

## **CAPITULO 2 : MODULACION OFDM**

### **2.1 Introducción**

#### **2.1.1 Definición**

La modulación por división ortogonal de frecuencia, en inglés Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM), también llamada modulación por multitono discreto, en inglés Discrete Multitone Modulation (DMT), es una modulación que consiste en enviar la información modulando en QAM o en PSK un conjunto de portadoras de diferente frecuencia.

Normalmente se realiza la modulación OFDM tras pasar la señal por un codificador de canal con el objetivo de corregir los errores producidos en la transmisión, entonces esta modulación se denomina COFDM, del inglés Coded OFDM.

Debido al problema técnico que supone la generación y la detección en tiempo continuo de los cientos, o incluso miles, de portadoras equiespaciadas que forman una modulación OFDM, los procesos de modulación y demodulación se realizan en tiempo discreto mediante la IDFT y la DFT respectivamente.

La modulación OFDM es muy robusta frente al multitrayecto, que es muy habitual en los canales de radiodifusión, frente al desvanecimiento debido a las condiciones meteorológicas y frente a las interferencias de RF.

Debido a las características de esta modulación, las distintas señales con distintos retardos y amplitudes que llegan al receptor contribuyen positivamente a la recepción, por lo que existe la posibilidad de crear redes de radiodifusión de frecuencia única sin que existan problemas de interferencia.

#### **2.1.2 Superación de los problemas asociados a la propagación multitrayecto: la modulación OFDM.**

Una de las características fundamentales de las comunicaciones radio en enlaces terrestres es el de la propagación multitrayecto. Este tipo de propagación consiste en que entre el transmisor y receptor existe más de un camino de propagación, ya que la señal radio que se propaga no es un rayo estrecho que va directamente de la antena transmisora a la receptora, sino un frente de onda amplio que se va difractando y reflejando a medida que encuentra obstáculos en su camino, como edificios altos o irregularidades del terreno. El estudio y modelado del fenómeno de la propagación multitrayecto se puede resumir diciendo que al receptor llegan varias réplicas de la misma señal, con diferentes retardos entre ellas. Las primeras, tres o cuatro (dependiendo del entorno), pueden contener valores significativos de energía, mientras que las restantes suelen llegar muy atenuadas y se pueden despreciar. Se plantean dos escenarios posibles en función del valor máximo

del retardo diferencial entre las réplicas significativas (requiriendo cada escenario un receptor diferente), los cuales tienen lugar cuando:

1. El retardo diferencial máximo no supera en dos o tres veces el periodo de símbolo de modulación, que es el caso que se plantea en GSM. Con una velocidad de modulación de 270,83 kbit/s y un periodo de símbolo de 3,7  $\mu$ s, el retardo entre los diferentes trayectos no suele ser superior a 10  $\mu$ s. Por cada símbolo transmitido, la señal temporal que se obtiene a la salida del demodulador del receptor es un pulso muy distorsionado, que interfiere de forma significativa a los pulsos adyacentes. Para devolver el pulso a su forma original en el receptor se requiere un ecualizador, tanto más complejo cuanto mayor sea el cociente entre el retardo diferencial máximo y la anchura de símbolo. En GSM el ecualizador es un filtro FIR de siete coeficientes que se suele implementar mediante un algoritmo de Viterbi.

2. El retardo diferencial es mucho mayor que el periodo de símbolo. En este caso, a la salida del demodulador lo que se obtiene no es un pulso, sino varios pulsos independientes, cada uno de ellos correspondiente a una réplica. Se puede considerar que la señal transmitida se ha “roto” en varias réplicas iguales, las cuales se encuentran bien separadas entre ellas. Este es el caso que se plantea en UMTS, donde el periodo de chip es 0,26  $\mu$ s, y los retardos diferenciales son de varios microsegundos. Para reconstruir la señal lo que se emplea es un receptor conocido como de tipo Rake, que alinea en el tiempo las diferentes réplicas y las suma en fase.

A medida que se aumenta el ancho de banda de transmisión el periodo de símbolo disminuye, y llega un momento en que la complejidad del receptor Rake se vuelve excesiva, siendo más ventajoso desde un punto de vista de implementación utilizar otro sistema de modulación, la multiplexación por división ortogonal en frecuencia, OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Este sistema de modulación consiste en enviar la información no sobre una única portadora, sino sobre un múltiplex de muchas portadoras “adecuadamente espaciadas” en frecuencia, repartiendo la información entre todas ellas, de forma que aunque la velocidad de modulación del conjunto sea muy elevada, la de cada portadora individual es pequeña, simplificando el problema de propagación multirayecto.

Lo que diferencia al OFDM de otros procedimientos de multiplexación en frecuencia es la ortogonalidad, pues el “espaciamiento adecuado” entre portadoras es un espaciamiento óptimo. Este espaciamiento consiste en que la separación espectral entre portadoras consecutivas es siempre la misma e igual al inverso del periodo de símbolo, de forma que la señal OFDM se puede expresar, en notación compleja, como:

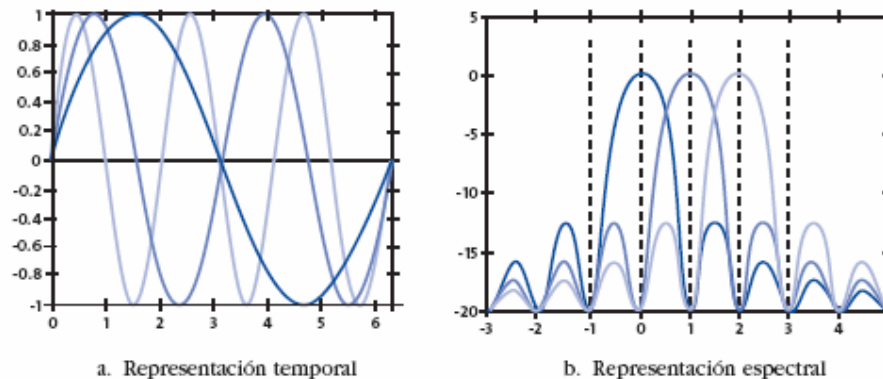
$$s(t) = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} d_i \exp \left[ j2\pi \left( f_c + \frac{i}{T} \right) t \right] \quad (2.1)$$

donde:

- $f_c$  es la frecuencia central.
- $T$  es el periodo de símbolo.
- $d_i$  es el símbolo que lleva la información
- $s(t)$  es la señal OFDM en el tiempo.

En la Figura 2.1 se muestra una representación de tres portadoras ortogonales. Viendo una señal OFDM en el tiempo se aprecia que en el periodo de la portadora más baja caben varios periodos de las otras portadoras, alineadas todas en fase, mientras que

en la representación espectral el máximo de cada portadora coincide con un nulo de las demás.



**Figura 2.1** : Señal OFDM

En principio, podría parecer que modular y demodular una señal OFDM requeriría tantas cadenas transmisoras y receptoras como portadoras tuviese el múltiplex. Si esto fuese así, el sistema sería inviable, pues un múltiplex de decenas o centenares de portadoras implicaría equipos terminales con decenas o centenares de cadenas transceptoras. Afortunadamente, sólo se requiere una cadena en cada sentido de transmisión, que modula o demodula todas las portadoras a la vez.

Si se examina la ecuación anterior, se comprueba que una señal OFDM es la transformada inversa de Fourier de los coeficientes  $d_i$ , y, en consecuencia, los coeficientes son la transformada directa de  $s(t)$ . Por consiguiente, la acción de modular y demodular todas las portadoras a la vez de una señal OFDM consiste básicamente en aplicar los algoritmos de la transformada rápida de Fourier, muy conocidos y fáciles de implementar en los procesadores digitales.

La ortogonalidad proporciona otra ventaja añadida: un mecanismo para eliminar, o reducir tanto como se quiera, el problema de la interferencia por propagación multitrayecto. Este mecanismo consiste en ampliar la duración correspondiente al periodo símbolo mediante un tiempo de guarda superior al máximo retardo diferencial entre los trayectos significativos. Durante la ampliación temporal se repite, o amplía, parte del propio símbolo, por lo cual se conoce a la ampliación como extensión cíclica. La justificación de por qué esta extensión elimina el problema de la propagación multitrayecto, la veremos en capítulos posteriores.

En lo que se refiere a la modulación de las portadoras, el símbolo  $d_i$  en un múltiplex OFDM en cada portadora se modula con una información diferente, aunque, por facilidad de implementación, el sistema de modulación suele ser el mismo para todas ellas, como QPSK o n2-QAM. Además, se suelen reservar algunas portadoras para transmitir información de sincronismo y equalización espectral, o bien para establecer canales de servicio.

## **2.2: Fundamentos del procesamiento de señal OFDM**

### **2.2.1 Introducción al procesamiento de señal OFDM**

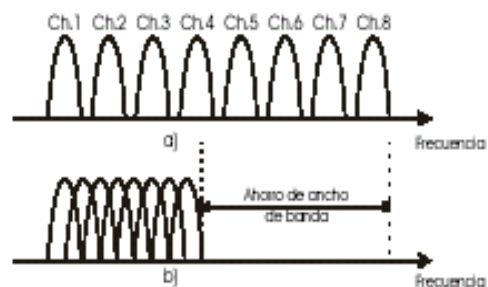
La tecnología a la que hacemos referencia mediante OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) puede ser vista como una colección de técnicas de transmisión. Cuando se aplican en un medio “no cableado”, como es el caso de la radiodifusión, son usualmente denominados OFDM. Sin embargo, en medios “cableados”, el término DMT (Discrete Multitone) es más usual.

La Multiplexación por División de Frecuencia Ortogonal surge para compensar las trabas que introducen los medios dispersivos procurando evitar el aumento de la complejidad del sistema en el aspecto hardware.

El origen de OFDM es en aplicaciones de uso militar que trabaja dividiendo el espectro disponible en múltiples subportadoras. La transmisión en la que no existe “visión directa” sucede cuando entre el receptor y el transmisor existen reflexiones o absorciones de la señal que implica una degradación de la señal recibida, que se manifiesta mediante efectos como pueden ser la atenuación plana, la atenuación selectiva en frecuencia o la interferencia intersimbólica. Estos efectos se mantienen bajo control con el W-OFDM que es una tecnología propietaria de Wi-LAN que recibió, en 1994, la patente para comunicaciones inalámbricas de dos vías y banda ancha OFDM (WOFDM). Esta patente es la base para los estándares 802.11a, 802.11g, 802.11a ...

Los sistemas W-OFDM incorporan además estimación de canal, prefijos cíclicos y códigos Reed-Solomon de corrección de errores.

En la Figura 2.2 podemos observar las notables diferencias existentes entre los espectros de una transmisión usando una técnica multiportadora convencional y el caso en el que se utiliza una modulación con portadoras convencionales:



**Figura 2.2:** Multiportadora convencional frente a portadoras ortogonales

OFDM es una tecnología de modulación digital, una forma especial de modulación multiportadora considerada la piedra angular de la próxima generación de productos y servicios de radio frecuencia de alta velocidad para uso tanto personal como corporativo. La técnica de espectro disperso de OFDM distribuye los datos en un gran número de portadoras espaciadas entre sí en distintas frecuencias precisas.

Ese espaciado evita que los demoduladores consideren frecuencias distintas a las suyas propias.

OFDM tiene una alta eficiencia de espectro, resistencia a la interfaz RF y menor distorsión multitrayecto. Actualmente OFDM no sólo se usa en las redes inalámbricas LAN 802.11a, sino en las 802.11g, en comunicaciones de alta velocidad por vía telefónica como las ADSL y en difusión de señales de televisión digital terrestre en Europa, Japón y Australia.

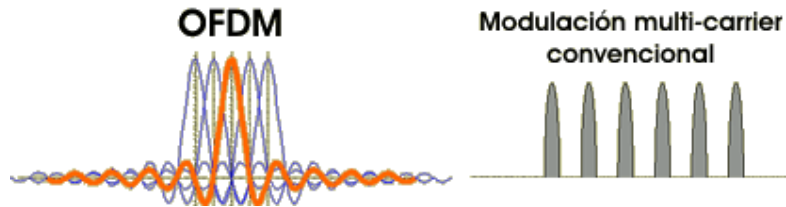


Figura 2.3: Espectro de una señal OFDM

### 2.2.2 Introducción histórica

La historia de OFDM data de mediados de los años 60, cuando Chang publicó su artículo sobre la síntesis de señales limitadas en banda para transmisiones multicanal. Chang presentó una serie de principios para la transmisión simultánea de mensajes a través de un canal lineal limitado en banda, evitando los perjudiciales efectos derivados de la Interferencia entre Símbolos (ISI) y entre canales (ICI). Poco después de que Chang publicara sus estudios, Saltzberg realizó un análisis del comportamiento de estos sistemas, concluyendo que:

“La estrategia de diseño de un sistema eficiente debe centrarse más en reducir la diafonía entre canales adyacentes que en el perfeccionamiento individual de los mismos, dado que la distorsión por diafonía tiende a ser dominante”.

Una mayor contribución a OFDM fue la realizada en 1971 por Weinstein y Ebert, quienes usaron la Transformada Discreta de Fourier (DFT) para desarrollar la modulación y demodulación en banda base. Este trabajo no se orientó hacia el “perfeccionamiento individual” de los canales sino hacia un procesamiento eficiente, eliminando los bancos de osciladores correspondientes a las distintas subportadoras. Para combatir la ISI e ICI usaron tanto un espacio de guarda entre símbolos, como un enventanado por coseno alzado en el dominio temporal. Su sistema no consiguió alcanzar una perfecta ortogonalidad entre subcanales pero es todavía hoy la mayor contribución aportada a OFDM.

Otro importante adelanto fue llevado a cabo por Peled y Ruiz en 1980, quienes introdujeron el uso del prefijo cíclico (CP) o extensión cíclica, resolviendo el problema de la ortogonalidad. En lugar de usar un espacio de guarda vacío, lo rellenaron con una extensión cíclica del símbolo OFDM.

Así se puede simular el desarrollo de la convolución cíclica del canal, lo cual implica la ortogonalidad sobre los canales dispersivos cuando la longitud del prefijo cíclico sea mayor que la respuesta impulsiva del canal.

Actualmente se utiliza OFDM en el estándar europeo de la DAB (Digital Audio Broadcasting) así como en varios sistemas propuestos para Norteamérica.

Durante los últimos años, la aceptación del OFDM como tecnología de base para el 802.16a que es un estándar de IEEE para redes de área metropolitana inalámbrica que puede proveer extensión inalámbrica para acceso de última milla de banda ancha en instalaciones de cable y DSL. El mismo cubre el rango de frecuencias de 2 a 11 GHz y alcanza hasta 50 kilómetros lineales, brindando conectividad de banda ancha inalámbrica sin necesidad de que exista una línea directa de visión a la estación de base.

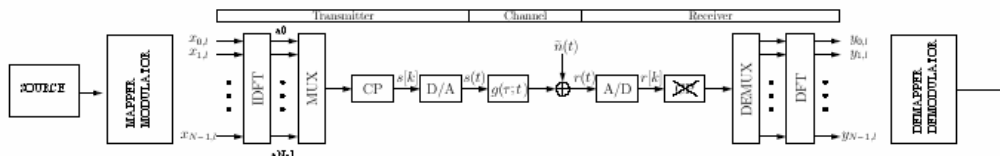
La velocidad de transmisión de datos puede llegar a 70 Mbps. Una estación de base típica puede albergar hasta seis sectores. La calidad de servicio está integrada dentro del MAC, permitiendo la diferenciación de los niveles de servicio.

### 2.2.3 Modelo general del sistema

Abordaremos el modelado genérico de los sistemas OFDM de manera discreta en el tiempo, y **suponiendo todas las señales en banda base**. Esto nos dará una visión más aproximada de la implementación digital que dichos sistemas soportan en la actualidad.

Además se asumirán las siguientes condiciones:

- Se utiliza el CP.
- La respuesta impulsiva del canal es menor que la longitud del CP.
- El transmisor y el receptor están perfectamente sincronizados.
- El ruido del canal es blanco, aditivo y gaussiano.
- El desvanecimiento es lo suficientemente bajo como para considerarlo constante durante el intervalo de un símbolo OFDM.



**Figura 2.4:** Implementación digital de un sistema OFDM en banda base

El anterior sistema permite la transmisión en paralelo de un conjunto de N símbolos M-arios, habiéndose formado previamente dichos símbolos a partir del flujo binario generado de forma aleatoria. En la práctica la entrada de nuestro sistema será atacada por una línea digital.

Tras el Mapper/Modulator el flujo binario (M-PSK o M-QAM) y convertido de serie a paralelo, con lo que se tiene un conjunto de N números complejos  $x_k$  provenientes de una determinada constelación de señales.

Así pues los datos  $x_k$  son modulados sobre N portadoras mediante la aplicación de la Transformada Inversa de Fourier (IDFT), generándose los valores complejos  $a_k$ . Esta señal ataca a un serializador que copia las últimas L muestras a modo de preámbulo prefijo cíclico (CP) y origina el símbolo OFDM, el cual será transmitido a través de un canal discreto en el tiempo.

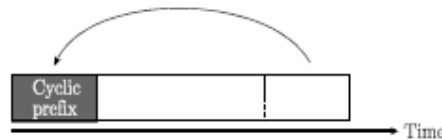


Figura 2.5: Creación del símbolo OFDM con CP

En el receptor la extensión cíclica es extraída y la señal resultante se demodula mediante la aplicación de un bloque DFT. La inserción del prefijo cíclico es comúnmente aceptada como la forma de evitar la ISI y preservar la ortogonalidad entre los tonos. Existe otra posibilidad que se basa en que en el proceso de creación del símbolo OFDM, éstos no se originan añadiendo las últimas muestras del símbolo a las primeras, sino que se añade una cola de ceros de la misma longitud L que el prefijo cíclico. A esta técnica se le denomina Zero-Padding (ZP) y será analizado pormenorizadamente en capítulos posteriores.

### 2.2.4 Modelo del sistema en tiempo continuo

El sistema OFDM continuo en el tiempo que se representa en la figura 2.6 puede considerarse como el sistema OFDM ideal que se sintetiza en la práctica.

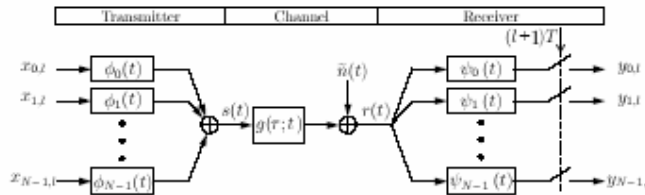


Figura 2.6: Modelo de un sistema OFDM en tiempo continuo.

- **Transmisor**

Supongamos un sistema OFDM con N subportadoras, un ancho de banda de W Hz y una longitud de símbolo de T segundos, de los cuales  $T_{cp}$  segundos son la longitud del prefijo cíclico, en ese caso, el transmisor usa las siguientes formas de onda:

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} e^{j2\pi\frac{W}{N}k(t-T_{cp})} & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $T = N/W + T_{cp}$ .

Por otra parte  $\phi_k(t)$  es un pulso rectangular modulado en una frecuencia de portadora  $kW/N$ , y la interpretación más usual de OFDM es que se están utilizando N subportadoras, cada una de las cuales transporta una baja tasa de bits.

Las señales  $\phi_k(t)$  se utilizan en la modulación de forma que la señal en banda base transmitida para el l-ésimo símbolo OFDM es:

$$s_l(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t-lT) \quad (2.3)$$

donde  $x_{0,l}, x_{1,l}, x_{2,l}, \dots, x_{N-1,l}$ , son números complejo de una cierta constelación de señales. Cuando se transmite una secuencia infinita de símbolos OFDM, la salida del transmisor no es más que la yuxtaposición de símbolos OFDM individuales:

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_l(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t-lT) \quad (2.4)$$

- **Canal**

Asumiremos que la respuesta del canal  $g(\tau; t)$  está restringida al intervalo  $\tau \in [0, T_{cp}]$  es decir a la longitud del prefijo cíclico. La señal recibida será:

$$r(t) = (g * s)(t) = \int_0^{T_{cp}} g(\tau; t) s(t-\tau) d\tau + \tilde{n}(t) \quad (2.5)$$

donde  $\tilde{n}(t)$  será el ruido blanco, aditivo y gaussiano introducido por el canal



- **Receptor**

El receptor OFDM consiste en un banco de filtros adaptados a la última parte  $[T_{cp}, T]$  de la forma de onda del transmisor  $\phi_k$ , es decir:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \phi_k^*(T-t) & \text{si } t \in [0, T-T_{cp}] \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (2.6)$$

Como podemos comprobar el prefijo cíclico se elimina en la receptor. Como el CP contiene toda la información acerca de la ISI del símbolo anterior, la muestra de salida procedente del banco de filtros del receptor no contiene interferencia. A partir de ahora no tendremos en cuenta el índice temporal  $l$  cuando calculamos la muestra de salida en el  $k$ -ésimo filtro adaptado. Así y utilizando las ecuaciones anteriores del canal y el transmisor podemos llegar a:

$$\begin{aligned} y_k &= (r * \psi_k)(t) \Big|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \psi_k(T-t) dt = \\ &= \int_{T_{cp}}^T \left( \int_0^{T_{cp}} g(\tau; t) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \phi_k(t-\tau) \right] d\tau \right) \phi_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si consideramos el canal constante en todo el intervalo de un símbolo OFDM y lo denotamos como  $g(\tau)$  podemos escribir:

$$y_k = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \int_{T_{cp}}^T \left( \int_0^{T_{cp}} g(\tau) \phi_k(t-\tau) \right) \phi_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta que los intervalos de integración son  $T_{cp} < t < T$  y  $0 < \tau < T_{cp}$ , lo que implica que  $0 < t - \tau < T$  y la expresión de la Transformada de Fourier se puede deducir la siguiente expresión:

$$y_k = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot h_k \cdot \int_{T_{cp}}^T \phi_k(t) \phi_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt \quad (2.9)$$

Como los filtros de transmisión son ortogonales entonces:

$$\int_{T_{cp}}^T \phi_{k'}(t) \phi_k^*(t) dt = \delta[k - k'] \quad (2.10)$$

Con lo que podemos simplificar la ecuación anterior, dando como resultado:

$$y_k = h_k x_k + n_k \quad (2.11)$$

donde  $n_k$  es el ruido aditivo gaussiano.

### 2.2.5 Modelado del sistema en tiempo discreto

Un modelo frecuencial de un sistema OFDM se puede observar en la figura 2.7. Comparando con el modelo en tiempo continuo, el modulador y el demodulador son reemplazados por módulos de IDFT y de FFT respectivamente, y el canal es una convolución en tiempo discreto. Así pues la principal diferencia radica en que las integrales serán sustituidas por sumatorios ya que el tratamiento que se le hace al CP es idéntico en ambos casos.

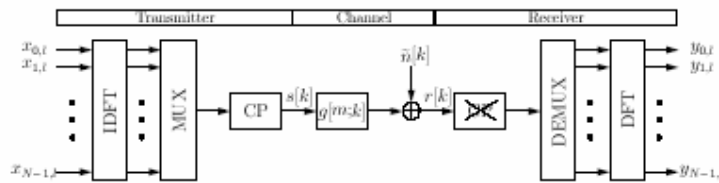


Figura 2.7: Sistema OFDM en tiempo discreto

Desde el punto de vista del receptor, el uso de un CP con una longitud mayor que la del canal, implica la transformación de la convolución lineal en una convolución circular. Si denotamos esta convolución circular por  $\otimes$  podemos expresar el sistema OFDM completo como:

$$y_l = DFT(IDFT(x_l) \otimes g_l + \tilde{n}_l) = DFT(IDFT(x_l) \otimes g_l) + n_l \quad (2.12)$$

donde  $y_l$  contiene los N datos recibidos,  $x_l$  los N puntos pertenecientes a la constelación en el transmisor,  $g$  es la respuesta impulsiva del canal (rellenada de ceros hasta obtener la longitud N), y  $\tilde{n}_l$  es el ruido introducido por el canal. Como el ruido lo consideramos blanco y gaussiano, entonces el término  $n_l = DFT(\tilde{n}_l)$  representa ruido gaussiano incorrelado. Así la DFT de la convolución circular de dos señales es equivalente al producto de las transformadas de cada una de las señales de forma individual. Denotando al producto elemento a elemento como “ $\bullet$ ” podemos escribir:

$$y_l = x_l \bullet DFT(g_l) + n_l = x_l \bullet h_l + n_l \quad (2.13)$$

donde  $h_l = \text{DFT}(g_l)$  es la respuesta en frecuencia del canal. Así hemos encontrado el mismo tipo de sistema que en el caso frecuencial con la única diferencia que la atenuación del canal  $h_l$  viene dada por la DFT de  $N$  puntos del canal discreto, en lugar de la respuesta en el campo de la frecuencia dada por  $h_l = G\left(k \cdot \frac{W}{N}\right)$ , es decir la Transformada de Fourier de  $g(\tau)$ .

### 2.2.6 Propiedades y Características de los sistemas OFDM

En general los sistemas OFDM presentan las siguientes propiedades:

- Realizan un uso eficiente del espectro
- Al dividir el canal en subcanales de banda estrecha, el sistema se hace más robusto ante caídas selectivas en frecuencia.
- Eliminan el efecto de la ICI e ISI gracias a la inserción del CP o del ZP
- Usando una determinada codificación de canal y entrelazado el sistema puede responder ante pérdidas de datos durante la transmisión
- La ecualización es más sencilla que en los sistemas de portadora única
- Es computacionalmente eficiente debido al uso de la FFT.
- Utilizando OFDM junto a técnicas de modulación diferencial, desaparece la necesidad de realizar una estimación de canal.

Una vez enunciadas las principales ventajas de estos sistemas procederemos a realizar un análisis de ciertos aspectos en concreto.

#### 2.2.6.1 La importancia de la ortogonalidad

El principal concepto de las señales OFDM es la ortogonalidad de las sub-portadoras. Si usamos como portadoras una señal senoidal, el área de un periodo es cero ya que la parte positiva de la señal se cancela con la negativa. Esta afirmación se comprueba fácilmente en la figura 2.8:

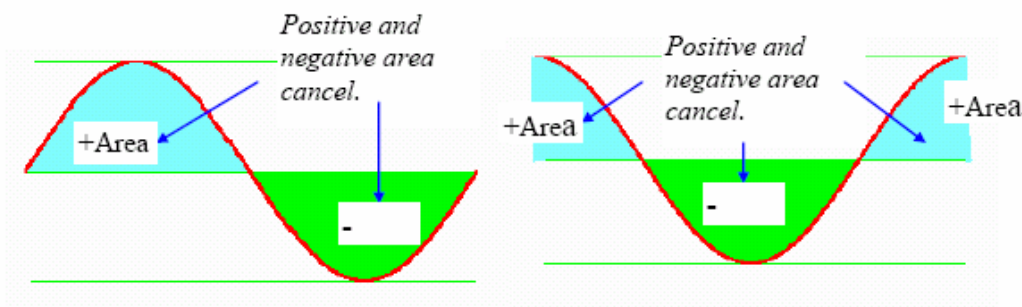
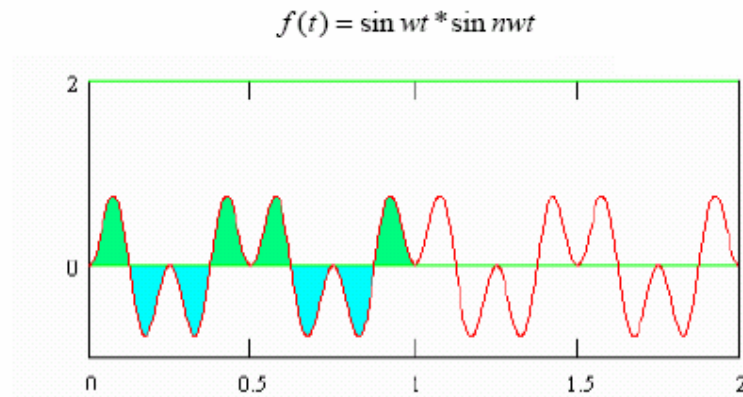


Figura 2.8: Señales sinusoidales de área nula.

Consideremos una onda senoidal de frecuencia  $m$  y la multiplicaremos por otra de frecuencia  $n$ , siendo  $n$  y  $m$  enteros. La integral del área bajo este producto viene dada por  $f(t) = \sin m\omega t \sin n\omega t$ .



**Figura 2.9 :** El producto de una señal senoidal por un armónico suyo es cero

Basándonos en una sencilla regla trigonométrica podemos escribir:

$$f(t) = \sin m\omega t \sin n\omega t = \frac{1}{2} \cos(m-n) - \frac{1}{2} \cos(m+n) \quad (2.14)$$

Cada una de estas dos componentes es también una senoide, por lo que la integral bajo su área es cero. Podemos concluir pues que en general para todos los números enteros  $n$  y  $m$  las señales senosoidales de frecuencias  $n$  y  $m$  son ortogonales entre sí. Este concepto de ortogonalidad es clave en OFDM ya que nos permite la transmisión simultánea en un estrecho rango de frecuencias y sin que se produzcan interferencias entre ellas.

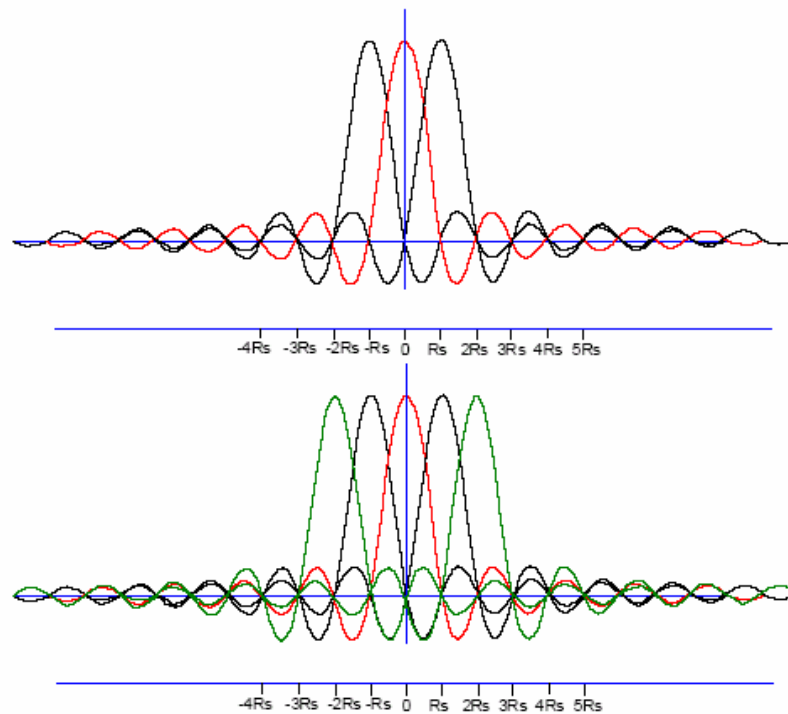
### 2.2.6.2 Espectro de una señal OFDM

Las señales QPSK producen un espectro cuyo ancho de banda se puede expresar como  $BW = (1 + \alpha)R_s$ . En OFDM, las portadoras adyacentes a la de información, pueden solaparse tal y como se ve en la figura 2.10

La suma de dos portadoras, permite ahora transmitir  $3R_s$  sobre un ancho de banda de  $[-2R_s, 2R_s]$ . Esto produce una eficiencia espectral de  $4/3$  Hz por símbolo para tres portadoras o una de  $6/5$  para 5 portadoras.

Como regla general se cumple que si añadimos  $N$  portadoras, la eficiencia espectral vendrá dada por  $(N+1)/N$  Hz por símbolo.

Así, cuanto mayor sea el número de portadoras, mayor eficiencia. En la figura 2.10 se nos muestra el espectro de una señal OFDM. Cabe destacar que el rango de la señal que no nos interesa disminuye rápidamente 50 dB y si comparamos ese espectro con el de la figura 2.11, comprobamos como ésta tiene mucha menor varianza y además las bandas laterales no disminuyen tan súbitamente.



**Figura 2.10:** Espectro de una señal OFDM frente al espectro de una señal QPSK

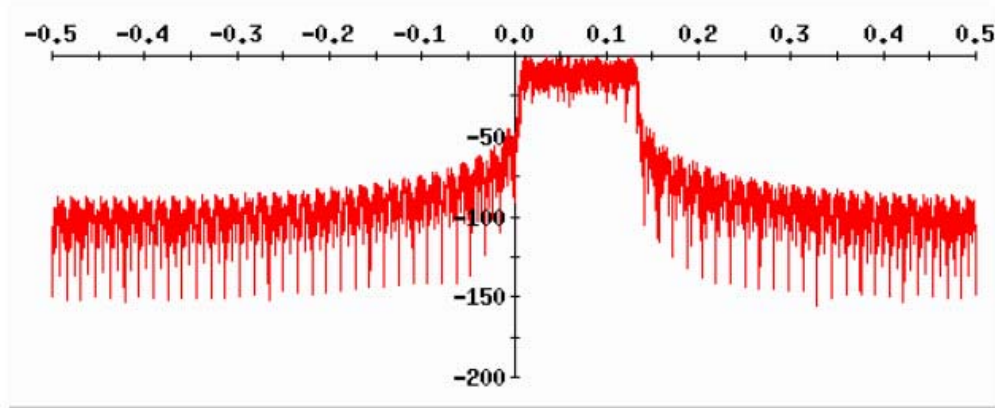


Figura 2.11: Espectro de una señal OFDM con 1024 portadoras

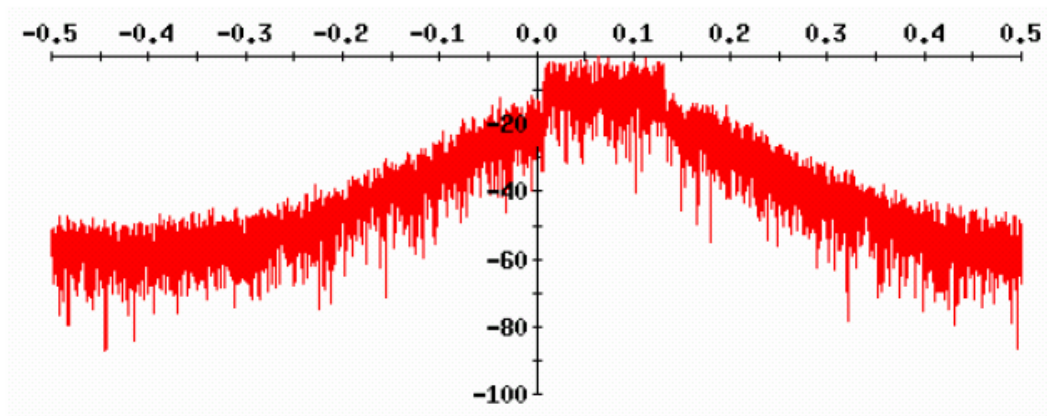


Figura 2.12: Espectro de una señal QPSK

### 2.2.6.3 PAPR (Peak to Average Power Ratio)

Si una señal procede de la suma de  $N$  señales cuya amplitud máxima es 1 voltio, no es descabellado pensar que en un determinado instante esta señal pueda alcanzar una amplitud máxima de  $N$  en el caso de que las  $N$  señales se encuentren sumando sus máximos simultáneamente.

La PAPR se define como:

$$R = \frac{|x(t)|^2}{P_{avg}} \quad (2.15)$$

donde  $P_{avg}$  representa la potencia media.

Para una señal OFDM con 128 sub-portadoras, cada una con una potencia normalizada de 1 w, el máximo PAPR que se puede producir es de 21 dB. Este será el caso en el que las 128 portadoras se combinen en su punto máximo. El valor medio de PAPR rondará los 10-12 dB.

La variación de la amplitud que se puede observar en la Figura 2.12 produce un aumento del nivel del ruido en la banda de interés y un incremento de la tasa de error de bit cuando una señal OFDM atraviesa un amplificador no lineal. Este efecto impide el uso de señales OFDM en aplicaciones que requieran estos amplificadores como puede ser un enlace satélite.

Para mitigar la PAPR existen varias posibilidades:

1. **Mantener el nivel de potencia**

Podemos mantener la potencia de la señal en un cierto nivel deseado. Esto reduce la PAPR pero introduce otras distorsiones y la ICI.

 Interferencia inter canal

2. **Mapeo Selectivo**

Se trata de multiplicar la señal de datos por un conjunto de códigos, calcular la IFFT de cada uno y escoger aquel que presente menor PAPR.

3. **IFFT parcial**

Consiste en dividir la señal en celdas, calcular la IFFT de cada una y combinarlas. De esta forma, si subdividimos 128 subportadoras en cuatro grupos de 32, la máxima PAPR será de 12 dB en lugar de 21 dB del conjunto completo. Posteriormente se combinan las cuatro secuencias para formar la señal transmitida.

#### 2.2.6.4 **Sincronización**

Otro de los grandes problemas de la modulación OFDM es la exacta sincronización que necesita. Se suelen utilizar tonos pilotos entre subportadoras para poder mantener la sintonización. En capítulos posteriores analizaremos exhaustivamente el problema de la sincronización en OFDM.

### 2.2.6.5 Codificación

Las subportadoras suelen codificarse con un código convolucional antes de realizar la antitransformada discreta de Fourier. La versión codificada de OFDM se llama COFDM o Coded OFDM.

### 2.2.6.6 Parámetros de una señal OFDM

Se verán los parámetros reales de los sistemas OFDM en cualquiera de las aplicaciones típicas de este tipo de modulación, como puede ser por ejemplo la DVB o ADSL.

Los parámetros con sus correspondientes valores son:

- **Tasa de datos:** De 6 Mbps a 48 Mbps
- **Tipo de modulación:** BPSK , QPSK , 16 QAM y 64 QAM
- **Codificación:** Convolucional concatenado con Reed Solomon.
- **Periodo de la FFT :** También denominado periodo de símbolo , su valor típico es de  $1/\Delta = 3.2 \mu\text{seg}$
- **Tamaño de la FFT :** 64 de los cuales se suelen usar sólo 58 , 48 para datos y 4 para señales piloto
- **Separación de frecuencia entre subportadoras:** 20 Mhz divididos en 64 portadoras de 0.3125 Mhz.
- **Duración del periodo de guarda:** Un cuarto de símbolo, es decir,  $0.8 \mu\text{seg}$ .
- **Tiempo de símbolo:**  $4 \mu\text{seg}$ .



## 2.3 Sincronización

### 2.3.1 Introducción

El principal argumento en contra de OFDM es sin duda su alta sensibilidad a errores de sincronización, en particular al offset frecuencial. En lo que sigue veremos los tres niveles en los que podemos situar el problema de la sincronía: sincronización de símbolo, de frecuencia de portadora y de frecuencia de muestreo.

### 2.3.2 Sincronización de símbolo

En los sistemas OFDM se presta una gran atención a la sincronización de símbolo por su gran importancia, sin embargo los requerimientos de temporización se relajan gracias a la inclusión del CP.

Un offset de temporización provoca una rotación de las subportadoras dentro de la constelación de señales usada, mayor cuanto más cerca se encuentren de los extremos de la banda de frecuencia. Realizaremos un análisis de este fenómeno.

Supongamos que la señal en recepción lleva un retraso de  $n\varepsilon$  muestras no corregidas, es decir estamos la siguiente situación:

$$r(n - n\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum h(i) a_k e^{-j2\pi ki/N} \right] e^{-j2\pi k(n-n\varepsilon)/N} \quad (2.16)$$

Los puntos de la constelación que toma el demodulador en recepción sufren un doble efecto:

$$Z_k = a_k \left[ \sum h(i) e^{-j\frac{2\pi ki}{N}} \right] e^{-j\frac{2\pi kn\varepsilon}{N}} \quad (2.17)$$

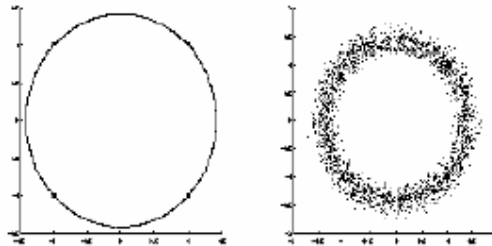
Por un lado  $a_k$  toma el efecto del canal mediante el producto con la función de transferencia  $H(k)$ :

$$H(k) = \sum h(i) e^{-j\frac{2\pi ki}{N}} \quad (2.18)$$

Por el otro  $a_k$  también sufre una rotación que viene determinada por el término de  $e^{-j\frac{2\pi kn\varepsilon}{N}}$ .

Podemos como dicho efecto es más intenso a medida que incrementamos la frecuencia, o lo que es lo mismo cuanto más nos acerquemos al extremo de la banda.

Comprobamos el efecto particularizando para una constelación QPSK:



**Figura 2.13 :** Efecto de canal y error de sincronía de símbolo sobre una constelación QPSK.

Si el error de sincronización es lo suficientemente pequeño como para mantener la respuesta impulsiva del canal constante dentro del CP, entonces la ortogonalidad se mantiene. En este caso el offset se puede considerar como un desplazamiento de fase introducido por el canal, de manera que las rotaciones de fase introducidas pueden estimarse mediante un estimador de canal, sin embargo si el desplazamiento es mayor que la longitud del CP, entonces la ISI sí afectará nuestro sistema.

→ interferencia inter simbólica

Describiremos dos posibles alternativas para minimizar las consecuencias de este negativo efecto: una primera opción basada en pilotos y otra en el prefijo cíclico.

Fueron Warner y Leung los que propusieron una solución del primer tipo. Utilizaron un esquema donde la señal OFDM se transmitía en FM, y el transmisor codificaba un cierto número de subcanales reservados con fases y amplitudes conocidas. El algoritmo está compuesto por tres fases. En la primera (detección de potencia) se detecta si hay presencia de señal OFDM midiendo el nivel de potencia y comparándolo con un cierto umbral. En la segunda fase (detección gruesa) se adquiere un alineamiento de sincronización con un error máximo de 0.5 muestras. Este grado de alineamiento no es aceptable, sino que se usa para simplificar el posterior proceso de captura, ya que éste supone que el error de temporización es pequeño. Esta sincronización gruesa se obtiene correlando la señal recibida con una copia retrasada de la misma. Para poder detectar el pico de correlación con suficiente precisión, se usa un filtro digital que interpola los datos a una velocidad cuatro veces superior a la original. Por último en la última fase (sincronización fina), los subcanales reservados se ecualizan con la estimación de canal obtenida a partir de los pilotos. Dado que la sincronización gruesa garantiza que el error de temporización es menor que 0.5 muestras, la respuesta impulsiva del canal se encuentra dentro del CP.

Por otra parte existen otros algoritmos basados en el empleo del prefijo cíclico. La diferencia entre dos muestras espaciadas  $N$  posiciones se puede representar como  $r(k) - r(k + N)$ . Cuando una muestra pertenece al prefijo cíclico y la otra al símbolo

OFDM del cual se ha copiado, dicha diferencia es pequeña .Si se enventana con una ventana rectangular de la misma longitud que el CP obtendremos una serie de mínimos, cada uno de los cuales se encontrará al comienzo de los símbolos OFDM.

Esta idea se formaliza matemáticamente mediante la función de verosimilitud, la cual se maximiza para obtener de manera simultánea los offsets temporal y frecuencial. Veámosla para el caso de offset frecuencial nulo y offset temporal  $\theta$ :

$$\Lambda(\theta) = \sum_{k=\theta}^{\theta+L-1} \frac{2}{SNR+1} \operatorname{Re}\{r(k)r^*(k+N)\} - \frac{SNR}{SNR+1} |r(k) - r(k+N)|^2 \quad (2.19)$$

### **2.3.3 Sincronización de frecuencia de muestreo**

La señal continua recibida debe ser muestreada en instantes de tiempo dados por el reloj de recepción. Existen dos tipos de métodos que tratan con el error en la frecuencia de muestreo.

En sistemas de muestreo sincronizado un algoritmo de temporización controla un oscilador de cristal controlado por tensión con objeto de alinear los relojes de transmisión y recepción. El otro método es el de muestreo no sincronizado, en el cual la tasa de muestreo permanece fija y se realiza un post-procesado digital.

El efecto de un offset en la frecuencia es doble: la componente útil de la señal se ve rotada y atenuada, y por otro lado se introduce ICI en el sistema.

A partir de los estudios publicados hasta la fecha se desprende que los sistemas de muestreo no sincronizados son mucho más sensibles al offset de reloj que los de muestreo sincronizado.

### **2.3.4 Sincronización de frecuencia de subportadora**

#### **2.3.4.1 Errores frecuenciales**

El offset frecuencial se produce como consecuencia de diferencias en los osciladores de transmisor y receptor, desplazamientos Doppler o desfases introducidos por canales no lineales. Hay dos efectos destructivos provocados por el offset en la frecuencia de portadora: uno es la reducción en la amplitud de la señal como consecuencia de que las senoides no se muestrean en su máximo, el otro es la aparición de ICI en el sistema. Este último es provocado por la pérdida de ortogonalidad entre los subcanales.

Pollet evaluó analíticamente la degradación en la BER provocada por la presencia de offset frecuencial de portadora para un canal AWGN .Denotemos el offset frecuencial relativo, normalizado por el espacio entre subcanales como:

$$\Delta f = \frac{\Delta F}{W/N} \quad (2.20)$$

donde  $\Delta F$  es el offset frecuencial,  $N$  es el número de subportadoras y  $W$  el ancho de banda de la señal OFDM. La degradación  $D$  que sufre la SNR (en dB) puede ser aproximada por:

$$D(\text{dB}) \approx \frac{10}{3 \ln 10} (\pi \Delta f)^2 \frac{E_s}{N_0} = \frac{10}{3 \ln 10} \left( \pi \frac{N \Delta f}{W} \right)^2 \frac{E_s}{N_0} \quad (2.21)$$

Vemos como  $D$  aumenta con el cuadrado del número de canales  $\Delta F$  y  $W$  son constantes.

#### 2.3.4.2 Estimadores de frecuencia

Al igual que en el caso de la sincronización de símbolo, los distintos esquemas de sincronización de portadora se basan en el uso de pilotos o en el aprovechamiento de las características del CP.

En los algoritmos basados en pilotos, algunas subportadoras se usan para la transmisión de símbolos conocidos. Este conocimiento permite la estimación de las rotaciones de fase, las cuales tiene una correspondencia directa con el offset frecuencial.

Las técnicas basadas en el CP utilizan la redundancia introducida por éste de dos maneras: creando una función que alcanza su máximo en al instante de offset nulo y hallando dicho máximo, o bien usando estimación de máxima verosimilitud.

Es interesante resaltar la relación entre la sincronización temporal y frecuencial .Si deseamos facilitar ésta última , lo podemos hacer rebajando el número de subportadoras, lo cual hace aumentar el espaciado entre ellas , sin embargo esto dificultaría la sincronización temporal debido a que la disminución en  $N$  reduciría la longitud de los símbolos. Esta relación se puede representar con la siguiente ecuación:  $\Delta f_c \frac{N}{W} = 1$ , donde  $\Delta f_c$  es el espaciado frecuencial entre subportadoras,  $N$  el número de subportadoras y  $W$  el ancho de banda de la señal OFDM.

#### 2.3.5 El problema del Multitrayecto

Aunque hasta ahora sólo hayamos hecho un análisis del sincronismo considerando un canal perfecto, ahora se considerará un canal real en el cual se produce el fenómeno del multitrayecto.

Supondremos que la longitud del CP es mayor que la de la respuesta impulsiva del canal multitrayecto, evitando así ISI e ICI debida a posibles errores en el sincronismo de símbolo.

La parte de la señal transmitida sin el prefijo es:

$$x(t) = \exp(j2\pi f_c t) \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,i} \exp\left(\frac{j2\pi k t}{T}\right) \quad \text{para } (i-1)T < T < iT \quad (2.22)$$

La señal recibida debida a un único trayecto después de eliminar el prefijo es:

$$\begin{aligned} v_p(t) &= g_p \exp(j2\pi f_c (t - \tau_p)) \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,i} \exp\left(\frac{j2\pi k (t - \tau_p)}{T}\right) = \\ &= g_p \exp(j2\pi f_c t) \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,i} \exp\left(\frac{j2\pi k t}{T}\right) \exp(j(\theta_p + k\phi_p)) \quad \text{para } (i-1)T < T < iT \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $g_p$  es la amplitud del eco p.

La rotación de fase se debe a dos componentes  $\theta_p = -2\pi f_c \tau_p$  y  $k\phi_p = -k2\pi f_c \tau_p / T$ . El primer término es el mismo para todas las subportadoras.

Para casos típicos el retraso introducido por un eco,  $\tau_p$ , es mucho mayor que el periodo de la portadora y los valores de  $\theta_p$ , de forma aproximada, se distribuyen uniformemente sobre  $2\pi$ . Si la duración de la respuesta impulsiva del canal es mucho menor que la duración del símbolo OFDM,  $k\phi_p$  es muy pequeño y prácticamente no tiene efecto. Cuando esto ocurre se dice que hay desvanecimiento plano y entonces para un eco todas las subportadoras sufren la misma atenuación.

Si los ecos crean un cambio en la frecuencia de la portadora (efecto Doppler) esta variación se estudia igual que se estudió el offset entre los osciladores. Para este caso y si se cumple la condición de desvanecimiento plano tenemos que en el receptor las salidas para un determinado canal son:

$$z_{m,i,p} = g_p \exp(j\theta_p) \sum_{i=0}^{N-1} c_{l-m,p} a_{l,i} \quad (2.24)$$

donde

$$c_{l-m,p} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\sin(\pi(1-m+\Delta f_p T))}{\sin\left(\frac{\pi(1-m+\Delta f_p T)}{N}\right)} x \exp\left(j\left(\frac{N-1}{N}\right)\pi(l-m+\Delta f_p T)\right) \quad (2.25)$$

$c_{l-m,p}$  es el peso para calcular la ICI sobre la subportadora m introducida por la subportadora l y  $\Delta f_p$  es el cambio de frecuencia que introduce el eco p.

La ICI total viene dada por:

$$\frac{\text{potencia media de la señal deseada}}{\text{potencia media ICI}} = \frac{\sum_{\forall \text{ ca min os}} |c_{0,p}|^2}{\sum_{\forall \text{ ca min os}} \sum_{l \neq m}^{N-1} |c_{l-m,p}|^2} \quad (2.26)$$

Si no consideramos el CP, entonces aparece ISI e ICI debido a que cada eco llega con un retardo p. Este fenómeno se estudia igual que si no existiera sincronismo en el receptor .Entonces si  $z_{m,i,p}$  es el símbolo recibido en la subportadora m en el símbolo i debido al eco con retraso p se tiene:

$$z_{m,i} = \sum_{\forall \text{ ca min os}} z_{m,i,p} \quad (2.27)$$

Para cada camino, cada  $z_{m,i,p}$  tiene una ICI que se calcula igual que calculamos la ICI debida a un error de duración p en el sincronismo.

## 2.4 Ecuación de sistemas OFDM

### 2.4.1 Estimación de canal

Las técnicas de modulación pueden clasificarse en coherentes o diferenciales. Cuando se usan modulación diferencial no se necesita la estimación de canal, ya que la información está codificada en la diferencia entre dos símbolos consecutivos. Esta es una técnica común en sistemas inalámbricos, en los que si no se necesita implementar el estimador de canal se reduce la complejidad del receptor. La modulación diferencial se usa por ejemplo en el estándar europeo DAB.

Los inconvenientes de la modulación diferencial son una pérdida de 3-4 dB en la SNR y la imposibilidad de aumentar la eficiencia espectral con constelaciones multi-amplitud. Una interesante alternativa a la modulación coherente es la modulación DAPSK, es decir PSK con amplitud diferencial, donde la eficiencia espectral es mayor que en DPSK, y es alcanzada con una codificación diferencial también de la amplitud. Esto requiere una distribución de amplitudes no uniforme.

Atendiendo a otros aspectos, podemos comentar que la modulación coherente permite usar constelaciones de señal arbitrarias y es una elección obvia en los sistemas cableados, donde el canal es prácticamente constante en el tiempo. En sistemas inalámbricos la eficiencia de la modulación coherente la hace interesante cuando la tasa binaria a transmitir es elevada.

Estos esquemas de modulación coherentes presentan el problema de la necesidad de ecualización, lo cual hace necesario el desarrollo de algoritmos de estimación de canal.

Aunque existe una variada gama de algoritmos de estimación de canal, todos proceden de los esquemas que presentamos a continuación

### 2.4.2 Estimación de canal basado en la DFT

Consideremos el siguiente esquema general:

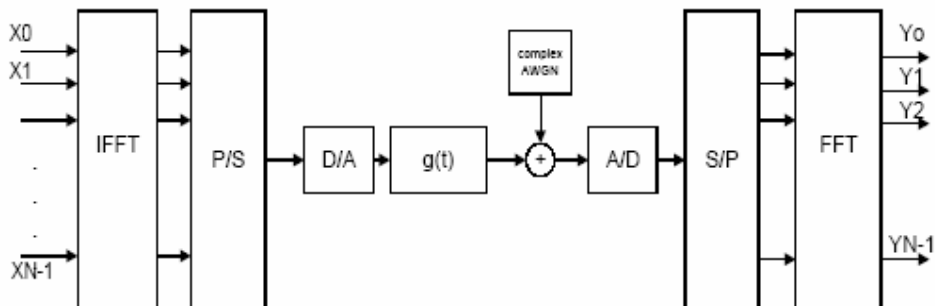


Figura 2.14 : Modelo OFDM continuo

La respuesta impulsiva del canal la podemos modelar usando la siguiente expresión:

$$g(t) = \sum_m \alpha_m \delta(t - \tau_m T_s) \quad (2.28)$$

donde las amplitudes  $\alpha_m$  son valores complejos y la duración de  $g(t)$  es inferior a la del espacio de guarda.

El sistema se modela en función a una DFT de N puntos como:

$$Y = DFT_N \left( IDFT_N(X) \otimes \frac{g}{\sqrt{N}} + \hat{n} \right) \quad (2.29)$$

donde  $\otimes$  denota la convolución cíclica,  $n$  un vector de ruido complejo y  $g$  se determina por el equivalente cíclico de funciones sampling.

$$G_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \alpha_m e^{-j\frac{\pi}{N}(k+(N-1)\tau_m)} \frac{\sin(\pi\tau_m)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(\tau_m - k)\right)} \quad (2.30)$$

La validez del anterior modelo depende de cómo de bien el espacio de guarda elimine la ISI, y puede ser reescrito en base a un conjunto de N canales gaussianos independientes:

$$Y_k = H_k X_k + n_k \quad k = 0 \dots N-1 \quad (2.31)$$

donde  $H_k$  es la atenuación compleja del canal dada por  $H = DFT_N(g)$  y  $n = DFT_N(\hat{n})$  es un vector de ruido gaussiano complejo. Si lo expresamos de manera matricial aparece de forma más compacta:

$$Y = XFg + n \quad (2.32)$$

Basándonos en el anterior desarrollo matemático nos planteamos la posibilidad de obtener una expresión que proporcione una estimación de la respuesta impulsiva del canal lo más exacta posible. Para ello estableceremos dos criterios estadísticos diferentes, los cuales darán lugar a las estimaciones conocidas como MMSE (Minimum Mean Square Error) y LSE (Least Square Error). A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los dos criterios:



- MMSE:

$$\hat{\mathbf{g}}_{MMSE} = \mathbf{R}_{gy} \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.33)$$

donde  $\mathbf{R}_{gy} = E(\mathbf{g}\mathbf{y}^H) = \mathbf{R}_{gg} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H$  (2.34)

$$\mathbf{R}_{yy} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^H) = \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \quad (2.35)$$

son matrices de varianza cruzada

- LSE

$$\hat{\mathbf{g}}_{LSE} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.36)$$

### **2.4.3 Ecuación**

Partamos del modelo discreto de sistema OFDM representado en la figura 2.6, donde a partir de este punto se denominará  $X_m$  a cada uno de los N símbolos que serán modulados mediante la IDFT.

Las muestras de la señal OFDM resultante se puede expresar como:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{j\frac{2\pi mn}{N}} \quad 0 \leq n \leq N \quad (2.37)$$

donde  $x_n$  representa la n-ésima muestra de salida del bloque IDFT.

Consideremos el canal discreto constituido por L muestras, la señal recibida se puede expresar como:

$$y_n = \sum_{i=0}^{L-1} h_{n,i} x_{n-i} + w_n = h_{n,0} x_n + h_{n,1} x_{n-1} + \dots + h_{n,L-1} x_{n-L+1} + w_n \quad 0 \leq m \leq N \quad (2.38)$$

donde  $h_{n,l}$  representa la l-ésima muestra compleja de la respuesta impulsiva del canal y  $w_n$  es el ruido AWGN en el instante temporal n.

Por simplicidad se ha obviado en las ecuaciones al prefijo cíclico correspondiente a las  $N$  muestras del símbolo OFDM. La señal demodulada en el dominio frecuencial se obtiene mediante la DFT de  $y_n$  como:

$$Y_m = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} X_k H_l^{m-k} e^{-j\frac{2\pi k m}{N}} + W_m \quad 0 \leq m \leq N-1 \quad (2.39)$$

donde  $W_m$  denota la DFT de  $w_n$  y  $H_l^{m,k}$  representa la DFT de la respuesta impulsiva del canal como:

$$H_l^{m-k} = \sum_{n=0}^{N-1} h_{n,l} e^{-j\frac{n\pi(m-k)}{N}} \quad (2.40)$$

Si expresamos el anterior desarrollo de manera matricial obtendremos una expresión compacta del tipo:

$$Y = HX + W \quad (2.41)$$

donde cada uno de los elementos de la matriz  $H$  puede ser reescrito como:

$$a_{m,k} = H_0^{m-k} + H_1^{m-k} e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + \dots + H_{L-1}^{m-k} e^{-j\frac{2\pi k(L-1)}{N}} \quad 0 \leq m, k \leq N-1 \quad (2.42)$$

Dada la anterior expresión matricial el problema de la equalización se centra en estimar la matriz  $H$  y calcular su inversa, lo cual requiere algoritmos encaminados hacia la reducción de la carga computacional que las operaciones matriciales requieren.

#### **2.4.4 Tasa de error de bit para canales AWGN**

Asumiendo que el receptor conoce con exactitud el tiempo de enventanado de la DFT, la salida del proceso de la DFT para la  $n$ -ésima subportadora en  $[iT_s, iT_s + t_s]$  es:

$$r_{ni} = \frac{1}{t_s} \int_{iT_s}^{iT_s+t_s} r(t) e^{-j2\pi f_n(t-iT_s)} dt \quad (2.43)$$

La ecuación anterior muestra que la señal recibida es integrada sobre el periodo de símbolo completo considerado. Por consiguiente, en un canal AWGN, es preciso tener en cuenta la pérdida de potencia debida a la inserción del intervalo de guarda ya que esta potencia no es utilizada para la detección.

A muestra de ejemplo, cuando se usa BPSK y QPSK en las subportadoras la BER es:

$$P_{b,AWGN}^{B,coherente} = P_{b,AWGN}^{Q,coherente} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\gamma_b'}\right) \quad (2.44)$$

donde  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  es la función de error complementario dada por:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (2.45)$$

y  $\gamma_b'$  es la SNR efectiva por bit. Definiendo la SNR por bit como  $\gamma_b$  se puede hacer:

$$\gamma_b' = \frac{t_s}{T_s} \gamma_b = (1 - \alpha_G) \gamma_b \quad (2.46)$$

Si se usa un sistema basado en DPSK se tiene la ventaja de poder eliminar el proceso el laborioso de recuperar las subportadoras que las técnicas de detección coherente requieren, aunque sus prestaciones disminuyan. En este caso

$$P_{b,AWGN}^{B,diferencial} = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b'} \quad (2.47)$$

y empleando QPSK la BER es:

$$P_{b,AWGN}^{Q,diferencial} = Q(a, b) - \frac{1}{2} I_0(ab) e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \quad (2.48)$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_b'}{2}} \left( \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) \quad (2.49)$$

$$b = \sqrt{\frac{\gamma_b'}{2}} \left( \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) \quad (2.50)$$

Donde la función  $Q(\cdot)$  queda definida como:

$$Q(a, b) = e^{-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{a}{b} \right)^j I_j(ab) \quad (2.51)$$

donde  $I_j(\cdot)$  es la función de Bessel modificada de primera especie y orden j-ésimo.

## 2.5 ZP-OFDM

### 2.5.1 Introducción

Como ya comentamos en el apartado anterior de análisis de un sistema OFDM, en general la trama generada por una sucesión binaria aleatoria alimenta a un bloque que realiza el mapeo de los bits según una modulación determinada.

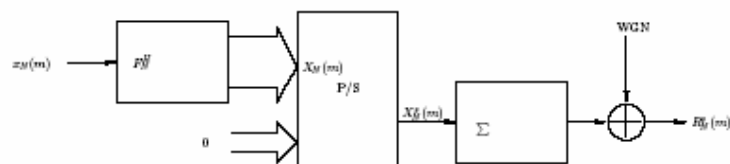
En el caso particular de ZP-OFDM (Zero Padding OFDM) los datos, una vez mapeados, son sometidos al proceso de “Zero Padding” y posteriormente se calcula su IFFT de M puntos.

El “Zero Padding” no es más que un proceso mediante el cual se añaden a los datos originales una secuencia de ceros que producen una versión sobremuestrada de la señal de información. Realmente lo que se hace es añadir un intervalo de guardia a la señal OFDM para que, tal y como sucede en CP-OFDM, se proteja a las señales de los efectos tan nocivos para la transmisión de las mismas como son las interferencias ICI e ISI.

Por el contrario en los sistemas CP-OFDM, en lugar de tener ceros en el intervalo entre dos símbolos consecutivos de OFDM, se utiliza como intervalo de guarda una copia de las últimas muestras del próximo símbolo OFDM.

### 2.5.2 Análisis de un sistema ZP-OFDM

Conceptualmente un sistema ZP-OFDM se puede representar según la figura 2.15. La única diferencia con los sistemas CP-OFDM estriba en el CP es reemplazado por una cola de ceros que se añaden a cada bloque  $X_N(m)$ . Así pues deduciremos una relación de entrada-salida que intente modelar matemáticamente el sistema.



**Figura 2.15:** Sistema ZP-OFDM

La trama de datos de entrada  $x_N(m)$  del m-ésimo bloque de entrada al procesador de IFFT no es más que un vector de N elementos que se puede representar como:

$$x_N(m) = \begin{bmatrix} x_0(m) \\ x_1(m) \\ x_3(m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-3}(m) \\ x_{N-2}(m) \\ x_{N-1}(m) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

El vector de salida del bloque IFFT  $X_N(m)$  puede expresarse de forma parecida:

$$X_N(m) = \begin{bmatrix} X_0(m) \\ X_1(m) \\ X_3(m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{N-3}(m) \\ X_{N-2}(m) \\ X_{N-1}(m) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Por otra parte es bien conocido que la matriz IFFT no es más que la matriz hermética de la matriz FFT. Denotaremos la matriz IFFT como  $F_N^H$  donde el superíndice  $H$  denota matriz hermética y  $F_N$  es la matriz de Fourier de orden  $N \times N$ . La matriz de FFT se puede escribir como:

$$F_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & \dots & W^{N-2} & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & \dots & W^{2(N-2)} & W^{2(N-1)} \\ 1 & W^3 & W^6 & \dots & \dots & W^{3(N-2)} & W^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{N-2} & W^{2(N-2)} & \dots & \dots & W^{(N-2)(N-2)} & W^{(N-2)(N-1)} \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-2)} & \dots & \dots & W^{(N-2)(N-1)} & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Así pues la matriz  $F_N^H$  será de la forma:

$$F_N^H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & \dots & W^{-(N-2)} & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & \dots & W^{-2(N-2)} & W^{-2(N-1)} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & \dots & \dots & W^{-3(N-2)} & W^{-3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{-(N-2)} & W^{-2(N-2)} & \dots & \dots & W^{-(N-2)(N-2)} & W^{-(N-2)(N-1)} \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-2)} & \dots & \dots & W^{-(N-2)(N-1)} & W^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Los dos vectores  $X_N(m)$  y  $x_N(m)$  están relacionados mediante la siguiente expresión:

$$X_N(m) = F_N^H x_N(m) \quad (2.56)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} X_0(m) \\ X_1(m) \\ X_3(m) \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{N-3}(m) \\ X_{N-2}(m) \\ X_{N-1}(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & \dots & W^{-(N-2)} & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & \dots & W^{-2(N-2)} & W^{-2(N-1)} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & \dots & \dots & W^{-3(N-2)} & W^{-3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{-(N-2)} & W^{-2(N-2)} & \dots & \dots & W^{-(N-2)(N-2)} & W^{-(N-2)(N-1)} \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-2)} & \dots & \dots & W^{-(N-2)(N-1)} & W^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(m) \\ x_1(m) \\ x_3(m) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-3}(m) \\ x_{N-2}(m) \\ x_{N-1}(m) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

En ZP-OFDM, el “Zero Padding” se obtiene añadiendo una ristra de G ceros al símbolo  $X_N(m)$ , matemáticamente el símbolo adquiere la forma de la ecuación 2.58. Entonces según la ecuación 2.58 podemos escribir la relación dada por la ecuación 2.59:

$$X_N^g(m) = \begin{bmatrix} X_0^g(m) \\ X_1^g(m) \\ X_2^g(m) \\ \vdots \\ X_{N-1}^g(m) \\ X_N^g(m) \\ X_{N+1}^g(m) \\ \vdots \\ X_{N+G-2}^g(m) \\ X_{N+G-1}^g(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(m) \\ X_1(m) \\ \vdots \\ X_{N-2}(m) \\ X_{N-1}(m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{bmatrix} X_0(m) \\ X_1(m) \\ X_3(m) \\ X_4(m) \\ \vdots \\ X_{N-2}(m) \\ X_{N-1}(m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & \dots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & \dots & W^{-2(N-1)} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & \dots & \dots & W^{-3(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{-(N-2)} & W^{-2(N-2)} & \dots & \dots & W^{-(N-2)(N-1)} \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \dots & \dots & W^{-(N-1)(N-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(m) \\ x_1(m) \\ x_2(m) \\ x_3(m) \\ \vdots \\ x_{N-2}(m) \\ x_{N-1}(m) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

O lo que es lo mismo, podemos reescribir la misma ecuación anterior de una forma simplificada:

$$X_N^g(m) = F_N^{H,g} x_N(m) \quad (2.60)$$

donde  $F_N^{H,g}$  es la matriz de dimensiones (N+G)xN obtenida al añadir G filas de ceros a la matriz  $F_N^H$  tal y como representamos en la siguiente ecuación:

$$F_N^{H,g} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & \dots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & \dots & W^{-2(N-1)} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & \dots & \dots & W^{-3(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{-(N-2)} & W^{-2(N-2)} & \dots & \dots & W^{-(N-2)(N-1)} \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \dots & \dots & W^{-(N-1)(N-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^H \\ F_{ZF}^g(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^H \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Donde  $F_N^{H,g}$  es la matriz de ceros de dimensiones  $G \times N$  y  $F_N^H$  es la matriz de fourier inversa.

El vector de salida del canal  $R_N^g(m)$  (de dimensiones  $N+G$  puesto que los ceros añadidos no se ha eliminado todavía y posteriormente a la inclusión de ruido de canal) se puede expresar como:

$$R_N^g(m) = H X_N^g(m) + \underbrace{H_{IBI} X_N^g(m-1)}_{IBI} + \underbrace{n_{N+G}(m)}_{Ruido} \quad (2.62)$$

Las matrices del canal  $H$  y  $H_{IBI}$  (ambas de dimensiones  $(N+G) \times (N+G)$  ) vienen dadas por:

$$H \hat{=} \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_{L-2} & h_{L-3} & \vdots & h_1 & h_0 & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ h_{L-1} & h_{L-2} & \vdots & h_2 & h_1 & h_0 & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \vdots & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$



$$H_{IBI} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{L-1} & \dots & h_3 & h_2 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & h_{L-1} & h_{L-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Como sucede que  $G \geq L$  podemos comprobar que el término de interferencia se eliminará ya que:

$$H_{IBI} X_N^g(m-1) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{L-1} & \dots & h_3 & h_2 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & h_{L-1} & h_{L-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(m-1) \\ X_1(m-1) \\ X_2(m-1) \\ X_3(m-1) \\ X_4(m-1) \\ \vdots \\ X_{N-2}(m-1) \\ X_{N-1}(m-1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.65)$$

Teniendo en cuenta este último resultado podemos reescribir la ecuación de la salida del canal como:

$$R_N^g(m) = HX_N^g(m) + \underbrace{n_{N+G}(m)}_{\text{Ruido}} \quad (2.66)$$

donde el producto  $HX_N^g$  lo podemos representar matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 HX_N^g(m) \hat{=} & \begin{bmatrix}
 h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 h_{L-2} & h_{L-3} & \dots & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 X_0(m) \\
 X_1(m) \\
 X_2(m) \\
 X_3(m) \\
 \vdots \\
 X_{N-3}(m) \\
 X_{N-2}(m) \\
 X_{N-1}(m) \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix} \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

Eliminar los bits de guarda en ZP-OFDM equivale básicamente “cortar” las  $G \geq L$  filas de la matriz  $HX_N^g(m)$  para conseguir la matriz  $H_0$  de dimensiones  $(N+G) \times N$ .

Así podemos expresar la salida del canal (omitiremos el ruido por simplificación) tras la eliminación de los bits de guarda mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 R_N(m) \hat{=} H_0 = & \begin{bmatrix}
 h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 h_{L-2} & h_{L-3} & \dots & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 X_0(m) \\
 X_1(m) \\
 X_2(m) \\
 X_3(m) \\
 \vdots \\
 X_{N-3}(m) \\
 X_{N-2}(m) \\
 X_{N-1}(m) \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix} \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

En el caso particular de  $L=G$ , obtenemos:

$$R_N(m) = \begin{bmatrix} h_{L-1} & h_{L-2} & \cdots & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_{L-1} & \cdots & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \cdots & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(m-1) \\ X_1(m-1) \\ X_2(m-1) \\ X_3(m-1) \\ \vdots \\ X_{N-3}(m-1) \\ X_{N-2}(m-1) \\ X_{N-1}(m-1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Para el caso general de  $L>G$  la ecuación anterior pasa a ser un caso especial:

$$R_N(m) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & h_{L-1} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \cdots & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(m-1) \\ X_1(m-1) \\ X_2(m-1) \\ X_3(m-1) \\ \vdots \\ X_{N-3}(m-1) \\ X_{N-2}(m-1) \\ X_{N-1}(m-1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Gracias a los ceros presentes en el vector columna podríamos escribir una versión simplificada la cual sería una matriz circulante que podríamos representar de esta forma: ( 2.71)

$$R_N(m) = \begin{bmatrix} h_0 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_{L-1} & \dots & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_5 & h_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{L-2} & h_{L-3} & h_{L-4} & \dots & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} \\ h_{L-1} & h_{L-2} & h_{L-3} & \dots & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h_{L-1} & h_{L-2} & h_{L-3} & h_{L-4} & \dots & h_0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & h_{L-3} & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(m-1) \\ X_1(m-1) \\ X_2(m-1) \\ X_3(m-1) \\ \vdots \\ X_{N-3}(m-1) \\ X_{N-2}(m-1) \\ X_{N-1}(m-1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$R_N(m) = C_N(h)X_N(m) + n_N(m) = C_N(h)F_N^H x_N(m) + \underbrace{n_N(m)}_{\text{Ruido}} \tag{ 2.72}$$