CARACTERIZACIÓN ESTADÍSTICA DE RECURSO EÓLICO CON FINES ENERGÉTICOS

Ing. BONOLI ESCOBAR, MARIANO; UTN FRH – GESE[1] ; mbonoli@fi.uba.ar
Lic. GOGNI, VALERIA; UTN FRH – GESE[1]; Valeria.gogni@gmail.com
Ing. EDWARDS, DIEGO; UTN FRH – GESE[1]; Edwards_diego@yahoo.com.ar
Ing. BUFANIO, RUBEN; UTN FRH – GESE[1]; ruben.bufanio@speedy.com.ar

1. INTRODUCCIÓN

1.1 El recurso eólico

La medición del recurso eólico es uno de los pilares fundamentales para la caracterización de un sitio en donde se pretenda instalar una planta de generación de energía eléctrica a través de turbinas de viento. La producción de energía a través de fuentes renovables ha alcanzado en los últimos cinco años crecimientos sorprendentes de más del 30% por año en el mundo. Políticas de no dependencia y cuidado del medio ambiente como las desarrolladas en Europa han pronosticado una penetración de este tipo de energía de un 20% para el 2020 y en dicho valor la energía eólica es el mayor porcentaje no menos de un 18%.

La Argentina, dominada en su matriz energética eléctrica por la generación convencional fósil, cuenta con posibilidades inigualables en cuanto a recursos eólicos. Posee velocidades medias de viento en la mayor parte de su territorio, medidas a 50 metros de altura, que superan los 6m/s.

La medición del viento como recurso puede parecer conceptualmente simple, sin embargo, por naturaleza el viento es un proceso estocástico y depende de una gran

[1] Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Haedo. Grupo de Estudios Sobre Energía

cantidad de factores como estacionales, climatológicos como temperatura presión y humedad y características geográficas, entre otros.

La correcta estimación del potencial eólico de una región, es de vital importancia a la hora de evaluar proyectos de inversión y sobre todo conseguir financiamiento para los mismos.

1.2 Medición del recurso eólico

Para registrar la velocidad del viento, se utilizan anemómetros que miden la intensidad del viento y registrando los promedios de velocidad cada 10 minutos.

Si deseáramos realizar estimaciones de corto plazo de la velocidad del viento, deberíamos tener en cuenta la característica estócastica de la velocidad del viento. Sin embargo para el estudio de la potencia generada, lo que interesa en este tipo de centrales es el comportamiento de la velocidad del viento en el largo plazo.

Surge así el estudio de las distribuciones de velocidad del viento. Técnicamente estamos hablando de la distribución de probabilidad de los promedios de velocidad, tomados a intervalos regulares de tiempo (en general 10').

Al estudiar datos empíricos de estas distribuciones, es muy frecuente encontrar que la distribución de Weibull se ajusta a los datos razonablemente. Sin embargo, pueden encontrase estudios donde se utilizan otras distribuciones como la LogNormal y la Gamma, entre otras distribuciones de asimentría positiva. En definitiva, cada caso exige el estudio para confirmar o no estos modelos.

1.3 Objetivo del trabajo

El fin último de todos los estudios de recurso eólico para generación de energía, es la estimación de la potencia que se puede generar en un determinado sitio. Con este fin, es la potencia proyectada, la que define si un sitio es indicado para la instalación de un parque eólico.

Nos proponemos estimar las las características de la potencia generadas por aerogeneradores es un determinado sitio.

Para ello es necesario por un lado estimar las distribuciones de probabilidad de la velocidad del viento en el sitio que necesita ser caracterizado. Luego, a partir de esta informaciación poder dar las características de la potencia que podemos obtener bajo esas condiciones de viento.

2. CÁLCULO DE POTENCIAS

2.1 Potencia contenida en el viento $P' = P_{Viento}$

Los molinos de vientos extraen energía contenida en el viento para convertirla en energía eléctrica y entregarla a la red.

Por el solo hecho de tener velocidad, el viento posee energía. Esta energía que se busca extraer del viento es fundamentalmente energía cinética ε que podemos calcular a través de $\varepsilon = \frac{1}{2} m\, v^2$.

Además, siendo la potencia la derivada de la energía respecto del tiempo, podemos escribir que:

$$P = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt} v^2 \qquad \text{con} \qquad \frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho A\, v$$

donde A es el área barrida por el rotor, ρ es densidad de aire y $\dot{m}$ el flujo másico. Utilizando el sistema métrico internacional: $[v] = metros\,/\,segundo; [\rho] = Kg\,/\,m^3$ $[A] = m^2; [P] = Watts$.

Llegamos así a obtener la potencia contenida en el viento, que denominaremos P' o P_{Viento}

$$P' = P_{Viento} = \frac{1}{2}\rho A v^3$$

2.2 Potencia aprovechable del viento $P'' = P_{Aprovechable}$

Si bien P' es la potencia contenida en el viento, de acuerdo con el principios de la conservación de la energía, solo es posible extraer una parte P'. El límite de Betz establece en 0,59 la proporción máxima de energía que podemos extraer del viento utilizando un aerogenerador.

La potencia se ve entonces afectada por un factor C_p, al que llamaremos coeficiente de potencia, donde $0 \le C_p \le 0,59$. A mayor eficiencia aerodinámica del sistema generador, más alto será el valor de C_p.

En aplicaciones reales, el valor de C_p, rara vez toma valores superiores a 0,4. En los generadores de velocidad variable, es posible modificar los parámetros de operación logrando mantener el valor de C_p lo más alto posible y aproximadamente constante, llamaremos a este valor C_{Pmax}. Bajo estas condiciones, será:

$$P'' = P_{Aprovechable} = C_{Pmax}\ P_{Viento} = C_{Pmax}\ \frac{1}{2}\rho A v^3$$

2.3 Potencia generada $P''' = P_{Generada}$

Por último, no toda la energía aprovechable del viento es posible convertirla en energía eléctrica, sino que debemos tener en cuenta ciertas limitaciones dadas por las características operativas del molino:

- Existe una velocidad mínima de viento que requieren los molinos para operar (velocidad de *cut-in*).

- Los molinos tienen la capacidad de generar energía hasta una determinada potencia nominal $(P_{Nominal})$. Una vez que el generador comienza a entregar potencia nominal, por más que aumente la velocidad del viento, se seguirá generando potencia nominal.

- Cuando los vientos son extremadamente altos, se requiere detener el molino para evitar daños y conservar su vida útil. Así, cuando el viento supere el valor máximo admitido (velocidad de *cut-out*), el molino se detiene y la potencia generada será nula.

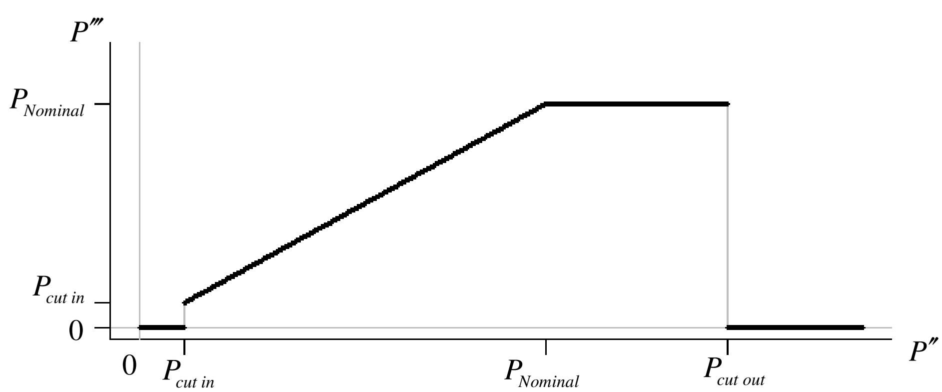
A partir de estas condiciones podemos establecer la potencia generada $P''' = P_{Generada}$ en función de la velocidad del viento:

$$P''' = P_{Generada} = \begin{cases} 0 & v \le V_{cut\,in} \\ C_{Pmax}\,\dfrac{1}{2}\rho A v^3 & V_{cut\,in} < v \le V_{Pot-Nominal} \\ P_{Nominal} & V_{Pot-Nominal} < v \le V_{cut\,out} \\ 0 & v > V_{cut\,out} \end{cases} \qquad \text{Con} \qquad V_{Pot-Nominal} = \left(\frac{2\,P_{Nominal}}{C_p\,\rho A} \right)^{1/3}$$

O bien, en función de $P_{Aprovechable}$:

$$P''' = P_{Generada} = \begin{cases} 0 & P'' \le P_{cut\,in} \\ P'' & P_{cut\,in} < P'' \le P_{Nominal} \\ P_{Nominal} & P_{Nominal} < P'' \le P_{cut\,out} \\ 0 & P'' > P_{cut\,out} \end{cases} \qquad \text{Con} \qquad \begin{aligned} P_{cut\,in} &= C_{Pmax}\,\frac{1}{2}\rho A V_{cut\,in}^3 \\ P_{cut\,out} &= C_{Pmax}\,\frac{1}{2}\rho A V_{cut\,out}^3 \end{aligned}$$

La potencia P''' tendrá entonces una distribución de probabilidad de naturaleza mixta, que queda determinada a través de los parámetros de la distribucíon del viento y de la turbina que se desea utilizar ($V_{cut\,in}$, $V_{cut\,out}$ y $P_{Nominal}$).



3. Distribución de probabilidad para la velocidad del viento

Para poder ajustar una serie de datos históricos a una determinada distribución de probabilidad, debemos definir en primer lugar el modelo de probabilidad utilizaremos para realizar el ajuste.

Al estudiar datos empíricos de estas distribuciones, la distribución de probabilidad que se presenta con mayor frecuencia es la de Weibull, le siguen en importancia la de Rayleigh, y con bastante menor fecuencias han resultados de utilidad otras distribuciones como Log-Normal y Gamma. La distribución de Rayleigh no es mas que un caso particular de la Weibull con parámetro de escala $K = 2$, por lo que el ajuste de los datos a una distribución de Weibull resulta mas general y la incluye.

Resulta difícil de encontrar fundamentos teóricos que justifiquen el uso de una u otra distribución para la distribución del viento, razón por la cuál la práctica mas adecuada, resulta ser comparar los ajustes logrados con todos los modelos mencionados y elegir el que mejor se comporta en cada situación.

4. Distribuciones de probabilidad para las potencias

4.1 Distribuciones de probabilidad para P' y P''

Una vez seleccionada la distribución de probabilidad de la velocidad del viento y estimados sus parámetros, interesa a estudiar las distribuciones de probabilidad de la potencia contenida en el viento P', de la potencia aprovechable P'' y finalmente de la potencia generada P'''.

Para el caso de la distribución de P' y P'', se demuestra en el presente trabajo que para vientos cuya distribución de probabilidad es Weibull o LogNormal, tanto P' y P'', tendrán también distribución de Weibull y LogNormal respectivamente. Para el caso de velocidades con distribución Gamma, se han hallado las distribuciones de probabilidad de P' y P'' que no pertenecen a ninguna distribución de probabilidad conocida.

Se resumen a continuación los resultados en la siguiente tabla. Las expresiones se demuestran en los apéndices I y II del presente trabajo.

		Distribución del viento		
		Weibull	**LogNormal**	**Gamma**
		K Parámetro de Forma C Parámetro de Escala	$m = E[ln(x)]$ Parámetro de Forma $D = \sigma[ln(x)]$ Parámetro de Escala	α Parámetro de Forma β Parámetro de Escala
Viento	**Distribución**	$v \equiv Weibull(C;K)$	$v \equiv LogNormal(m;D)$	$v \equiv Gamma(\alpha;\beta)$
	Media	$E(v) = C\ \Gamma(1+1/K)$	$E(v) = Exp\left(m + D^2/2\right)$	$E(v) = \alpha\ \beta$
	Varianza	$V(v) = C\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{K}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]$	$V(v) = Exp\left(2\,m + D^2\right)\left[Exp\left(D^2\right) - 1\right]$	$E(v) = \alpha\ \beta^2$
P'	**Distribución**	$P' = P_{Viento} \equiv Weibull(C';K')$ $C' = \frac{1}{2}\rho A C^3$ y $K' = \frac{1}{3}K$	$P' = P_{Viento} \equiv LogNormal(m';D')$ $m' = 3m + \ln(\rho A/2)$ $D' = 3D$	$f(P') = \left(\frac{2}{\rho A}\right)^{\frac{1}{3}\alpha} \frac{P'^{\frac{1}{3}\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha-1}} \exp\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$ $P' \geq 0$
	Media	$E(P') = \frac{\rho A C^3}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{K}\right)$	$E(P') = Exp\left(m' + D'^2/2\right)$	$E(P') = \frac{\beta^6\ \Gamma(\alpha+6)}{4\,\Gamma(\alpha)}\rho^2 A^2$
	Varianza	$V(P') = \frac{\rho A C^3}{2}\left[\Gamma\left(1+\frac{6}{K}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{3}{K}\right)\right]$	$V(P') = Exp\left(2\,m' + D'^2\right)\left[Exp\left(D'^2\right) - 1\right]$	$V(P') = \frac{\beta^9\ \Gamma(\alpha+9)}{8\,\Gamma(\alpha)}\rho^3 A^3 - \left(\frac{\beta^6\ \Gamma(\alpha+6)}{4\,\Gamma(\alpha)}\rho^2 A^2\right)^2$
P''	**Distribución**	$P'' = P_{Aprovechable} \equiv Weibull(C'';K'')$ $C'' = \frac{1}{2}C_p \rho A C^3$ y $K'' = \frac{1}{3}K$	$P'' = P_{Aprovechable} \equiv LogNormal(m'';D'')$ $m'' = 3m + \ln\left(\rho A C_p/2\right)$ $D'' = 3D$	$f(P'') = \left(\frac{2}{C_p \rho A}\right)^{\frac{1}{3}\alpha} \frac{P''^{\frac{1}{3}\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha-1}} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P''}{C_p \rho A}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$ $P'' \geq 0$
	Media	$E(P'') = \frac{A\,C^3 \rho}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{K}\right)$	$E(P'') = \mathrm{Exp}\left(m'' + D''^2/2\right)$	$E(P'') = \frac{\beta^6\ \Gamma(\alpha+6)}{4\,\Gamma(\alpha)} C_p^2\ \rho^2 A^2$
	Varianza	$V(P'') = \frac{A\rho\,C^3}{2}\left[\Gamma\left(1+\frac{6}{K}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{3}{K}\right)\right]$	$V(P'') = Exp\left(2\,m'' + D''^2\right)\left[Exp\left(D''^2\right) - 1\right]$	$V(P'') = \frac{\beta^9\ \Gamma(\alpha+9)}{8\,\Gamma(\alpha)}\rho^3 A^3\ C_p^2 - \left(\frac{\beta^6\ \Gamma(\alpha+6)}{4\,\Gamma(\alpha)}\rho^2 A^2\ C_p^2\right)^2$

4.2 Distribución de probabilidad para P'''

La potencia generada P''' será también una variable aleatoria, de naturaleza mixta, ya que posee dos valores discretos con probabilidad de ocurrencia no nula ($P'''=0$ y $P'''=P_{Nominal}$), mientras que en el intervalo $P_{cut\ in} < P'' \leq P_{Nominal}$ la potencia generada tendrá comportamiento continuo.

$$P''' = \begin{cases} 0 & P'' \leq P_{cut\ in} \\ P'' & P_{cut\ in} < P'' \leq P_{Nominal} \\ P_{Nominal} & P_{Nominal} < P'' \leq P_{cut\ out} \\ 0 & P'' > P_{cut\ out} \end{cases} \qquad \text{Con} \qquad \begin{aligned} P_{cut\ in} &= C_{Pmax}\frac{1}{2}\rho A V_{cut\ in}^{3} \\ P_{cut\ out} &= C_{Pmax}\frac{1}{2}\rho A V_{cut\ out}^{3} \end{aligned}$$

Para esta distribución de probabilidad interesa conocer el valor de su esperanza y varianza que son utilizados para estimar la media y varianza de la producción anual de potencia por parte del aerogenerador.

En el apéndice III se demuestra que la esperanza y varianza de esta variable aleatoria, pueden estimarse a través de las siguientes expresiones:

$$E(P''') = H(P_{Cutout}) - H(P_{Cutin}) + P_{Nominal}\left[F(P_{Cutout}) - F(P_{Nominal})\right]$$

$$\begin{aligned} V(P''') = {} & H_2(P_{Cutout}) - H_2(P_{Cutin}) + P_{Nominal}^{2}\left[F(P_{Cutout}) - F(P_{Cutin})\right] \\ & -\left[H(P_{Cutout}) - H(P_{Cutin}) + P_{Nominal}\left[F(P_{Cutout}) - F(P_{Nominal})\right]\right]^{2} \end{aligned}$$

Donde $F(\bullet)$ representa la función de distribución izquierda de la variable P'' y $H(\bullet)$ y $H_2(\bullet)$ las esperanzas matemáticas parciales izquierdas de primer y segundo orden respectivamente para P''. En el apéndice IV se define este concepto y se demuestran las expresiones para las tres distribuciones analizadas, las cuales se resumen en la siguiente tabla.

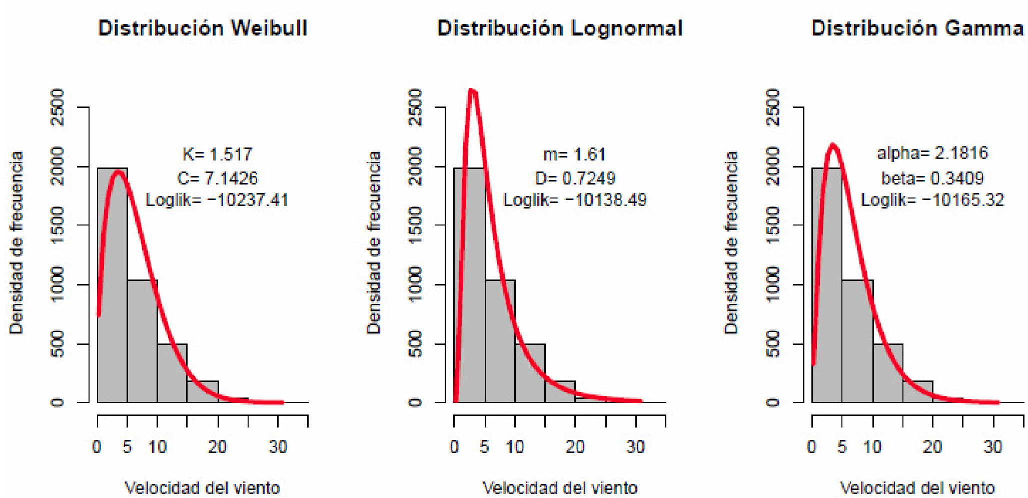
Distribución probabilidad del viento	ESPERANZAS MATEMÁTICAS PARCIALES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN PARA P''
Weibull	$H(x) = C\,\Gamma\left(1+\frac{1}{K}\right) F_{Gamma}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\mathrm{K}} \middle\vert \alpha = 1+\frac{1}{\mathrm{K}};\beta = 1\right]$ $H_2(x) = C^2\,\Gamma\left(1+\frac{2}{K}\right) F_{Gamma}\left[\left(\frac{x}{C}\right)^{\mathrm{K}} \middle\vert \alpha = 1+\frac{2}{\mathrm{K}};\beta = 1\right]$
LogNormal	$H(x) = Exp\left(m+\frac{D^2}{2}\right)\ \Phi\left(\frac{Ln(x)-m}{D}-D\right)$ $H_2(x) = Exp\left(2m+2D^2\right)\ \Phi\left(\frac{Ln\,x-m}{D}-2D\right)$
Gamma	$H(x) = \frac{\beta^2\rho A}{2} F_{Gamma}\left[\left(\frac{2x}{\rho A}\right)^{1/3} \middle\vert \alpha+3;\beta\right]$ $H_2(x) = \frac{\beta^6(\rho A)^2}{4} F_{Gamma}\left[\left(\frac{2x}{\rho A}\right)^{1/3} \middle\vert \alpha+6;\beta\right]$

5. Aplicación al análisis de vientos en la localidad de Cutral-Có

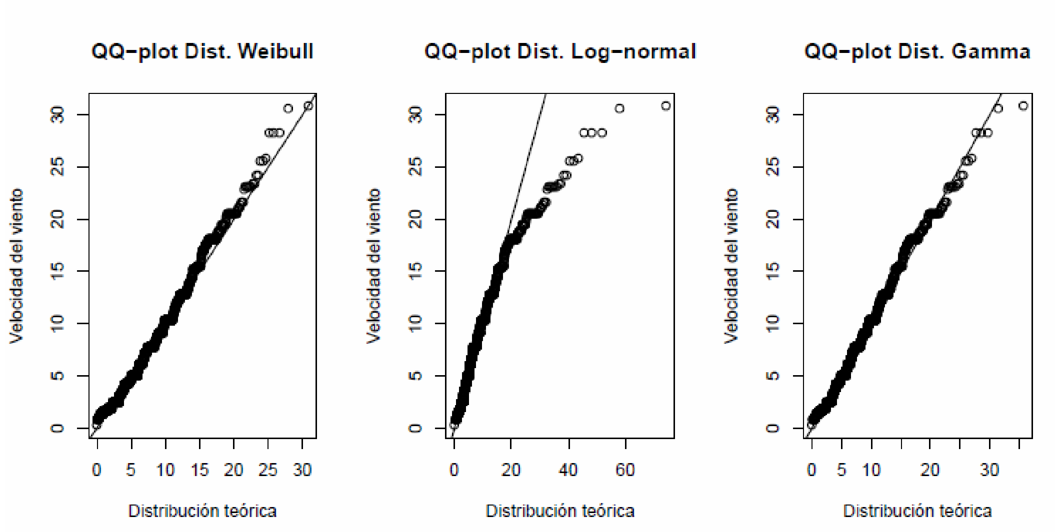
A modo de ejemplo se presenta a continucaión el análisis de la distribución de probabilidad del viento y de las distintas potencias para datos de velocidad del viento conseguidos en la localidad de Cutral-Có[2], provincia de Neuquén.

Debe tenerse presente que los datos relevados requieren rigurosos procedemientos de validación y limpieza, previos a los análisis que se presentan en este estudio. Omitimos el detalle de los mismos a los efectos de concentrarnos los análisis correspondientes al presente trabajo.

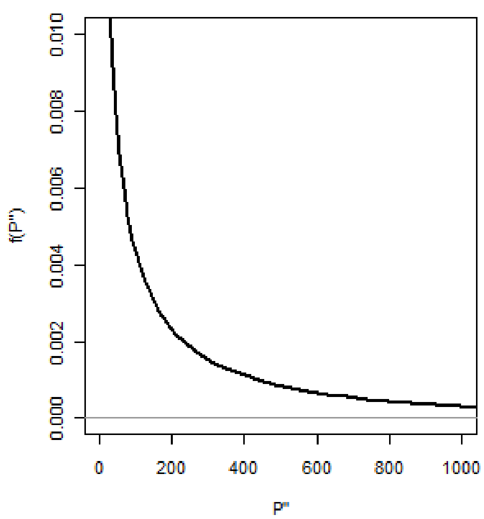
Se presentan a continución los ajustes de los datos a los tres modelos analizados (Weibull, LogNormal y Gamma). De los tres, el que mejor ajusta para este caso es la distribución de probabilidad de Weibull.



[2] Se agradece a la Universidad Tecnológica Nacional FRN, al señor decano Ing. Pablo Livskovsky, a la secretaría académica Patricia González, al municipio y al personal del aeropuerto de Cutral-Có en facilitar los datos de velocidad del viento y sus características para realizar el presente trabajo.



El viento, podrá considerarse entonces con una distribución Weibull con parámetro de escala C=7,14 y parámetro de forma K=1,52. La velocidad media del viento es de 6,4 metros por segundo, mientras que el desvío estándar es de 4,6 metros por segundo.



Para la potencia aprovechable del viento P'', tendrá también distribución de Weibull, pero de parámetros

$$E(P'') = \frac{AC^3\rho}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{K}\right)$$

$$V(P'') = \frac{A\rho C^3}{2}\left[\Gamma\left(1+\frac{6}{K}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{3}{K}\right)\right]$$

Que evaluados para área de A=1 m^2 y considerando la densidad del aire como ρ=1,225 Kg/m^3 resulta una potencia media de 482 Watts con un desvío estándar de 1182 Watts.

APENDICES

APENDICE I: Determinación de la densidad de probabilidad para la potencia contenida en el viento P'

Para hallar la función de densidad de probabilidad de la potencia del viento realizaremos un cambio de variable teniendo en cuenta que la potencia se puede expresar como

$$P' = \frac{1}{2}\rho A v^3$$

Donde ρ es la densidad del aire y A es el área medida en un plano perpendicular a la dirección de la velocidad del viento. $P' = h(v)$, donde h es monótona y donde v tiene función de densidad de probabilidad $f(v)$ por lo tanto

$$f\left(P'\right) = \left|\frac{1}{h'\left(h^{-1}(v)\right)}\right| f_v\left(h^{-1}\left(P'\right)\right)$$

Donde h^{-1} denota la inversa y h' la derivada de la función.

I.1 Caso en que la velocidad del viento tiene distribución de Weibull

Considerando que la velocidad del viento en una cierta región presenta distribución Weibull con función de densidad de probabilidad

$$f(v) = \frac{K}{C}\left(\frac{v}{C}\right)^{k-1} \operatorname{Exp}\left[-\left(\frac{v}{C}\right)^{k}\right] \qquad v \geq 0$$

Donde C es parámetro de escala y K es parámetro de forma. La función de densidad de probabilidad de P' estará dada entonces por

$$f\left(P'\right) = \left|\frac{1}{h'\left(h^{-1}(v)\right)}\right| f_v\left(h^{-1}\left(P'\right)\right) = \left|\frac{1}{\frac{3}{2}A\rho\left(\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)^2}\right| \frac{K}{C}\left(\frac{1}{C}\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)^{K-1} \operatorname{Exp}\left(-\frac{1}{C}\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)^{K}$$

Operando algebraicamente llegamos a

$$f\left(P'\right)=\frac{2K}{3\,C^{3}\rho A}\left[\frac{2P'}{\rho AC^{3}}\right]^{1/3K-1}\text{Exp}\left[-\frac{2P'}{\rho AC^{3}}\right]^{1/3K}\qquad P'\geq 0$$

De manera que la función de densidad de la potencia posee distribución Weibull con parámetro de escala $C'=\frac{1}{2}\rho AC^{3}$ y $K'=\frac{1}{3}K$ parámetro de forma.

Así, la esperanza y la varianza de P' serán

$$E\left(P'\right)=C'\,\Gamma\left(1+\frac{1}{K'}\right)\qquad V\left(P'\right)=C'^{2}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{K'}\right)-\Gamma^{2}\left(1+\frac{1}{K'}\right)\right]$$

I.2 Caso en que la velocidad del viento tiene distribución LogNormal

Considerando que la velocidad del viento en una cierta región presenta distribución LogNormal con función de densidad de probabilidad

$$f(v)=\frac{1}{vD\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(\ln v-m\right)^{2}}{2D^{2}}\right]\qquad v>0$$

Siendo los parámetros m y D la media y el desvío estándar del logaritmo de la variable.

$$f\left(P'\right)=\left|\frac{1}{h'\left(h^{-1}(v)\right)}\right|f_{v}\left(h^{-1}\left(P'\right)\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{C\beta}\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)D\sqrt{2\pi}}\ \text{Exp}\left[-\frac{\left[\ln\left(\frac{1}{C\beta}\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)-m\right]^{2}}{2D^{2}}\right]$$

Que podemos reducir a

$$f\left(P'\right)=\frac{A}{3DP'\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\ln P'+\ln\left(\rho A/2\right)-3m}{2}\right]\qquad P'>0$$

Así, la función de densidad de la potencia P' posee también distribución LogNormal con parámetros $m'=\ln\left(\rho A/2\right)+3m$ y $D'=3D$.

La esperanza y varianza de P' serán

$$E\left(P'\right)=\text{Exp}\left[m'+D'^{2}/2\right]\qquad V\left(P'\right)=\text{Exp}\left[2m'+D'^{2}\right].\left[\text{Exp}\left(D'^{2}\right)-1\right]$$

I-3 Caso en que la velocidad del viento tiene distribución Gamma

Considerando que la velocidad del viento en una cierta región presenta distribución Gamma con función de densidad de probabilidad

$$f(v) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\left(\frac{v}{\beta}\right)^{\alpha-1} \text{Exp}\left[-\frac{v}{\beta}\right] \qquad v \geq 0$$

Con parámetros α que es de forma y β que es parámetro de escala.

La densidad de probabilidad de la potencia contenida en el viento será:

$$f(P') = \left|\frac{1}{h'\left(h^{-1}(v)\right)}\right| f_v\left(h^{-1}(P')\right) = \left|\frac{1}{\frac{3}{2}A\rho\left(\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)^2}\right| \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{C\beta}\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right)^{\alpha-1} \text{Exp}\left[-\frac{1}{C\beta}\sqrt[3]{\frac{2P'}{\rho A}}\right]$$

Expresión que se puede reducir a

$$f(P') = \left(\frac{2}{\rho A}\right)^{\alpha/3} \frac{P'^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \text{ Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{1/3}\right] \qquad P' \geq 0$$

A diferencia de los casos de las distribuciones de Weibull y LogNormal, la función de densidad de la potencia contenida en el viento, no resulta en este caso ser Gamma.

Para obtener la esperanza de esta distribución

$$E(P') = \int_0^\infty P'\, f(P')\, dP' = \int_0^\infty P'\left(\frac{2}{\rho A}\right)^{\alpha/3} \frac{P'^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha-1}} \exp\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{1/3}\right] dP'$$

y sustituyendo $y = \frac{1}{\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{1/3}$; $dy = \frac{1}{3\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{-2/3} \frac{2}{\rho A} dP'$ resulta

$$E(P') = \frac{\beta^3 \rho A}{2\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+2}\, e^{-y}\, dy = \frac{\beta^3 \rho A}{2\,\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+3)$$

Para la varianza procedemos de manera similar:

$$
\begin{aligned}
V(P') &= E(P'^2) - E^2(P') \\
&= \int_0^\infty P'^2 \left(\frac{2}{\rho A}\right)^{\alpha/3} \frac{P'^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{1/3}\right] dP' - \left[E(p')\right]^2 \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{\alpha/3+1} \frac{P'^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P'}{\rho A}\right)^{1/3}\right] dP' - \left[E(p')\right]^2
\end{aligned}
$$

Realizando la misma sustitución que para el caso de la media, obtenemos finalmente

$$
\begin{aligned}
V(P') &= \frac{(\rho A)^2\,\beta^6}{4\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+5}\, e^{-y}\, dy - \left[E(p')\right]^2 \\
&= \frac{(\rho A)^2\,\beta^6}{4\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+6) - \left[\frac{\beta^3 \rho A}{2\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+3)\right]^2
\end{aligned}
$$

APENDICE II: Determinación de la densidad de probabilidad para la potencia aprovechable en el viento P''

Definimos la potencia aprovechable por el molino como

$$P'' = C_p\, P' = C_p \frac{1}{2} \rho A v^3$$

Para determinar la función de densidad de probabilidad de P'' es conveniente observar que su expresión es prácticamente equivalente a P', salvo por el hecho de contar con un factor adicional C_p. Como tanto $\frac{1}{2}\rho A$ como $C_p \frac{1}{2}\rho A$ son constantes, podemos por analogía, hallar las densidades de probabilidad y momentos de la P'' reemplazando $C_p \frac{1}{2}\rho A$ por $\frac{1}{2}\rho A$ en las expresiones obtenidas en el apéndice I.

II.1 Caso en que la velocidad del viento tiene distribución de Weibull

Considerando que la velocidad del viento en una cierta región presenta distribución Weibull será

$$f\left(P''\right) = \frac{2K}{3C^3 \rho\, C_p A} \left[\frac{2P''}{\rho\, C_p A C^3} \right]^{K/3-1} \mathrm{Exp}\left[-\left(\frac{2P''}{\rho\, C_p A C^3} \right) \right]^{K/3} \qquad P'' \geq 0$$

Es decir que la función de densidad de la potencia posee distribución Weibull con parámetro de escala $C'' = \frac{1}{2}\rho\, C_p A C^3$ y $K'' = \frac{1}{3}K$ parámetro de forma.

La esperanza y varianza serán

$$E\left(P''\right) = C''\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{K''}\right) \qquad V\left(P''\right) = C''^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{K''}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{K''}\right) \right]$$

II-2 Caso en que la velocidad del viento tiene distribución LogNormal

Si la velocidad del viento en una cierta región presenta distribución LogNormal será

$$f\left(P''\right)=\frac{AC_p}{3\,D\,P''\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{\ln P''+\ln\left(C_p\rho A/2\right)-3m}{2}\right]\qquad P''>0$$

De manera que la función de densidad de la potencia posee distribución LogNormal con parámetros $m''=\ln\left(C_p\rho A/2\right)+3\,m$ y $D''=3D$.

La esperanza y la varianza de la P'' serán

$$E\left(P''\right)=\mathrm{Exp}\left[m''+D''^2/2\right]\qquad V\left(P''\right)=\mathrm{Exp}\left[2m''+D''^2\right].\left[\exp\left(D''^2\right)-1\right]$$

II-3 Caso en que la velocidad del viento tiene distribución Gamma

En el caso que la velocidad del viento en una cierta región presenta distribución Gamma será

$$f\left(P''\right)=\left(\frac{2}{C_p\;\rho A}\right)^{\alpha/3}\frac{P''^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P''}{C_p\;\rho A}\right)^{1/3}\right]\qquad P''\geq 0$$

La esperanza y la varianza de la P'' serán

$$E\left(P''\right)=\frac{\beta^3\rho\,C_pA}{2\,\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha+3\right)\qquad V\left(P''\right)=\frac{\left(\rho\,C_pA\right)^2\beta^6}{4\,\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha+6\right)-\left[\frac{\beta^3\rho\,C_pA}{2\,\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha+3\right)\right]^2$$

APENDICE III: Determinación de la esperanza matemática y varianza de la potencia generada P'''

III-1 Esperanza matemática de P'''

Definimos a continuación la función P''' como

$$P''' = \begin{cases} 0 & P'' \le P_{cut\ in} \\ P'' & P_{cut\ in} < P'' \le P_{Nominal} \\ P_{Nominal} & P_{Nominal} < P'' \le P_{cut\ out} \\ 0 & P'' > P_{cut\ out} \end{cases} \qquad \text{Con} \qquad \begin{array}{l} P_{cut\ in} = C_{Pmax}\,\dfrac{1}{2}\rho A V_{cut\ in}^{3} \\ P_{cut\ out} = C_{Pmax}\,\dfrac{1}{2}\rho A V_{cut\ out}^{3} \end{array}$$

Siendo $P_{Nominal}$ una constante que representa la potencia nominal de aerogenerador, $P_{cut\ in}$ y $P_{cut\ out}$ la potencia aprovechable del viento a la velocidades de *cut-in* y *cut-out* respectivamente.

La esperanza matemática de P''' estará dada por

$$E\left(P'''\right) = \int_{P_{Cutin}}^{P_{Nominal}} P''\, f\left(P''\right) dP'' + \int_{P_{Nominal}}^{P_{Cutout}} P_{Nominal}\, f\left(P''\right) dP''$$

Si definimos como esperanza matemática parcial izquierda $H(x)$ y derecha $J(x)$ de la siguiente manera,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} x f(x) dx \qquad\qquad J(x) = \int_{x}^{\infty} x f(x) dx$$

podemos reescribir $E\left(P'''\right)$ como

$$E\left(P'''\right) = H\left(P_{Cutout}\right) - H\left(P_{Cutin}\right) + P_{Nominal}\left[F\left(P_{Cutout}\right) - F\left(P_{Max}\right)\right]$$

Donde $F(\bullet)$ es la función de distribución de la variable P'' y $H(\bullet)$ la esperanza matemática parcial izquierda. Tanto $F(\bullet)$ como $H(\bullet)$ son función son una característica del modelo de probabilidad utilizado para P'''. En el apéndice IV se demuestran las expresiones de $H(\bullet)$ para los tres casos analizados.

III-2 Varianza de P'''

Para calcular la varianza de P''' utilizaremos $V\left(P'''\right) = E\left(P'''^{2}\right) - E^{2}\left(P'''\right)$

La función P'''^2 estará dada por

$$P'''^2 = \begin{cases} 0 & P'' \le P_{cut\ in} \\ P''^2 & P_{cut\ in} < P'' \le P_{Nominal} \\ P_{Nominal}^2 & P_{Nominal} < P'' \le P_{cut\ out} \\ 0 & P'' > P_{cut\ out} \end{cases} \qquad \text{Con} \qquad \begin{aligned} P_{cut\ in} &= C_{Pmax}\frac{1}{2}\rho A V_{cut\ in}^3 \\ P_{cut\ out} &= C_{Pmax}\frac{1}{2}\rho A V_{cut\ out}^3 \end{aligned}$$

Y su esperanza matemática será

$$E\left(P'''^2\right) = \int_{P_{Cutin}}^{P_{Nominal}} P''^2 \ f\left(P''\right) dP'' + \int_{P_{Nominal}}^{P_{Cutout}} P''^2_{Nominal} \ \ f\left(P''\right) dP''$$

De la misma manera que para el caso anterior, definimos ahora como esperanza matemática parcial de segundo orden izquierda $H_2(x)$ y derecha $J_2(x)$ como

$$H_2(x) = \int_{-\infty}^{x} x^2 f(x) dx \qquad\qquad J_2(x) = \int_{x}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Y podemos escribir $E\left(P'''^2\right)$ como

$$E\left(P'''^2\right) = H_2\left(P_{Nominal}\right) - H_2\left(P_{Cutin}\right) + P_{Nominal}^2\left[F\left(P_{Cutout}\right) - F\left(P_{Cutin}\right)\right]$$

Es decir que

$$\begin{aligned} V\left(P'''\right) &= E\left(P'''^2\right) - E^2\left(P'''\right) \\ &= H_2\left(P_{Cutout}\right) - H_2\left(P_{Cutin}\right) + P_{Nominal}^2\left[F\left(P_{Cutout}\right) - F\left(P_{Cutin}\right)\right] \\ &\quad -\left[H\left(P_{Cutout}\right) - H\left(P_{Cutin}\right) + P_{Nominal}\left[F\left(P_{Cutout}\right) - F\left(P_{Nominal}\right)\right]\right]^2 \end{aligned}$$

En el apéndice IV se demuestran las expresiones de $H_2(\bullet)$ para los tres casos analizados.

APENDICE IV: Determinación de las esperanzas matemáticas parciales

IV.1 Esperanza matemáticas parciales para la distribución de Weibull

Cálculo de H(x)

Dado que $$f(x) = \frac{\mathrm{K}\, x^{\mathrm{K}-1}}{C^{\mathrm{K}}} Exp\left[-\left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} \right]$$

es $$H(x) = \frac{\mathrm{K}}{C^{\mathrm{K}}} \int_0^x x\, x^{\mathrm{K}-1} Exp\left[-\left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} \right] dx = \mathrm{K} \int_0^x \left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} Exp\left[-\left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} \right] dx$$

y si realizamos la sustitución $y = \left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}}$; $x = C\, y^{1/\mathrm{K}}$; $dx = \frac{C}{\mathrm{K}} y^{1/\mathrm{K}-1}\, dy$, resulta:

$$H(x) = C \int_0^y y^{1/\mathrm{K}} e^{-y} dy = C \times \Gamma\left(1+1/\mathrm{K}\right) \left[\frac{1}{\Gamma\left(1+1/\mathrm{K}\right)} \int_0^y y^{1/\mathrm{K}} e^{-y} dy \right]$$

pero la expresión entre corchetes es la $F_\gamma\left(y \middle| \alpha = 1 + \frac{1}{\omega},\ \beta = 1 \right)$. Resultando entonces

$$H(x) = C\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\mathrm{K}}\right) F_\gamma\left[\left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} \middle| \alpha = 1 + \frac{1}{\mathrm{K}} ; \beta = 1 \right]$$

Cálculo de $H_2(x)$

$$H_2(x) = \frac{\mathrm{K}}{C^{\mathrm{K}}} \int_0^x x^2\ x^{\mathrm{K}-1} Exp\left[-\left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} \right] dx = \frac{\mathrm{K}}{C^{\mathrm{K}}} \int_0^x \left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}+1} Exp\left[-\left(\frac{x}{C} \right)^{\mathrm{K}} \right] dx$$

Realizando la misma sustitución utilizada en $H_W(x)$

$$H_2(x) = C^2 \int_0^y y^{2/\mathrm{K}} e^{-y} dy = C^2 \times \Gamma\left(1+2/\mathrm{K}\right) \left[\frac{1}{\Gamma\left(1+2/\mathrm{K}\right)} \int_0^y y^{2/\mathrm{K}} e^{-y} dy \right]$$

Como $C^2 \text{ x } \Gamma(1+2/\mathrm{K}) = E\left(x^2\right)$ y la expresión entre corchetes es $F_\gamma\left[\, y \middle| \alpha = 1+\frac{2}{\mathrm{K}}\,;\, \beta = 1 \right]$

Resulta

$$H(x) = \left(\mu^2 + \sigma^2\right)\; F_\gamma\left[\left(\frac{x}{C}\right)^{\mathrm{K}} \middle| \alpha = 1+\frac{2}{\mathrm{K}}\,;\, \beta = 1 \right]$$

IV-2 Esperanza matemáticas parciales para la distribución Lognormal

Cálculo de H(x)

Dado que $$f(x) = \frac{1}{x\,D\,\sqrt{2\pi}}\, Exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\; x - m}{D}\right)^2 \right]$$

es $$H(x) = \int_0^x x\; f(x) dx = \frac{1}{D\,\sqrt{2\pi}} \int_0^x Exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\; x - m}{D}\right)^2 \right] dx$$

Sustituyendo $z = \dfrac{Ln\; x - m}{D}$ entonces $x = Exp(m + D\; z)$; $dx = D\; Exp(m + \; D\; z)\; dz$

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} Exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) Exp(m + D z) dz = \frac{Exp(m)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} Exp\left(D\,z - \frac{z^2}{2} \right) dz$$

que operando algebraicamente podemos reducir a

$$H(x) = \frac{Exp(m + D^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} Exp\left[-\frac{1}{2}(z-D)^2 \right] dz = \mu\; \Phi(z-D)$$

o sea, finalmente, la expresión

$$H(x) = \mu\,\Phi\left(\frac{Ln\, x - m}{D} - D \right) \qquad \mu = Exp\left(m + \frac{D^2}{2} \right)$$

Cálculo de H₂(x)

$$H_2(x) = \int_0^x x^2 f(x) dx = \frac{1}{D\,\sqrt{2\pi}} \int_0^x x\; Exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\; x - m}{D}\right)^2 \right] dx$$

Realizando la misma sustitución que en el caso de $H(x)$, llegamos a

$$H_2(x) = \frac{e^{2m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} Exp\left(2D\,z - \frac{z^2}{2}\right) dz \qquad z = \frac{Ln\ x - m}{D}$$

Que puede reducirse a

$$H_2(x) = \frac{Exp(2m + 2D^2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} Exp\left[-\frac{1}{2}(z - 2D)^2\right] dz$$

Sustituyendo finalmente $t = \mathrm{z} - 2D$

$$H_2(x) = \frac{Exp(2m + 2D^2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} Exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = Exp\left(2m + 2D^2\right) \Phi(t)$$

Es decir:

$$H_2(x) = Exp\left(2m + 2D^2\right)\ \Phi\left(\frac{Ln\,x - m}{D} - 2D\right)$$

IV-3 Esperanza matemáticas parciales para P'' cuando la distribución de la velocidad del viento es Gamma

Cálculo de H(x)

$$H(x) = \int_0^x P''\left(\frac{2}{C_p\ \rho A}\right)^{\alpha/3} \frac{P''^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P''}{C_p\ \rho A}\right)^{1/3}\right] dP''$$

$$= \int_0^x \left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{\frac{1}{3}\alpha} \frac{1}{3\Gamma(\alpha)\,\beta} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{1/3}\right] dP''$$

Realizando la siguiente sustitución

$$y = \left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{1/3} \qquad dy = \frac{1}{3}\left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{1/3} \frac{2}{\rho A} dx \qquad \frac{3\rho A}{2} dy = \left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{1/3} dx$$

resulta

$$H(x)=\frac{\beta^2\rho A}{2}\int_0^x\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+2}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta}\exp\left[-\frac{y}{\beta}\right]dx=\frac{\beta^2\rho A}{2}F_{Gamma}\left(y\middle|\alpha+3;\beta\right)$$

Finalmente

$$H(x)=\frac{\beta^2\rho A}{2}F_{Gamma}\left[\left(\frac{2x}{\rho A}\right)^{1/3}\middle|\alpha+3;\beta\right]$$

Cálculo de $\mathbf{H_2(x)}$

$$H_2(x)=\int_0^x P''^2\left(\frac{2}{C_p\ \rho A}\right)^{\alpha/3}\frac{P''^{\alpha/3-1}}{3\,\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P''}{C_p\ \rho A}\right)^{1/3}\right]\,dP''$$

$$=\int_0^x\left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{\frac{1}{3}\alpha}\frac{P''}{3\Gamma(\alpha)\beta}\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{2P''}{\rho A}\right)^{1/3}\right]dP''$$

Realizando la misma sustitución que para $H(x)$

$$H_2(x)=\frac{\beta^6(\rho A)^2}{4}\int_0^x\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+5}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta}\ \mathrm{Exp}\left[-\frac{y}{\beta}\right]dy=\frac{\beta^6(\rho A)^2}{4}F_{Gamma}\left(y\middle|\alpha+6;\beta\right)$$

Finalmente

$$H_2(x)=\frac{\beta^6(\rho A)^2}{4}F_{Gamma}\left[\left(\frac{2x}{\rho A}\right)^{1/3}\middle|\alpha+6;\beta\right]$$