Cónicas - Resumen

1. Superficie cónica circular recta y cónicas

Supongamos una línea recta vertical, t, cortada por otra recta, g, que la corta en un punto Q. Ambas rectas forman un ángulo α. Consideremos que Q está fijo, y que g rota alrededor de Q. Queda definida una superficie de revolución conocida como cono circular recto de vértice Q, eje t y generatriz g. El ángulo α es la abertura de la superficie cónica. A partir de aquí lo llamaremos cono de dos hojas. Esquematizamos la situación en la Figura 1.

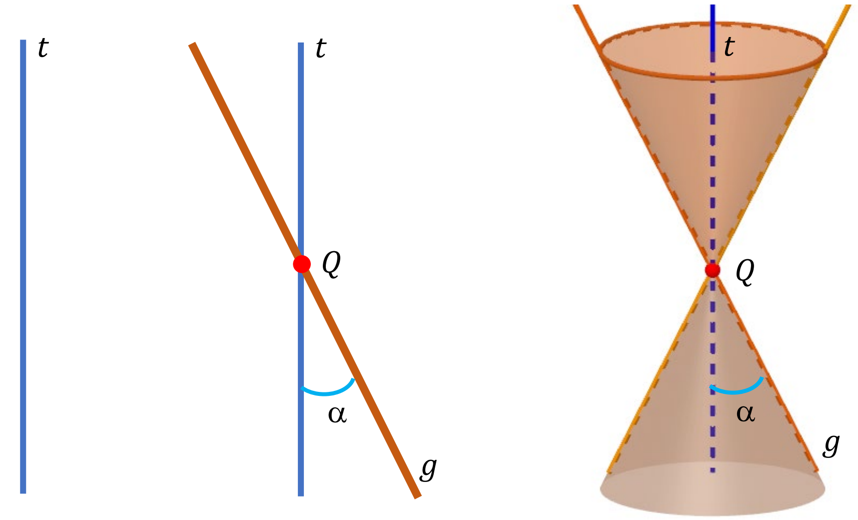


Figura 1 – Generación de la superficie cónica circular recta

Toda sección cónica, o simplemente cónica, puede describirse como la **intersección de un plano y el cono de dos hojas**. Cuando el plano no pasa por el vértice Q, se observan las cuatro formas básicas de las cónicas; si el plano pasa por el vértice, la cónica resulta degenerada – ver Figura 2.

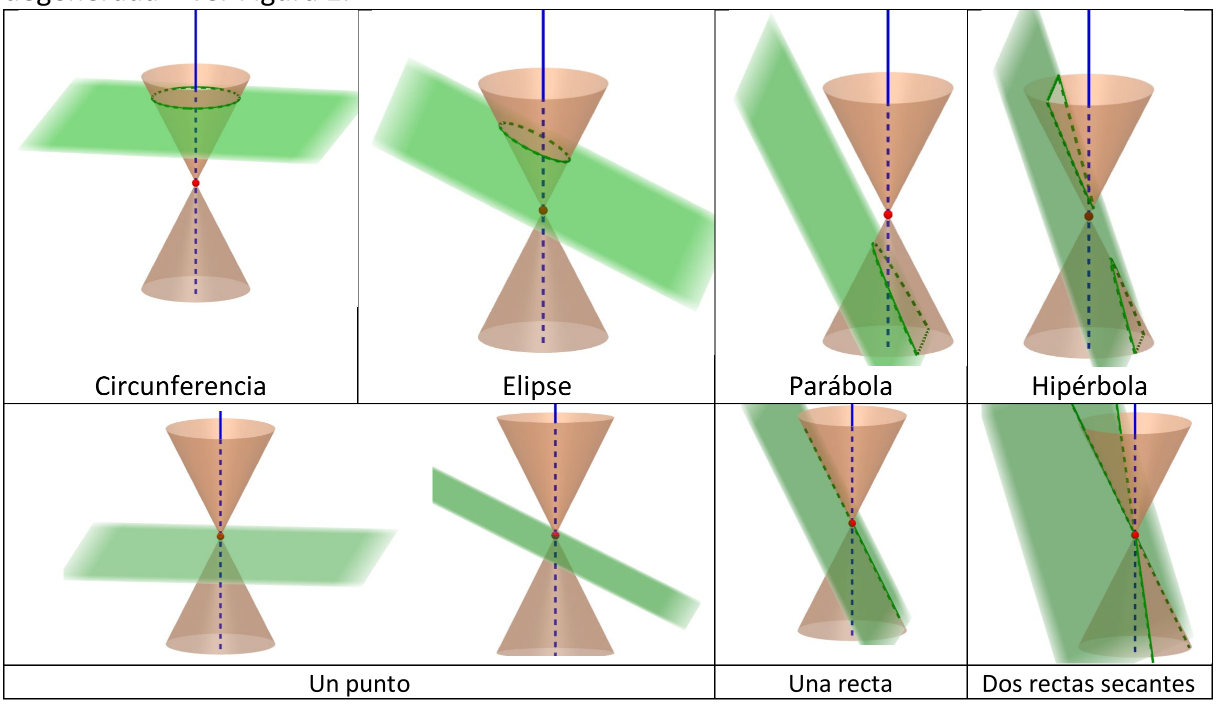
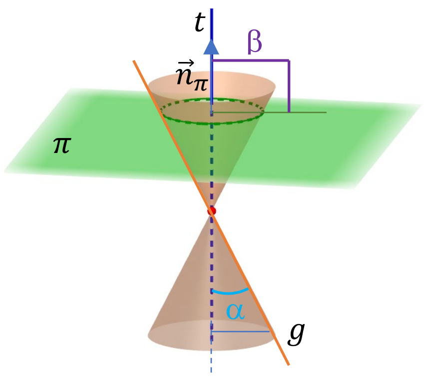


Figura 2 – Secciones cónicas básicas y cónicas degeneradas

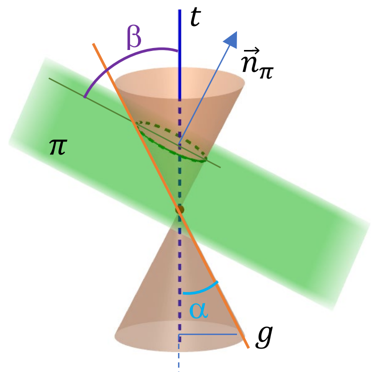
2. Identificación de una cónica por su excentricidad

El ángulo β que forma el plano π con la dirección del eje del cono y su comparación con la abertura de la superficie cónica α permite definir un parámetro llamado excentricidad *e* que identifica el tipo de cónica.

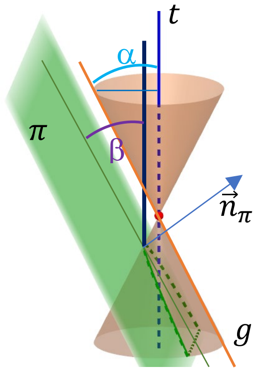
$$e = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$



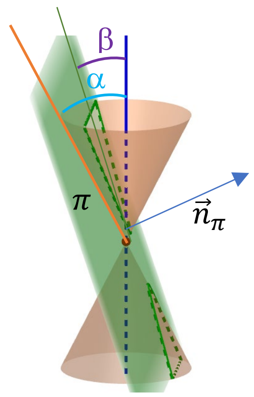
Si $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e = 0 \Rightarrow$ Circunferencia



Si $\beta > \alpha \Rightarrow e < 1 \Rightarrow$ Elipse



Si $\beta = \alpha \Rightarrow e = 1 \Rightarrow$ Parábola

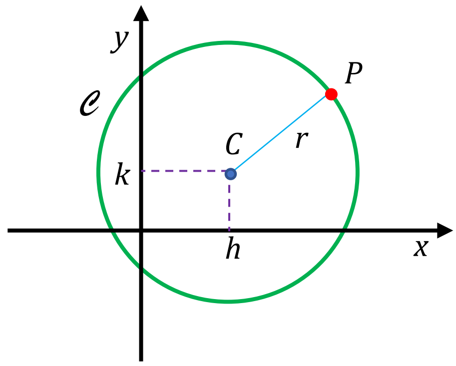


Si $\beta < \alpha \Rightarrow e > 1 \Rightarrow$ Hipérbola

3. Definición como lugar geométrico

También se pueden definir las cónicas como el **lugar geométrico** de todos los puntos del plano que satisfacen ciertas condiciones.

Circunferencia.
El conjunto de todos los punto (x, y) cuya distancia a un punto fijo C llamado centro es una constante llamada radio.

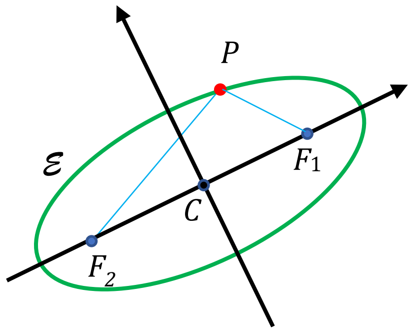


Centro: $C(h, k)$. Radio: r>0.

$$\mathscr{C} = \{P(x, y) \in \mathbf{R}^2 / d(P; C) = r\}$$

Ecuación vectorial paramétrica: $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$
Ecuación cartesiana: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

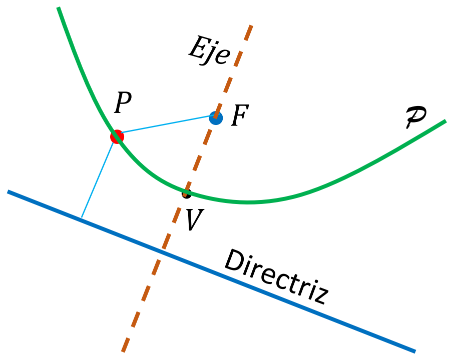
Elipse.
El conjunto de todos los puntos (x, y) cuya suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos es una constante.



$$\mathscr{E} = \{P(x, y) \in \mathbf{R}^2 / d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a\}$$

F_1 y F_2: focos de la elipse. Distancia focal: $d(F_1; F_2) = 2c$.
Centro de la elipse: C, punto medio entre los focos.
Condición: $0 < c < a$.

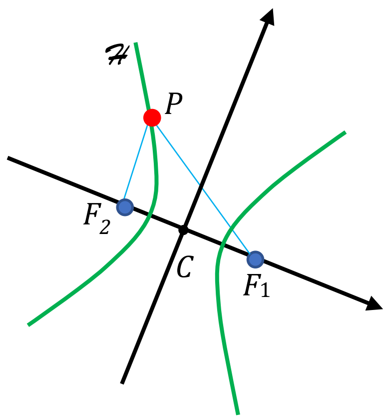
Parábola
El conjunto de todos los puntos (x, y) equidistante de una recta fija r llamada directriz y de un punto fijo F , fuera de esa recta, llamado foco.



$$\mathscr{P} = \{P(x, y) \in \mathbf{R}^2 / d(P; F) = d(P; r)\}$$

F: foco de la parábola. Directriz: r. Condición: $F \notin r$.
Eje de la parábola: Eje ($\perp r \wedge F \in Eje$). Vértice: $V \equiv \mathscr{P} \cap Eje$.
Parámetro: $p \neq 0$; $2p$ distancia orientada de r a F.

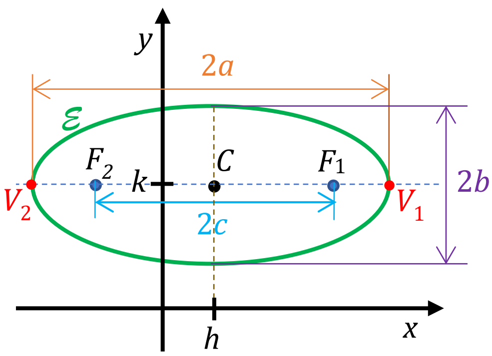
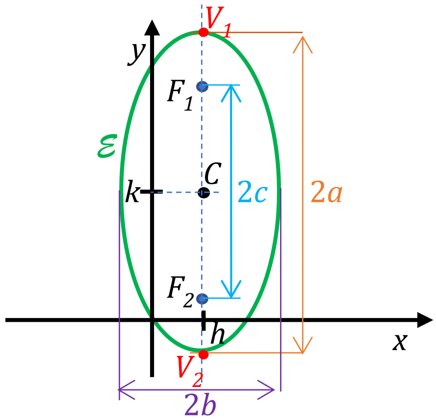
Hipérbola.
El conjunto de todos los puntos (x, y) tales que el valor absoluto de la diferencia a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, es una constante.



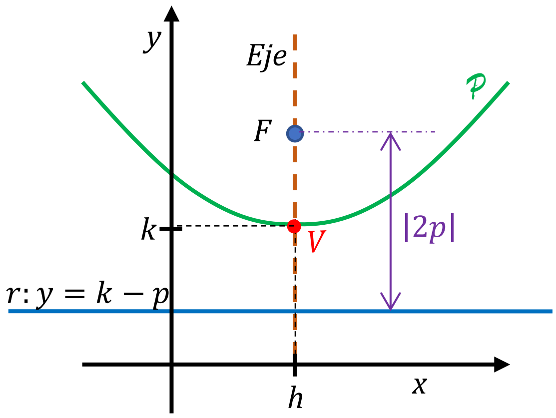
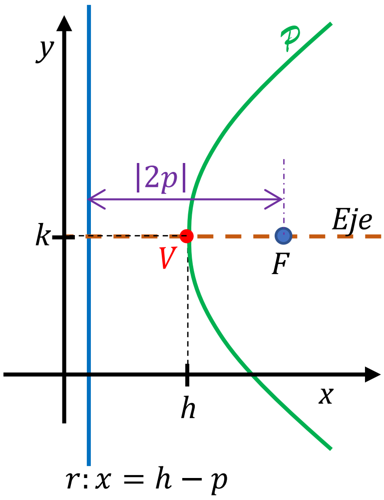
$$\mathscr{H} = \{P(x, y) \in \mathbf{R}^2 / |d(P; F_1) - d(P; F_2)| = 2a\}$$

F_1 y F_2: focos de la hipérbola. Distancia focal: $d(F_1; F_2) = 2c$.
Centro de la elipse: C, punto medio entre los focos.
Condición: $0 < a < c$.

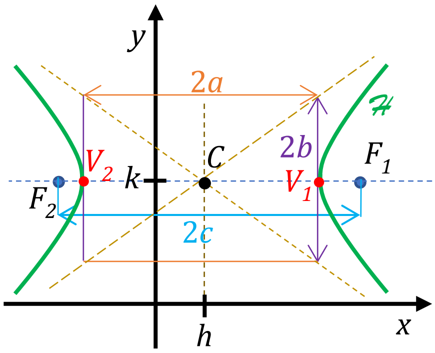
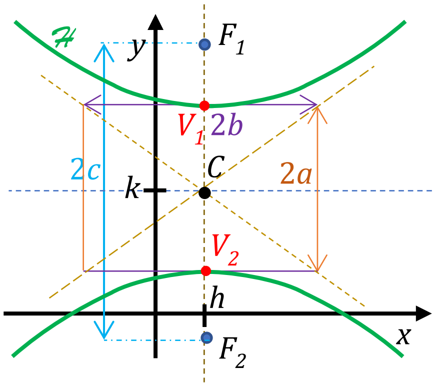
4. Ecuación cartesiana y elementos de la Elipse – Resumen

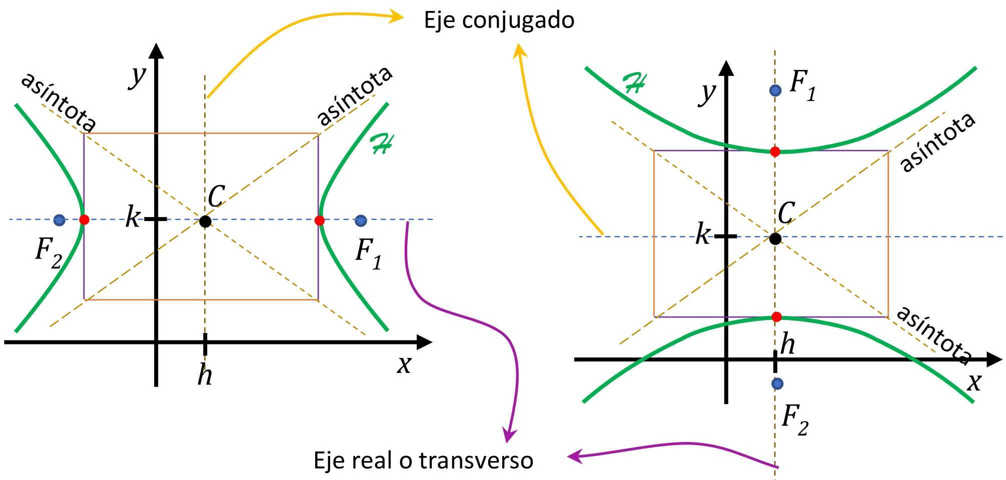
Ecuación	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
Eje focal	$y=k$ (paralelo al eje x)	$x=h$ (paralelo al eje y)
Centro	$C(h,k)$	$C(h,k)$
Focos	$F_1(h+c,k)$; $F_2(h-c,k)$	$F_1(h,k+c)$; $F_2(h,k-c)$
Representación gráfica		
Semieje mayor	$a>0$	
Semieje menor	$b>0$	
Semidistancia focal	$c>0$	
Vértices	$V_1(h+a,k)$; $V_2(h-a,k)$	$V_1(h,k+a)$; $V_2(h,k-a)$
Relaciones	$b^2=a^2-c^2; a>c$	
Excentricidad	$e=\dfrac{c}{a}; e<1$	

5. Ecuación cartesiana y elementos de la Parábola – Resumen

Ecuación	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Eje de simetría	$x = h$ (paralelo al eje y)	$y = k$ (paralelo al eje x)
Vértice	$V(h, k)$	$V(h, k)$
Foco	$F(h, k+p)$	$F(h+p, k)$
Representación gráfica		
Directriz	$r: y = k - p$	$r: x = h - p$
Observación	$p \in \mathbf{R}, p \neq 0$	
Excentricidad	$e = 1$	

6. Ecuación cartesiana y elementos de la Hipérbola – Resumen

Ecuación	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Eje focal	$y=k$ (paralelo al eje x)	$x=h$ (paralelo al eje y)
Centro	$C(h,k)$	$C(h,k)$
Focos	$F_1(h+c,k);\ F_2(h-c,k)$	$F_1(h,k+c);\ F_2(h,k-c)$
Representación gráfica		
Semieje real o transverso	$a>0$	
Semieje conjugado	$b>0$	
Semidistancia focal	$c>0$	
Vértices	$V_1(h+a,k);\ V_2(h-a,k)$	$V_1(h,k+a);\ V_2(h,k-a)$
Relaciones	$b^2=c^2-a^2;a<c$	
Excentricidad	$e=\dfrac{c}{a};e>1$	
Asíntotas	$(y-k)=\dfrac{b}{a}(x-h);$ $(y-k)=-\dfrac{b}{a}(x-h)$	$(y-k)=\dfrac{a}{b}(x-h);$ $(y-k)=-\dfrac{a}{b}(x-h)$



7. Cónicas degeneradas

UN PUNTO

CIRCUNFERENCIA O ELIPSE	$\longrightarrow$	UN PUNTO Vértice del cono
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$(x-h)^2+(y-k)^2=0$ $\longrightarrow$	(h,k)
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=0$ $\longrightarrow$	
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=0$ $\longrightarrow$	

UNA RECTA

PARÁBOLA	$\longrightarrow$	RECTA Generatriz del cono
$(x-h)^2=4p(y-k)$	$(x-h)^2=0$ $\longrightarrow$	$x=h$
$(y-k)^2=4p(x-h)$	$(y-k)^2=0$ $\longrightarrow$	$y=k$

DOS RECTAS

HIPÉRBOLA	$\longrightarrow$	DOS RECTAS Generatriz del cono y su reflexión sobre el eje del cono
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=0$ $\longrightarrow$	$\dfrac{(x-h)}{a}-\dfrac{(y-k)}{b}=0$ $\dfrac{(x-h)}{a}+\dfrac{(y-k)}{b}=0$
$\dfrac{(y-k)^2}{b^2}-\dfrac{(x-h)^2}{a^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{b^2}-\dfrac{(x-h)^2}{a^2}=0$ $\longrightarrow$	$\dfrac{(y-k)}{b}-\dfrac{(x-h)}{a}=0$ $\dfrac{(y-k)}{b}+\dfrac{(x-h)}{a}=0$

8. Material recomendado

Videos recomendados

Conic Section 3D Animation
https://www.youtube.com/watch?v=HO2zAU3Eppo
Duración 5:27 – Subido el 22 de Septiembre de 2015

Universo Matemático. Círculo, Elipse, Parábola e Hipérbola
https://www.youtube.com/watch?v=EW3dGbnsHzc
Duración 14:23 – Subido el 23 de Abril de 2016

Sitio web de interacción con GeoGebra recomendado

Un vistazo sobre las cónicas
https://www.geogebra.org/m/rsuthsxa
Autor: Fabián Vitabar

Archivos GeoGebra disponible en el CVG

Intersección animada.ggb
Exploración Elipse Eje Focal Horizontal.ggb
Exploración Elipse Eje Focal Vertical.ggb
Exploración Parábola Eje de Simetría Horizontal.ggb
Exploración Parábola Eje de Simetría Vertical.ggb
Exploración Hipérbola Eje Real Horizontal.ggb
Exploración Hipérbola Eje Real Vertical.ggb

Bibliografía

En general el tema de cónicas está desarrollado en los libros usuales de Geometría Analítica o de Álgebra y Geometría Analítica mencionados en el programa de la asignatura.