Método del Pivoteo

Presentación

Es una forma mecánica de realizar los cálculos que se hacen cuando se implementa el método de Gauss-Jordan.

Usos: Resolución de sistemas de ecuaciones.

Recordar que la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es utilizada para calcular la CL, decidir si un conjunto de vectores es LI o LD, Subespacio generado, Subespacios fundamentales de una matriz, núcleo e imagen de una TL. También se lo usa para hallar la matriz inversa y para el cálculo del determinante (regla de Chío).

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

El algoritmo (pasos a seguir):

Se elige un “1” en la matriz y se lo designa como pivot (si no hay, se lo crea (*)).

- A la fila del pivot se la deja igual, y a la columna se la completa de ceros.
- Los restantes elementos se transforman según el siguiente cálculo:
  - Supongamos que el pivot está en la posición a_{ij} y el elemento que necesito transformar está en la posición a_{hk}, el transformado de a_{hk} será: $t(a_{hk}) = a_{hk} \cdot a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{hj}$. Como el pivot es 1, entonces queda: $t(a_{hk}) = a_{hk} \cdot 1 - a_{ik} \cdot a_{hj}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{hj} & \dots & a_{hk} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \dots & a_{ik} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & t\left(a_{hk}\right) \end{pmatrix}$$

- Se elige el próximo pivot en una fila y columna diferentes a las anteriores.
- Observación: Si en la fila/columna del pivot hay un cero, dicha columna/fila queda igual.
- Observación 2: El proceso termina cuando no se puede pivotear más.

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

El algoritmo (pasos a seguir):

Nota (*): Para crear un “1” puede hacerse:

- Dividir a toda la fila por el valor que tiene la celda que quiero usar como pivot.
- Opción: A la fila donde queremos conseguir el pivot, sumarle o restarle múltiplos de otra/s filas paralelas, de modo tal que allí quede un “1”.

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Elegimos el 1 de la posición a_{11} como pivot.

- A la fila 1 se la deja como está.
- A la columna 1 se la completa de ceros (excepto el lugar del pivot)
- Calculamos los transformados de: –3, 4, 8, –1, 3, 6.

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Los transformados:
–3.1 – 1.(–2) = –1
4.1 – ((–1).(–2)) = 2
8.1 – ((–1).(–2)) = 6
(–1).1 – 1.(–1) = 0
3.1 – (–1).(–1) = 2
6.1 – (–1).(–1) = 5

Elegimos el 1 de la posición a_{11} (1er matriz) como pivot.

- En la 2da matriz, a la fila 1 se la deja como está.
- A la columna 1 se la completa con ceros (excepto en el lugar del pivot)
- Calculamos los transformados de: –3, 4, 8, –1, 3, 6.

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Quiero pivotear en la posición a_{22} (2da matriz) pero no es un “1”.

Para transformarlo, divido a toda la fila por (–1).

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Quiero pivotear en la posición a_{22} (2da matriz) pero no es un “1”.

Para transformarlo, divido a toda la fila por (–1).

Luego, puedo pivotear en esa posición (3er matriz):

- A la fila 2 se la deja como está.
- A la columna 2 se la completa de ceros (excepto el lugar del pivot)
- En la columna del pivot hay un “0” por lo cual los elementos de la fila 3 no se modifican.
- En la fila del pivot hay un cero por lo que la columna 1 queda igual (las columnas en las cuales se elige el pivot, no se modifican).
- Calculamos los transformados de: –1, –1, 2, 5.

Método del Pivoteo

Los transformados:
(–1).1 – 1.(–2) = 1
(–1).1 – 1.(–6) = 5

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Quiero pivotear en la posición a_{22} (2da matriz) pero allí no hay un “1”.

Para transformarlo, divido a toda la fila por (–1).
Luego, puedo pivotear en esa posición (3er matriz):

- A la fila 2 se la deja como está.
- A la columna 2 se la completa de ceros (excepto el lugar del pivot)
- En la columna del pivot hay un “0” por lo cual los elementos de la fila 3 no se modifican.
- En la fila del pivot hay un cero por lo que la columna 1 queda igual (las columnas en las cuales se elige el pivot, no se modifican).
- Calculamos los transformados de: –1, –1, 2, 5.

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Quiero pivotear en la posición a_{33} (de la 4ta matriz) pero no hay “1”.
Para transformarlo, divido a toda la fila por 2 (ver 5ta matriz).

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Quiero pivotear en la posición a_{33} (de la 4ta matriz) pero no hay "1".

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Para transformarlo, divido a toda la fila por 2 (ver 5ta matriz).
Luego, puedo pivotear en esa posición:

- A la fila 3 se la deja como está.
- A la columna 3 se la completa de ceros (excepto el lugar del pivot)
- En la fila del pivot hay dos cero por lo que las columnas 1 y 2 quedan igual.
- Calculamos los transformados de: 5, –6.

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar

Método del Pivoteo

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Los transformados:
(–6).1 – (–2)(5/2) = –1
5.1 – 1.(5/2) = 5/2

Como no se puede pivotear más, ha finalizado el procedimiento.
Interpretación: Si cada columna corresponde con las variables x, y y z, esto significa que x = 5/2, y = –1 y z = 5/2

jkamlofsky@frh.utn.edu.ar