 0, 1)$$
$$f(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$$
$$f(0, 0, 1) = (0, a, 3)$$

Ahora acomodamos los vectores que son el resultado en columnas, y obtenemos a la matriz A. Es muy importante mantener el orden de las columnas de acuerdo al orden de la <u>base canónica</u>, sino todo el cálculo que sigue no sería del todo correcto. Podemos representar la matriz de la transformación en la base canónica, **A**, como:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ya teniendo una matriz sobre la cual trabajar, encontremos sus **autovalores** primero que nada:

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -a \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda(a-6) + a$$

Nos piden que –3 sea **autovalor** de **A** así que reemplacemos por este valor en la ecuación

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda(a - 6) + \mathbf{a} = 0$$

y despejemos el valor de **a**:

$$(-3)^3 - (-3)^2 - 3\,(\mathbf{a} - 6) + \mathbf{a} = 0 = -27 - 9 + 18 - 2\mathbf{a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{a} = -9}$$

Ya habiendo resuelto una parte del problema, veamos que lo que nos falta es hallar los **autovectores** de **f** asociados a –3:

$$Ax = \lambda x \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \approx \qquad \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ ax_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{pmatrix}$$

Nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} -2x_1 + x_2 = -3x_1 & \Rightarrow & x_1 = -x_2 \\ -9x_3 = -3x_2 & \Rightarrow & 3x_3 = x_2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3x_3 & \Rightarrow & 3x_3 = x_2 \end{array}}$$

Tomando $x_3 = 1$ obtenemos un **autovector** asociado a $\lambda = \mathbf{-3}$: (-3 , 3 , 1). El subespacio asociado al **autovalor** $\lambda = \mathbf{-3}$ es el generado por el **autovector** que encontramos (en realidad, hay que notar que todos los vectores de este subespacio asociado son **autovectores** de ese **autovalor** para **A**). La forma explícita de este subespacio es:

$$W = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 \,/\, (x_1 , x_2 , x_3) = (3k , 3k , k)\ \forall\ k \in \mathbf{R} \}$$

Y ahora veamos un par de ejercicios típicos de examen:

- Sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la Transformación Lineal dada por:

$$\mathbf{f}(x_1 , x_2 , x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3 \,,\, -x_2 \,,\, - x_1 - 2x_2 + x_3)$$

Hallar una base de $\mathbf{R}^3$, **B** = { v_1 , v_2 , v_3 } tal que v_1 y v_2 sean **autovectores** de **f**

Como primer paso escribiremos la $M_C(f)$, que es la matriz que representa **f** en la base canónica, que no es ni más ni menos que colocar los coeficientes de **f**(x_1,x_2,x_3) en filas,

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = f$$

Busquemos ahora los **autovalores** de **f**, como venimos haciendo hasta ahora:

$$\det(M_C(f)-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ -1 & -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(\lambda I - M_C(f)) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

Ahora bien, las raíces de $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$ son $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ y $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda_3 = 2}$
(Esa cuentita te la dejo para vos... pero hacela ! Eh ?)
Ahora veremos qué **autovectores** tienen asociados los **autovalores** hallados:

$$0=(\lambda_1 I - M_C(f))x_1=\begin{pmatrix}(-1)-3 & 1 & -1\\ 0 & (-1)+1 & 0\\ 1 & 2 & (-1)-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-4x_1 + y_1 - z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = (y_1 - z_1)/4$$

$$x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2z_1 - 2y_1 = 2(z_1 - y_1)$$

Por lo tanto:

$$2(z_1 - y_1) = (y_1 - z_1)/4$$

Entonces encontramos que:

$$y_1 = z_1 \quad \text{y} \quad x_1 = 0$$

Por lo tanto, el **autovector** asociado a $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ es de la forma (0, 1, 1).

Veamos ahora para $\underline{\boldsymbol{\lambda_2 = 2\ (= \lambda_3)}}$

$$0=(\lambda_2 I - M_C(f))x_2=\begin{pmatrix}2-3 & 1 & -1\\ 0 & 2+1 & 0\\ 1 & 2 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-x_2 + y_2 - z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + z_2 = 0$$

$$3y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0$$

$$x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + z_2 = 0$$

Entonces, encontramos que

$$y_2 = 0 \quad y \quad x_2 = -z_2$$

Por lo tanto, el **autovector** asociado a $\lambda_2 = 2$ es de la forma (1, 0, -1). Luego una base como la buscada es entonces:

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1), (1,0,-1), (0,0,1)\},$$

donde se cumple la exigencia que v_1 y v_2 sean autovectores de **f** (el tercer vector de la base es uno cualquiera pero, linealmente independiente de los otros dos)

- Sean **B** = { v_1 , v_2 , v_3 } y **B´** = { $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 - v_2$, $v_2 + v_3$ } bases de un Espacio Vectorial **V**, y f: **V** $\rightarrow$ **V** la Transformación Lineal tal que,

$$M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Encontrar si es posible, una base de **V** formada por **autovectores** de **f**.

Ya sabemos, como en el ejercicio anterior, que lo primero que debemos hacer es encontrar $M_B(f)$, y para hacerlo tenemos que encontrar la matriz de cambio de base $C_{BB'}$ (Recuerden que para calcular la matriz de la transformación, en este caso deberíamos hacer $M_B(f) = M_{B'B}(f)\, C_{BB'}$). Para ello, podemos encontrar primero $C_{B'B}$, y luego hacer su inversa para obtener $C_{BB'}$. Así que empecemos:

$$(v_1 + v_2 + v_3)_B = (1 , 1 , 1)_B$$
$$(v_1 - v_2)_B = (1 , -1 , 0)_B$$
$$(v_2 + v_3)_B = (0 , 1 , 1)_B$$

Entonces la matriz $C_{B'B}$, y su inversa $C_{BB'}$, son:

$$C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que calculamos $M_B(f)$,

$$M_B(f) = M_{B'B}(f) C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

Y ahora encontremos sus **autovectores** (aquí vamos a dar los resultados, las cuentas son para practicar !). El polinomio característico es **P**(λ) = $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda + 5$
Sus **autovalores** son:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -5 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1}$$

Y sus **autovectores** asociados son,

$$w_1 = (1\ ,0\ ,1)_B \qquad w_2 = (-1\ ,1\ ,0)_B \qquad w_3 = (2\ ,0\ ,1)_B$$

Por lo tanto, una base de **V** formada de **autovectores** de **f** es:

B'' = { $v_1 + v_3$, $- v_1 + v_2$, $2v_1 + v_3$ }

DIAGONALIZACION

Esta es una de la aplicaciones de **autovectores** - **autovalores** que más nos va a servir.
Pero... ¿ Qué significa **diagonalizar** ?
Primero la definición formal, que es un tanto difícil, pero hay que saberla:

> "Se dice que una matriz cuadrada **A** es diagonalizable si hay una matriz inversible **P** tal que $\mathbf{P^{-1}AP}$ sea diagonal."

Aunque al principio parece que esta definición no nos dice nada, tiene todo lo que hace falta para proseguir. (Fijate que no dice como encontrar **P**. No dice que forma tendría, ni ninguna información útil sobre esta misteriosa matriz). Pero esta definición ya aporta algo muy importante: dice que **P** debe ser inversible.

Volviendo a un lenguaje más entendible, diagonalizar significa que si tenemos una matriz **A**, mediante una serie de artilugios (un cambio de base, eso es lo que se hace al multiplicar $\mathbf{P^{-1}AP}$), puede ser llevada a una matriz donde sólo tenga elementos en la diagonal principal.

Cuando estemos tratando con problemas de diagonalización, lo primero que vamos a querer saber es si la matriz **A** que tengamos es diagonalizable, y para eso, ya hay un par de reglas más útiles en la práctica. Empecemos por un teoremita:

> "Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es <u>diagonalizable</u> $\Leftrightarrow$ tiene **n autovectores** linealmente independientes, $\mathbf{x_1}$, ... , $\mathbf{x_n}$"

Y esto nos lleva a plantear otra regla muy útil:

"Si una matriz **A** $\in$ $\mathbf{R}^{nxn}$ tiene **n autovalores** todos distintos entre sí, entonces es diagonalizable."

Y esta propiedad en realidad sale de otra:

Sea $A \in R^{nxn}$. Si $x_1, \ldots, x_r$ son **autovectores** de A asociados a los **autovalores** $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente, y $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall \; i \neq j$ entonces $\{ x_1, \ldots, x_r \}$ es un conjunto linealmente independiente.

Aunque no es imprescindible saberse este tipo de cosas a la hora de resolver problemas, siempre es bueno, por las dudas nomás (y por los teóricos...)
Hagamos un ejemplo para ilustrar bien el método de diagonalización de una matriz.

Ejemplo:

Encontrar una matriz **P** que diagonalice a $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Primero, encontremos sus **autovectores**. Para hacer esto, antes deberemos hallar sus **autovalores**, no?

Volvamos a aplicar el método de los anteriores cálculos para **autovalores** y **autovectores**. Hay que tratar siempre de no enredarse con cálculos innecesarios, pero no saltear pasos por evitar escribir un par de líneas. Los errores en los cálculos son propensos a aparecer en esos lugares.

Bien, una vez que sabemos cuál es la forma de **(λI-A)** calculemos su determinante:

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25$$

Resolviendo ahora la ecuación:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25 = 0$$

Llegamos a que:

$$\lambda_1 = \mathbf{1} \quad y \quad \lambda_2 = \mathbf{5}$$

Ya tenemos los **autovalores** de **A**, veamos ahora qué **autovectores** tienen asociados.

Es muy importante darse cuenta de que no necesariamente hay siempre tantos **autovalores** como **filas** (o **columnas**, es lo mismo) haya en la matriz. Lo importante para poder decir si la matriz es **diagonalizable**, es la cantidad de **autovectores** que encontremos con esos **autovalores**. Si hay menos autovectores linealmente independientes que la dimensión del espacio al que pertenecen, entonces **A** no es **diagonalizable**.

Para $\lambda_1 = \mathbf{1}$:

$$Ax = \lambda_1 x \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 &= x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ 5x_3 &= x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = 1$, un **autovector** asociado a $\lambda_1 = \mathbf{1}$ sería: (1 , 1 , 0). El subespacio generado es el dado por los vectores de la siguiente forma:

$$W_1 = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 / (x_1 , x_2 , x_3) = (k , k , 0) \ \forall \ k \in \mathbf{R} \}$$

Para $\lambda_2 = \mathbf{5}$:

$$Ax = \lambda_2 x \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \approx \quad \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \\ 5x_3 \end{pmatrix}$$

Nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 5x_1 \Rightarrow -x_1 = x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 5x_2 \Rightarrow -x_1 = x_2 \\ 5x_3 &= 5x_3 \Rightarrow x_3 = x_3 \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = 1$ y $x_3 = 0$, un **autovector** asociado a $\lambda_2 = \mathbf{5}$ sería: (1 , -1 , 0)
Tomando $x_1 = 0$ y $x_3 = 1$, un **autovector** asociado a $\lambda_2 = \mathbf{5}$ sería: (0 , 0 , 1)
El subespacio generado de esta forma es el que sigue:

$$W_2 = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 / (x_1 , x_2 , x_3) = (k , -k , m) \ \forall \ k, m \in \mathbf{R} \}$$

Bien, ya tenemos **autovalores** y la forma de los **autovectores** de la matriz **A**. De acuerdo a los resultados a los que llegamos, el vector $\mathbf{x_1} = \mathbf{(1\ ,\ 1\ ,\ 0)}$ forma una base para el espacio generado por los **autovectores** asociados al **autovalor** $\lambda_1 = \mathbf{1}$, también los vectores $\mathbf{x_2} = \mathbf{(1\ ,\ -1\ ,\ 0)}$ y $\mathbf{x_3} = \mathbf{(0\ ,\ 0\ ,\ 1)}$ forman una base para el espacio generado por los **autovectores** asociados al **autovalor** $\lambda_2 = \mathbf{5}$.

Estos tres vectores son linealmente independientes (verificado, pero es un buen ejercicio comprobar esto!). Ahora el truco es colocar los **autovectores** en columnas uno al lado del otro, lo que arma una matriz del mismo tamaño que **A**.

> Esa matriz construida de los **autovectores** de **A** es la matriz **P**, y esta matriz es la que diagonaliza a **A**. El cambiar **A** a la base de sus **autovectores** es lo que la diagonaliza.

Es por esto que es necesario que haya **n** autovectores de **A** (donde **A** es **nxn**) linealmente independientes, si no los hubiese no habría forma de armar una matriz **P** inversible, lo cual significaría que no existe una base en la cual **A** se pudiese llevar a una forma diagonal.

Momento!! ¿Qué pasa con el orden en que ponemos los **autovectores** ? Rta: Nada !
El orden en que ponemos los autovectores sólo altera el orden en que van a aparecer los **autovalores** en la diagonal. Ahora veamos que pasa con los cálculos. Armamos **P**:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora hagamos la multiplicación de matrices, para comprobar que **P** diagonaliza a **A**:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y como podemos observar: LLEGAMOS A UNA MATRIZ DIAGONAL !!

Sólo para estar seguros, veamos que pasa si las columnas de **P** no están en el mismo orden: Sea ahora **P**:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hagamos la multiplicación, para verificar cómo queda:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Como habíamos dicho ! Sólo altera el orden en que aparecen los **autovalores** al hacer la **diagonalización**.

Existe un tipo de matrices para el cual la diagonalización se simplifica considerablemente, y es el caso de las matrices simétricas. Para este tipo de matrices, ya vimos que los **autovectores** encontrados son ortogonales (siempre y cuando sean de subespacios asociados diferentes), lo cual también permite ciertas ventajas a la hora de realizar la diagonalización.

Para realizar esta **diagonalización ortogonal**, como es llamada, hacer falta agregar un paso al método que hemos estado usando. El paso a agregar es que una vez encontrados los **autovectores**, debemos ortonormalizarlos, o sea, hacer que su norma (o módulo) valga 1 y que sean ortogonales entre sí (para esto es probablemente necesario aplicar el método de Gram-Schmidt, salvo el caso en que todos los **autovalores** sean distintos).

Veamos un par de ejemplos para que quede más claro:

Sea ***A*** una matriz 3x3,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculemos det ($\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A}$) = 0 para obtener el polinomio característico:

$$\mathbf{P}(\lambda) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 72\lambda - 108$$

Y los **autovalores** son:

$$\lambda_1 = \mathbf{3} \qquad \lambda_2 = \mathbf{6} \qquad \lambda_3 = \mathbf{6}$$

Ojo!!! No está mal, hay dos **autovalores** iguales (o en lenguaje más matematicoso, un **autovalor** con multiplicidad 2), a nosotros lo que nos preocupa para poder diagonalizar es que haya tantos **autovectores** como dimensión tenga el espacio vectorial en el que trabajamos, así que sigamos !!!

Sus **autovectores** asociados son:

$$v_1 = (1 , -1 , 1) \qquad v_2 = (-1 , 0 , 1) \qquad v_3 = (1 , 1 , 0)$$

Ahora viene el paso extra !! ☺. Tenemos que ortonormalizar estos vectores.
¿Cómo hacemos eso? Es fácil, mirá:
Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a los **autovectores** de cada autoespacio asociado por separado, y lo que obtenemos es:

$$v'_1 = \left(\sqrt{3}/3 \quad -\sqrt{3}/3 \quad \sqrt{3}/3\right) \quad v'_2 = \left(\sqrt{6}/6 \quad 2\sqrt{6}/6 \quad \sqrt{6}/6\right) \quad v'_3 = \left(\sqrt{2}/2 \quad 0 \quad -\sqrt{2}/2\right)$$

Estos nuevos vectores **v'**$_i$ son los **autovectores** normalizados que tenemos que usar.
Y ahora armamos la matriz **P** que diagonaliza **A**, con una gran ventaja: como **A** es simétrica, y los **autovectores** son ortonormales, P es una matriz ortogonal, o sea $\mathbf{P^{-1} = P^{T}}$.

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{6}/6 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & 2\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & 2\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{6}/6 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Veamos otro ejemplo de la diagonalización ortogonal: Ahora usemos esta otra matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su polinomio característico, haciendo det(λ**I** –**A**) = 0

$$\mathbf{P(\lambda)} = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81$$

Y sus raíces, por ende **autovalores**, son:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -3 \qquad \lambda_3 = 9}$$

Sus **autovectores** asociados son:

$$v_1 = (1 , 1 , 1) \quad v_2 = (0 , -1 , 1) \quad v_3 = (-2 , 1 , 1)$$

Ahora aplicamos el método de <u>Gram-Schmidt</u> a estos vectores, y los ortonormalizamos. (Notá que aplicar el método acá es mucho más fácil, sólo hay que dividir cada vector por su norma. Eso se debe a que los **autovalores** son todos distintos, y entonces los **autovectores** ya son todos ortogonales entre sí, no como en el caso anterior, en que dos de ellos pertenecían al mismo subespacio asociado, y no eran ortogonales entre sí):

$$v'_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3\end{pmatrix} \quad v'_2 = \begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix} \quad v'_3 = \begin{pmatrix}-2\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}$$

Ahora armamos la matriz **P**, y diagonalizamos:

$$P = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & 0 & -2\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & 0 & -2\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

Y eso es todo! Viste qué simple que se hace? Recordá, las cuentas más difíciles están en sólo ciertos puntos clave, después sólo hay que acordarse de mantenerse ordenado a la hora de aplicar el método de resolución, y tratar de entender bien lo que se está haciendo. Entonces,

Si tenemos una matriz simétrica de coeficientes reales, sabemos que:

- Todos sus **autovalores** son reales.
- Los **autovectores** de **subespacios** asociados diferentes son ortogonales.
- Si cumplen los requisitos de diagonalización, son <u>ortogonalmente diagonalizables, si se ortonormalizan sus autovectores</u>.

No debemos embromarnos demasiado con este tipo específico de matrices. Lo único de complicado que tiene el método por sobre el anterior es el tener que aplicar el método de <u>Gram-Schmidt.</u> Mucho cuidado con las cuentas en ese paso !!!!

Volviendo a la diagonalización que concierne a todas las matrices...

Veamos un ejercicio típico de parcial:

Sean **B** = { v_1 , v_2 , v_3 } y **B´** = { $v_1 - v_2$, $v_1 + v_3$, v_3 } bases de $\mathbf{R}^3$ y **f**: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la Transformación Lineal tal que

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Decidir si **f** es diagonizable.

Hallemos M_B(**f**), que es la matriz de la transformación f respecto a la base **B**. Es decir, se aplica a vectores cuyas coordenadas estén dadas en la base **B**, y devuelve vectores cuyas coordenadas están expresadas en la base **B**. Que lío !

Aunque parezca un poco críptico, es necesario prestar especial atención al orden y por cuál de las matrices de transformación se está multiplicando, de otro modo podemos vernos envueltos en un cálculo casi infinito !!

Debemos multiplicar a $M_{BB'}$(**f**) (fijate que es dato) por $C_{B'B}$, la matriz de cambio de base de **B'** a **B**.
La ecuación que nos queda es la siguiente:

$$M_B(\mathbf{f}) = C_{B'B}\, M_{BB'}\, (\mathbf{f}).$$

Ya que los vectores que resultan al aplicar la matriz $M_{BB'}$ (**f**) a un vector escrito en base **B** están escritos en la base **B'**. Luego la matriz $C_{B'B}$ los pasa a la base **B**.
Ahora hay que encontrar la matriz $C_{B'B}$. Para lograrlo, tomemos el primer vector de la base **B'**

$$\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = a\,\mathbf{v_1} + b\,\mathbf{v_2} + c\,\mathbf{v_3} \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -1,\ c = 0$$

Por lo tanto, $(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})_B = (1 , -1 , 0)_B$

Procedo de igual forma con los otros vectores de la base y obtengo:

$$(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_3})_B = (1 , 0 , 1)_B \quad \text{y} \quad (\mathbf{v_3})_B = (0 , 0 , 1)_B$$

Colocando estos vectores en columna armamos la matriz:

$$C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz de la transformación, expresada en la base **B** quedaría,

$$\Rightarrow \qquad M_B(f) = (C_{BB'})^{-1}\ M_{BB'}\ (f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora que ya tenemos M_B(**f**) veremos si la misma es diagonalizable.

En este caso, en nuestra matriz M_B(**f**) , n = 3, por lo que deberemos hallar 3 **autovalores** distintos o bien, 3 **autovectores** linealmente independientes, para así poder afirmar que **f** es diagonalizable. (Recordá que es algo que ya vimos antes).

Calculemos los **autovalores**:

$$\det(\lambda I - M_B(f)) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8$$

Encontramos que las raíces de esta ecuación son: $\lambda_1 = \lambda_2 = \mathbf{2}$ y $\lambda_3 = \mathbf{-2}$

Como los **autovalores** no son todos distintos, todavía no podemos afirmar que **f** sea diagonalizable. Para poder hacerlo, debemos calcular los **autovectores** asociados a los **autovalores** encontrados de **f** y ver si son linealmente independientes.

<u>Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$</u> :

$$0 = (\lambda I - M_B(f))x = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -2 & 2-1 & -1 \\ -1 & -3 & 2+1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtienen 2 ecuaciones:

$$-2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3 + 2x_1$$
$$-x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3(x_3 + 2x_1) - 3x_3 = 3x_1 = 0$$

entonces:

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = x_3$$

Por lo que el **autovector** hallado es de la forma: $(0, x_2 , x_2)$ o bien $(0 , 1 , 1)_B$.

Finalmente, tenemos 2 **autovalores** asociados a 1 solo **autovector** y con el **autovalor** restante (λ_3 = -2) hallaremos sólo otro **autovector**.
Vemos que la cantidad de **autovectores** linealmente independientes no será 3 sino 2, con lo que podemos afirmar que la matriz **f** es NO diagonalizable.

Para resumir el método, supongamos que nos dan una matriz **A** que es **nxn**:

1. Encontramos los autovalores λ_i de la matriz **A**: si tenemos **n** **autovalores** ya sabemos que es diagonalizable, si son menos por ahora no podemos decir nada.
2. Encontramos los **autovectores** asociados a los autovalores λ_i junto con sus subespacios asociados, y nos fijamos cuantos de ellos linealmente independientes nos quedan. Si son menos que **n**, ya no podemos hacer más nada, **A** no es diagonalizable. Si son **n** entonces **A** es diagonalizable y podemos seguir.
3. Armamos la matriz **P** poniendo los **autovectores** en columnas, y haciendo la multiplicación $\mathbf{P^{-1}AP}$, nos tiene que quedar una matriz que en su diagonal tiene los autovalores de **A**, y el resto es nulo.

RESUMEN

Tenemos una matriz A. Un vector x se dice autovector de A, si existe un número λ llamado autovalor, tal que se satisface la ecuación

$$Ax = \lambda x \quad (\text{ para } x \neq 0).$$

Si reagrupamos los términos de la ecuación para un solo lado, vemos que es equivalente decir que:

$$(A - \lambda I)\, x = 0 \quad (\text{ donde I es la matriz identidad })$$

Y este sistema tiene solución si y sólo si el determinante de $(A - \lambda I)$ es nulo. (Esto asegura que $(A - \lambda I)$ no tenga inversa, pues de tenerla vemos que multiplicando por ella a la ecuación, llegamos a un único resultado que es $x = 0$, pero esto es absurdo pues partimos de que x sea $\neq 0$). Por lo tanto, λ será tal que se cumpla la condición

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\leftarrow \text{ también llamada polinomio característico}).$$

Una vez que encontramos cuáles son todos los autovalores λ que satisfacen, tenemos

que encontrar para cada uno, el vector x que cumpla la ecuación $(A - \lambda I)\, x = 0$.
Este vector x es el autovector correspondiente a ese autovalor λ.

¿ Y cuántos autovectores podemos tener por cada autovalor?

Si el autovalor es simple, es decir, si ese valor de λ es autovalor una sola vez, le corresponde un único x. Ahora, el λ puede ser degenerado. Esto es, que su valor sea autovalor 2 o más veces. En ese caso el lambda puede tener Nro de autovectores desde uno hasta cuantas veces esté repetido. (Nro de degeneración). Para saber exactamente cuántos, tenemos que hacer el cálculo, no hay forma de saberlo de antemano.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES - EJERCICIOS DE PARCIALES

4. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ y $B'=\{\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$ y

$f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{B'B}(f)=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

Encontrar, si es posible, una base de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de f.

Tenemos que encontrar los autovectores de f y para esto, primero necesitamos calcular los autovalores. Si M es la matriz que representa a f, los autovalores λ satisfacen que:

$$M\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \qquad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad (M - \lambda)\,\mathbf{x} = 0$$

Y este sistema tiene solución si, y sólo si, $\det(M - \lambda) = 0$

Y estas ecuaciones las podemos pasar directamente a componentes cuando la matriz actúa sobre vectores de una base y nos devuelve vectores expresados en la misma base. En nuestro caso, la matriz de transformación de f, $M_{B'B}(f)$, actúa sobre un vector expresado en base B' y nos devuelve un vector en base B. Entonces acá, los autovalores cumplen que

$$M_{B'B}(f)(\mathbf{x})_{B'} = \lambda\,(\mathbf{x})_B$$

Pero acá tenemos un problemita, porque para resolver este sistema, es decir, para encontrar los valores de λ para los cuales se satisface la igualdad precisamos tener al vector **x** expresado en ambos lados de la ecuación en la misma base. Pero como ya leímos el apunte teórico, al problemita lo ten<u>íamos</u>, ya que sabemos que por medio de la matriz de cambio de base $C_{B'B}$ puedo expresar $(\mathbf{x})_B = C_{B'B}\,(\mathbf{x})_{B'}$. De modo que si reemplazamos esto en la ecuación anterior obtenemos

$$M_{B'B}(f)(\mathbf{x})_{B'} = \lambda\, C_{B'B}\,(\mathbf{x})_{B'}$$

Y pasando todo pa' la izquierda nos queda

$$(M_{B'B}(f) - \lambda\, C_{B'B})\,(\mathbf{x})_{B'} = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Con la idea de que λ me quede multiplicado sólo por la matriz identidad, vamos a multiplicar a toda la ecuación por el inverso de $C_{B'B}$. Como $C_{BB'} = (C_{B'B})^{-1}$, entonces $C_{BB'}\,C_{B'B} = I$, y

$$\Rightarrow \qquad (\underbrace{C_{B\,B'}\, M_{B'\,B}(f)}_{M_{B'B'}} - \lambda\, I\,)\,(\mathbf{x})_{B'} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Entonces vemos que vamos a encontrar los autovalores desde cualquiera de las dos ecuaciones (1) o (2). Los sistemas correspondientes a estas ecuaciones, tienen solución si, y sólo si

$$(\,1\,) \;\rightarrow\; \det\,(\,M_{B'\,B}(f) - \lambda\, C_{B'\,B}\,) = 0$$

$$(\,2\,) \;\rightarrow\; \det\,(M_{B'} - \lambda\, I\,) = 0$$

Fijate que acá estamos viendo que existen 2 formas equivalentes de encontrar los autovalores. Cuál de ellas es más simple y más corta, depende de qué matriz sea más fácil de calcular, $C_{B'\,B}$ o $C_{BB'}$. Para darnos cuenta de esto, es mejor hacer esta vez el cálculo de las 2 maneras. Pero te dejo para vos hacerlo de la primera forma, (que desde ya te digo que es más fácil y directa), así que no hay tutía y a hacerlo !!
De la segunda manera lo hacemos juntos.

Bien. Para plantear la ecuación (2) tenemos un pequeño detalle… primero necesitamos calcular $C_{BB'}$, lo cual es un detalle, pero no un problema pues sabemos hacerlo. Es más, tenemos 2 formas de hallarla, una es escribir $C_{B'\,B}$ y luego calculando su inversa obtenemos la matriz que buscamos. Acá escribir $C_{B'\,B}$ es simple, ya que son los vectores de la base B' puestos como columnas, esto es

$$C_{B'\,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tal vez sea un poco cuentero calcular la inversa, pero nada complicado.
La otra forma, es expresar a los vectores de la base B en función de los de B', y luego colocar éstos como columnas formando directamente la matriz $C_{BB'}$.
Ahora voy a hacerlo de esta última forma, pero estaría muy bueno que lo calcules también de la otra manera, incluso tal vez te parezca más fácil. Eso depende de vos.
Y entonces… ¡¡ Manos a las cuentas !!

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{v_1})_{B'} &= a\,(\,\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}\,) + b\,(\,\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}\,) + c\,(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}\,) \\ &= \underset{\substack{\chi \\ 1}}{(\,a + c\,)}\,\mathbf{v_1} + \underset{\substack{\chi \\ 0}}{(\,b + c - a\,)}\,\mathbf{v_2} + \underset{\substack{\chi \\ 0}}{(\,b + c\,)}\,\mathbf{v_3} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} b + c = 0 \;&\Rightarrow\; b = -\,c \\ b + c - a = 0 \;&\Rightarrow\; \mathbf{a = 0} \\ a + c = 1 \;&\Rightarrow\; \mathbf{c = 1} \\ &\rightarrow\; \mathbf{b = -1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad (\mathbf{v_1})_{B'} = (\,0, -1, 1\,)$$

De igual modo, …

$$(\mathbf{v_2})_{B'} = \underset{\substack{\chi\\0}}{(a+c)}\,\mathbf{v_1} + \underset{\substack{\chi\\1}}{(b+c-a)}\,\mathbf{v_2} + \underset{\substack{\chi\\0}}{(b+c)}\,\mathbf{v_3} \quad \left.\right\} \begin{array}{l} a+c=0 \;\Rightarrow\; c=-a \quad \mathbf{c=1}\\ b+c-a=1 \;\Rightarrow\; \mathbf{a=-1}\\ b+c=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{b=-1}\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{v_2})_{B'} = (-1, -1, 1)$$

$$(\mathbf{v_3})_{B'} = \underset{\substack{\chi\\0}}{(a+c)}\,\mathbf{v_1} + \underset{\substack{\chi\\0}}{(b+c-a)}\,\mathbf{v_2} + \underset{\substack{\chi\\1}}{(b+c)}\,\mathbf{v_3} \quad \left.\right\} \begin{array}{l} a+c=0 \;\Rightarrow\; a=-c\\ \mathbf{c=-1}\\ b+c-a=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{a=1}\\ b+c=1 \;\Rightarrow\; \mathbf{b=2}\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{v_3})_{B'} = (1, 2, -1)$$

Y colocando estos vectores como columnas de una matriz por fin obtenemos

$$\Rightarrow \quad C_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Y ahora sí, podemos continuar y calcular la matriz $M_{B'} = C_{BB'}\, M_{B'B}(f)$, para luego encontrar los λ tales que el $\det(M_{B'} - \lambda\, I) = 0$.

$$M_{B'} = C_{BB'}\, M_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Y

$$M_{B'} - \lambda\, I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \det\left(M_{B'} - \lambda\, I\right) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

Entonces, cuando λ tome los valores 3 y –1, se cumplirá la ecuación, y el sistema tendrá solución. Y así los autovalores son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Tenemos los autovalores, pero para responder a lo que nos piden en el problema, todavía necesitamos hacer unos cálculos más, pues precisamos conocer a los autovectores de f. Para hallarlos, precisamos resolver el sistemita

$$(M_{B'} - \lambda\ I\ )\ (\mathbf{x})_{B'} = 0,$$

para cada valor en particular de λ. O sea, encontrar los autovectores $(\mathbf{x})_{B'}$ que lo satisfagan.

Si $\lambda = 3$

$$\Rightarrow \quad (M_{B'} - 3I)(\mathbf{x})_{B'} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 0 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \quad x_1 = x_2 \\ \\ \rightarrow \quad x_3 = 0 \end{matrix}$$

$\therefore$ El autovector correspondiente al autovalor $\lambda = 3$ es $(\ \mathbf{x_1}\ )_{B'} = (\ 1, 1, 0\ )$

Para $\lambda = -1$

$$\Rightarrow \quad (M_{B'} - (-1)\,I)\ (\mathbf{x})_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \rightarrow \quad x_2 = 0 \\ \end{matrix}$$

$\therefore$ El autovector correspondiente al autovalor $\lambda = -1$ es $(\ \mathbf{x_2}\ )_{B'} = (\ 0, 0, 1\ )$

Entonces vemos que f tiene sólo 2 autovectores (expresados en B', es decir, en una base de **V**) . Y nos piden encontrar, si es posible, una base de **V** formada por éstos. Pero **V** tiene dimensión 3 (es decir, cualquier base está formada por 3 vectores LI), por lo que **no es posible dar una base** de éste espacio con sólo 2 vectores LI (los autovectores de f).

<u>Nota</u>: Sabemos que a un autovalor no degenerado, le corresponde sí o sí un único autovector. Ahora, en el caso de tener un autovalor degenerado (es decir, tenerlo repetido, una o varias veces (el –1 tiene degeneración 2 pues es autovalor 2 veces), le puede corresponder desde un autovector (eso seguro) hasta el número de degeneración del autovalor (es decir, el –1 puede tener 1 o 2 autovectores). Entonces fijate que si hacemos de nuevo éste o algún problema similar, de antemano sabemos que el λ no degenerado nos da un autovector y que no tenemos certeza de cuántos nos da el degenerado. Y ya vimos que vamos a poder dar una respuesta al problema dependiendo de cuantos autovectores tengamos en total. Por lo tanto, para ahorrarnos tiempo y cuentas, nos conviene comenzar el cálculo de los autovectores correspondientes al λ degenerado. En este caso lo hicimos "al revés", sólo para percibir lo que acabamos de hablar y para refrescar la mente sobre como calcular autovectores.

4. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ y $B'=\{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3;-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3;-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$ y $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ 2 & 6 & a \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales f tiene algún autovalor doble. Para cada valor de a hallado, determinar si f es diagonalizable.

Precisamos encontrar los autovalores de f, pero su matriz de transformación no actúa sobre un vector expresado en la misma base del vector que nos devuelve. Aquí $M_{BB'}$ (f) actúa sobre un $(\mathbf{x})_B$ y nos devuelve $(\mathbf{x})_{B'}$. y así los autovalores λ satisfacen que

$$M_{BB'}(f)(\mathbf{x})_B = \lambda\,(\mathbf{x})_{B'} = \lambda\, C_{BB'}\,(\mathbf{x})_B \qquad (\leftarrow \text{ pues } (\mathbf{x})_{B'} = C_{BB'}\,(\mathbf{x})_B\ )$$

$$(\,M_{BB'}(f) - \lambda\, C_{BB'}\,)\,(\mathbf{x})_B = 0 \qquad (\leftarrow \text{ reagrupo los términos })$$

Y finalmente multiplicamos por $C_{B'B} = (\,C_{BB'}\,)^{-1}$, pues $C_{B'B}\,C_{BB'} = I$

$$\Rightarrow \qquad (\,\underbrace{C_{B'B}\,M_{BB'}(f)}_{M_{BB}} - \lambda\, I\,)\,(\mathbf{x})_B = 0$$

(hicimos este ultimo paso porque, en este problema, calcular $C_{B'B}$ es bastante más simple que obtener $C_{BB'}$). Por lo tanto, debemos resolver: $\det(\,M_{BB}(f) - \lambda\, I) = 0$, y el primer paso para esto es calcular $C_{BB'}$ y luego M_{BB}.
Entonces, comenzamos escribiendo los vectores de la base B' en la base B, para luego colocarlos como columnas de una matriz, formando así $C_{B'B}$:

$$\left.\begin{aligned} &(\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3\,)_B = c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3 \quad \Rightarrow \quad c_1=1,\ c_2=1,\ c_3=-1 \\ &\qquad = (\,1,1,-1\,) \\ &(\,-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+2\,\mathbf{v}_3\,)_B = (\,-1,-1,2\,) \\ &(\,-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3\,)_B = (\,-1,0,1\,) \end{aligned}\right\} \; C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora, con esta matriz multiplicamos por el lado izquierdo a $M_{BB'}$ para obtener la tan buscada M_B…

$$C_{B'B}\,M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ 2 & 6 & a \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix} = M_{BB}\,(f)$$

Calculemos entonces la matriz de la que obtendremos el determinante:

$$M_{BB}\,(f) - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

Y finalmente encontramos el polinomio característico, cuyas raíces son los autovalores buscados

$$\det\,(M_{BB} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & a-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = a \end{cases}$$

Recordemos que en el problema nos están pidiendo dar los valores que debe tomar a para que f tenga algún autovalor doble. Claramente vemos que:

Si $\mathbf{a} = \mathbf{2} \;\Rightarrow$ tenemos un autovalor doble $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ y $\lambda_2 = -1$

Si $\mathbf{a} = \mathbf{-1} \;\Rightarrow$ tenemos un autovalor doble $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ y $\lambda_1 = 2$

Y ahora, para cada uno de estos valores de a, debemos determinar si f es diagonalizable. f digonizable? Recordemos…. Que una t.l. (de dimensión 3) sea diagonalizable significa que existe una base $\mathbf{B} = \{\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \,\}$, tal que $f(\, \mathbf{x}_j \,) = \lambda_j\, \mathbf{x}_j$.
Es decir, debemos tener 3 autovectores asociados al conjunto de autovalores, sean estos simples, dobles o triples. Por lo tanto, esto es lo que vamos a verificar, o no, para cada valor de a.

Caso $\mathbf{a} = \mathbf{2} \;\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 2$ y $\lambda_2 = -1$
Sabemos que al autovalor simple le corresponde un autovector $\mathbf{x}_1$, pero como nuestro interés es saber la cantidad de autovectores y no la forma de ellos, no es necesario que lo calculemos. Lo importante es ver si el autovalor doble nos genera uno o dos autovectores. Entonces… veámoslo !!

Siendo ($M_{BB}(f) - \lambda I$) $\mathbf{x}_j = 0$, la ecuación que satisfacen los autovectores $\mathbf{x}_j$, para $\lambda =$ 2 tenemos que:

$$(M_{BB}(f) - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{vmatrix} x_2 \\ -x_2 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathbf{x_2} = (1,0,0) \\ \\ \mathbf{x_3} = (0,0,1) \end{matrix}$$

Vemos que el λ doble nos genera 2 autovectores. Por lo que en total tenemos 3 autovectores y como bien ya dijimos esto implica que la f es **digonalizable**.

Caso **a** = $-$**1** $\Rightarrow$ $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ y $\lambda_1 = 2$

Al λ_1 que es simple le corresponde un autovalor, llamemoslo **x'**$_1$. Veamos cuántos autovectores nos genera el λ doble:

$$\left(M_{BB}(f) - (-1)\,I\right) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x'_1 + x'_2 \\ 0 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x'_1 = -x'_2 \\ \\ x'_2 = 0 \end{matrix}\right\} \; x'_1 = -x'_2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x'_2} = (0, 0, 1)$$

Y este autovalor doble sólo nos genera un autovector, por lo que tenemos un total de 2 autovectores (y no 3) asociados a este conjunto de λ's y, por lo tanto, f **no** es **diagonizable.** En resumen…

$$\text{f tiene autovalor doble si} \quad \begin{cases} \mathbf{a = 2} & \rightarrow \quad \textbf{f es diagonizable} \\ \mathbf{a = -1} & \rightarrow \quad \textbf{f no es diagonizable} \end{cases}$$

B4. Sean $B = \{(1,1,1);(0,1,1);(0,0,1)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8-a & a & 4 \\ a^2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar, si es posible, $a \in \mathbb{R}$ para que $(1,2,0) \in \mathrm{Nu} f$ y $(1,3,3) \in \mathrm{Im} f$.

Nos están pidiendo encontrar, si es posible, a $\in \Re$ para que **v** $\in$ Nu(f) y **w** $\in$ Im(f), donde llamamos **v** = (1, 2, 0) y **w** = (1, 3, 3). Que **v** $\in$ Nu(f) significa que f(**v**) = **0.** Pero nosotros conocemos a la matriz asociada a la transformación f, M_{BB}(f), que actúa sobre vectores escritos en la base B que nos dan, y nos devuelve vectores expresados en esa misma base. Por lo tanto esta matriz, actuando sobre las componentes de **v** en la base B, debe mandarnos al vector nulo. Es decir

$$M_{BB}(f)\ (\mathbf{v})_B = 0.$$

Al hacer esta cuenta vamos a encontrar cuánto debe valer a para que la ecuación se cumpla, pero antes debemos encontrar $(\mathbf{v})_B$:

$$\mathbf{v_B} = (1, 2, 0)_B = c_1 (1, 1, 1) + c_2 (0, 1, 1) + c_3 (0, 0, 1)$$

$$= (c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3)$$

Luego debe cumplirse que

$$\begin{cases} \mathbf{c_1 = 1} & & \\ c_1 + c_2 = 2 & \Rightarrow \quad 1 + c_2 = 2 & \Rightarrow \mathbf{c_2 = 1} \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 & \Rightarrow \quad 1 + 1 + c_3 = 0 & \Rightarrow \mathbf{c_3 = -2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v_B} = (1, 2, 0)_B = (1, 1, -2)$$

Y teniendo este vector, podemos hacer la cuenta que queremos:

$$M_{BB}(f)(\mathbf{v})_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8-a & a & 4 \\ a^2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 - a + a - 8 \\ a^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Pero dijimos que debe ser:

$$M_{BB}(f)(\mathbf{v})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = \pm 2}$$

Por lo tanto hay dos valores de a, 2 y –2, para los cuales se satisface que $\mathbf{v} \in \text{Nu } f$. Pero no sólo queremos que pase esto, también debe cumplirse que $\mathbf{w} \in \text{Im } f$, lo que significa que $\exists$ (existe) un **u** tal que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Pero debemos trabajar con la matriz de transformación $M_{BB}(f)$, la cual nos devuelve vectores expresados en la base B; entonces debemos expresar tanto a **u** como a **w** en esta base para plantear que $M_{BB}(f)(\mathbf{u})_B = (\mathbf{w})_B$.

Escribamos **w** como combinación lineal de los elementos de la base B, para encontrar sus coordenadas en esta base:

$$\mathbf{w_B} = (1, 3, 3)_B = (c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3) \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1; \; c_2 = 2; \; c_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{w})_B = (1, 2, 0)$$

Nos falta encontrar $(u)_B$, pero como a **u** no lo conocemos explicitamente, podemos decir que sus coordenadas en la base B son $(\mathbf{u})_B = (u_1, u_2, u_3)$.

Y ahora sí, podemos hacer el producto para encontrar qué valores de a lo satisfacen:

$$M_{BB}(f)\,(\mathbf{u})_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8-a & a & 4 \\ a^2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ (8-a)\,u_1 + a\,u_2 + 4\,u_3 \\ a^2\,u_1 + 2\,u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{w})_B$$

Y para que la igualdad se cumpla, debe satisfacerse este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 1 \\ (8-a)\,u_1 + a\,u_2 + 4\,u_3 = 2 \\ a^2\,u_1 + 2\,u_3 = 0 \end{cases}$$

de la 1° y 3° podemos escribir u_2 y u_3 en función de u_1

$\rightarrow\ u_2 = u_1 - 1$

$\rightarrow\ u_3 = -\dfrac{a^2}{2}\,u_1$

Reemplazando estos valores en la 2° ecuación obtenemos:

$$(8-a)\,u_1 + a\,(u_1 - 1) + 4\left(-\frac{a^2}{2}\,u_1\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad (8-2a^2)\,u_1 - a = 2$$

$\Rightarrow$ Para que w $\in$ Im(f), debe cumplirse $(8 - 2a^2)u_1 = 2 + a$

Ya vimos que, en principio, los valores posibles de a son 2 ó –2 pues para estos valores se satisface que v $\in$ Nu(f). Veamos si la última ecuación planteada se cumple para alguno de estos valores…

Si $a = 2$ $\rightarrow$ $(8 - 2.4)\ u_1 = 4$, pero $0 = 4$ es absurdo !!!

$\therefore$ $a = 2$ **no** satisface lo pedido.

Si $a = -2$ $\rightarrow$ $(8 - 2.4)\ u_1 = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 0$ y la igualdad se satisface !!

Por lo tanto, el único valor de a para el cual v $\in$ Nu (f) y **w** $\in$ Im (f), es $\mathbf{a = -\ 2}$.

FIN AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

¿ Viste algo en este libro que no está bien ?
¿ Hay algo que te parece que habría que cambiar ?
¿ Encontraste algún error ?
¿ Hay algo mal explicado ?

Mandame un mail y lo corrijo.

www.asimov.com.ar

OTROS APUNTES ASIMOV

* EJERCICIOS RESUELTOS DE LA GUIA DE ALGEBRA.
  Son todos los ejercicios de la guía resueltos y explicados

* PARCIALES Y FINALES RESUELTOS DE ALGEBRA
  Son parciales y finales que fueron tomados el año pasado y en años anteriores. Todos los ejercicios están resueltos.

* EJERCICIOS RESUELTOS DE LA GUIA DE ANALISIS.
  Son todos los ejercicios de la guía resueltos y explicados

* LIBRO ANALISIS PARA EL CBC
  Tiene la teoría que se da en clase explicada en castellano.

* PARCIALES Y FINALES RESUELTOS DE ANALISIS
  Son parciales y finales que fueron tomados el año pasado y en años anteriores. Todos los ejercicios están resueltos.

* LIBRO FISICA PARA EL CBC
  Tiene toda la teoría que se da en la clase pero hablada en Castenayo bien criollo.

Índice

Pág.