Unidad 5: Análisis Dimensional

Ing. Nahuel Castello
Mecánica de los fluidos - Departamento de Ingenieria Industrial
Universidad Tecnológica Nacional FRH

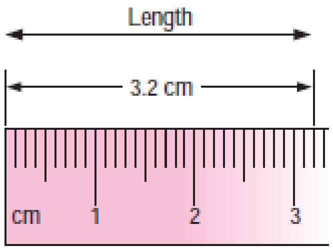
2017

Contenido de La Unidad

- **Parámetros adimensionales. Principio de homogeneidad dimensional.**
- **Adimensionalizacion por Inspección. Ejemplo.**
- **Número de Reynolds.**
- **Número de Euler.**
- **Número de Froude.**
- **Número de Mach.**
- **Número de Weber.**
- **Número de Nusselt.**
- **Número de Prandtl.**
- **Similitud entre modelo y prototipo.**
- **Túnel de Ensayo**
- **Teorema Pi de Buckinghan. Ejemplo.**

Parámetros adimensionales. Análisis dimensional.

Una ***dimensión*** es la medida de una cantidad física.
Una ***unidad*** es un número que se le asigna a una dimensión.



Una ***magnitud adimensional*** es aquella que carece de una unidad de medida asociada. Como ejemplos se tienen la cantidad de objetos de un conjunto de ítems, las proporciones, los números adimensionales de ingeniería (Reynolds, Mach, etc.).

El ***análisis dimensional*** es un método para reducir el número y complejidad de variables experimentales que intervienen en un fenómeno físico dado utilizando un método de "compactación".

Si un fenómeno depende de ***n variables***, el método reducirá el problema a ***k variables adimensionales*** donde *n* - *k* depende de la complejidad del problema.

Parámetros adimensionales. Análisis dimensional.

En general, *n-k* es el número de las variables independientes que gobiernan el problema.
En Mecánica de los Fluidos, estas variables independientes son la masa, la longitud, el tiempo y la temperatura.

Primary dimensions and their associated primary SI and English units

Dimension	Symbol*	SI Unit	English Unit
Mass	m	kg (kilogram)	lbm (pound-mass)
Length	L	m (meter)	ft (foot)
Time†	t	s (second)	s (second)
Temperature	T	K (kelvin)	R (rankine)
Electric current	I	A (ampere)	A (ampere)
Amount of light	C	cd (candela)	cd (candela)
Amount of matter	N	mol (mole)	mol (mole)

Ejemplo: Supongamos que se sabe que la fuerza que actúa sobre un cuerpo depende de 4 variables

$$F = f(L, V, \rho, \mu)$$

(para definir 10 puntos, uno por cada L son necesarios 10 experimentos por variable, es decir $\mathbf{10^4} = \mathbf{10000}$ **ensayos**)

Análisis Dimensional

$$F^* = \frac{F}{\rho V^2 L^2} = g\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)$$

$$C_F = g(Re)$$

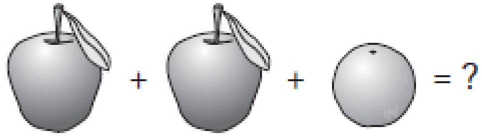
($\mathbf{10^1} = \mathbf{10}$ **ensayos**)

Ventajas adicionales:

- Ayuda a definir experimentos y planificar teorías,
- Permite definir “escalas” que dan lugar a “modelos” pequeños que permitirán reducir los “prototipos” a fabricar para probar un diseño.

Principio de homogeneidad dimensional (PHD)

Si una ecuación expresa correctamente la relación entre variables de un fenómeno o proceso físico, esta ecuación será ***dimensionalmente homogénea***, es decir que cada término de la misma tiene las mismas dimensiones.



Ejemplo, cinemática de una partícula: $\mathrm{X} = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

Ejemplo, ecuación de Bernoulli: $\dfrac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g z = \mathrm{C}$

Cada término de esta ecuación, podrá contener:

- Variables dimensionales (ej. Presión).
- Constantes dimensionales (ej. Gravedad).
- Constantes puras (ej. π, $1/2$)

Principio de homogeneidad dimensional (PHD)

“Es posible escribir cualquier ecuación dimensionalmente homogénea en una forma equivalente, totalmente adimensional, mas compacta”

“En el Proceso de Adimensionalizar una Ecuación con frecuencia aparecen parámetros adimensionales en la mayoría de los casos reciben el nombre en honor a algún Ingeniero / científico famoso”

Adimensionalizacion por Inspección

Pasos para Adimensionalizar por Inspección:

1. Identificar los parámetros a adimensionalizar.
2. Identificar y listar las dimensiones primarias presentes en la ecuación.

Primary dimensions and their associated primary SI and English units

Dimension	Symbol*	SI Unit	English Unit
Mass	m	kg (kilogram)	lbm (pound-mass)
Length	L	m (meter)	ft (foot)
Time†	t	s (second)	s (second)
Temperature	T	K (kelvin)	R (rankine)
Electric current	I	A (ampere)	A (ampere)
Amount of light	C	cd (candela)	cd (candela)
Amount of matter	N	mol (mole)	mol (mole)

3. Invertimos así vemos por que hay que multiplicar a la variable dimensional para adimensionalizarla.
4. Identificar las dimensiones primarias de cada parámetro dimensional. Definir los **parámetros de escalamiento**, por lo general en Mecánica de Los fluidos L, V, ρ, $P_0 - P_\infty$ para adimensionalizar y utilizarlos para convertir las dimensiones en variable adimensionales *.
5. Despejar los parámetros a adimensionalizar expresándolos en función de las variables adimensionales * y reemplazando en la ecuación a adimensionalizar.

Adimensionalizacion por Inspección
Número de Reynolds

Este **número de Reynolds, Re,** puede obtenerse a través de adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes.
El numero de Reynolds relaciona las **fuerzas de origen inercial** con las **fuerzas viscosas**. El mismo puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Navier – Stokes.

$$\rho\,(\frac{DV}{Dt} - g) = -\nabla P + \mu \nabla^2 V$$

1- Identificamos los parámetros a adimensionalizar: $\frac{D}{Dt}\ , V\ , g, \nabla, P\ y\ \nabla^2$

2- **Identificamos las dimensiones primarias de cada variable o constante dimensional** en la ecuación: L, t, M.

3- Invertimos así vemos por que hay que multiplicar a la variable dimensional para adimensionalizarla.

Adimensionalizacion por Inspección
Número de Reynolds

4- Seleccionamos los parámetros de escalamiento (L, U, ρ), y adimensionalizamos los parámetros del punto 1.

$$\frac{D}{Dt}^{*} = \frac{L}{U}\frac{D}{Dt} \qquad V^{*} = \frac{V}{U} \qquad g^{*} = g\frac{L}{U^{2}} \qquad \nabla^{*} = L\nabla \qquad P^{*} = \frac{P}{\rho U^{2}} \qquad \nabla^{2*} = L^{2}\nabla^{2}$$

5- Despejamos las variables dimensionales y reemplazamos en la ecuación a adimensionalizar de manera de que quede en función de los parámetros del punto 1 adimensionalizados.

$$(\frac{D^{*}(V^{*})}{Dt} - g^{*}) = -\nabla^{*}P^{*} + \frac{\mu}{\rho UL}\nabla^{*2}V^{*}$$

Adimensionalizacion por Inspección
Número de Reynolds

La expresión anterior, puede reescribirse como:

$$\left(\frac{D^*(V^*)}{Dt} - g^*\right) = -\nabla^* P^* + \frac{\mu}{\rho U L}\nabla^{*2} V^* \text{ donde } \quad \frac{\mu}{\rho U L} = \frac{1}{Re}$$

Finalmente se obtiene el número de Reynolds:

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}}$$

Nótese que **si $\boldsymbol{Re} \rightarrow \infty$**, entonces el **término viscoso es despreciable** y el flujo puede considerarse como no viscoso.

$$\left(\frac{D^*(V^*)}{Dt} - g^*\right) == -\nabla^* P^* + \frac{\mu}{\rho U L}\nabla^{*2} V^*$$

$$\left(\frac{D^*(V^*)}{Dt} - g^*\right) == -\nabla^* P^*$$

Número de Euler. Número de Cavitación

Expresa la relación entre la energía asociada a una pérdida de presión por unidad de volumen (por ejemplo un estrechamiento) respecto a la energía cinética por unidad de volumen del flujo. Se usa para caracterizar pérdidas de carga en el flujo: por ejemplo, a un flujo horizontal sin fricción le corresponde un número de Euler nulo, y cuanta más pérdida de carga se produzca en su movimiento, mayor será su número de Euler.

$$Eu = \frac{P_{arriba} - P_{abajo}}{\rho U^2}$$

Si hay una presión de vapor involucrada que genera un ΔP entre la presión del líquido y la de vapor, se lo llama número de cavitación:

$$Ca = \frac{P_a - P_v}{\rho U^2}$$

Número de Froude. Número de Weber

Nro. de Froude: Es el “segundo” coeficiente de presión y es el efecto dominante en flujos de superficies libres y puede ser descartado completamente si estas no existen en el problema. Se utiliza en el caso de resistencia de barcos, olas superficiales, canales abiertos, etc.

$$Fr = \frac{U^2}{gL}$$

Nro. de Weber: es el “tercer” coeficiente de presión y toma importancia solo si es menor o igual a 1, lo cual ocurre típicamente cuando la curvatura de una superficie es comparable en tamaño a la profundidad de líquido, como por ejemplo un gota, flujo capilar, ondas en el agua, etc. Si este número es grande puede ser despreciado.

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\Upsilon}$$

Donde Υ es la tensión superficial del fluido.

Número de Match

En un flujo de gas cuya velocidad es elevada ocurren cambios importantes en su presión, densidad y temperatura que se relacionan a partir de la ecuación general de los gases para el caso de un gas ideal.

Estos cambios de origen termodinámico introducen la aparición de dos nuevos parámetros adimensionales:

- El número de Mach (M), que relaciona la velocidad del gas con la velocidad del sonido en el mismo
- El coeficiente de calores específicos del gas (κ).

$$M = \frac{V}{C} \rightarrow C = \sqrt{\kappa R T}$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

$$R = \frac{P}{\rho T}$$

Número de Nusselt. Número de Prandtl

Número de Nusselt.

Nro. de Nusselt: En transferencia de calor en un fluido, este número indica la razón entre la transferencia conductiva y convectiva de calor a través de la superficie de borde donde se lo analiza.

$$Nu_L = \frac{hL}{k_f} = \frac{Transf.\ de\ calor\ convectiva}{Transf.\ de\ calor\ conductiva}$$

Número de Prandtl

Nro. de Prandtl: En transferencia de calor en un fluido, este número indica la razón entre la difusividad viscosay la difusividad térmica.

$$Pr = \frac{C_P \mu}{k} = \frac{Tasa\ de\ difusión\ viscosa}{Tasa\ de\ difusión\ térmica}$$

Números Adimensionales

Parameter	Definition	Qualitative ratio of effects	Importance
Reynolds number	$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U L}{\mu}$	$\dfrac{\text{Inertia}}{\text{Viscosity}}$	Always
Mach number	$\mathrm{Ma} = \dfrac{U}{a}$	$\dfrac{\text{Flow speed}}{\text{Sound speed}}$	Compressible flow
Froude number	$\mathrm{Fr} = \dfrac{U^2}{gL}$	$\dfrac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$	Free-surface flow
Weber number	$\mathrm{We} = \dfrac{\rho U^2 L}{\Upsilon}$	$\dfrac{\text{Inertia}}{\text{Surface tension}}$	Free-surface flow
Cavitation number (Euler number)	$\mathrm{Ca} = \dfrac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\dfrac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$	Cavitation
Prandtl number	$\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu c_p}{k}$	$\dfrac{\text{Dissipation}}{\text{Conduction}}$	Heat convection
Eckert number	$\mathrm{Ec} = \dfrac{U^2}{c_p T_0}$	$\dfrac{\text{Kinetic energy}}{\text{Enthalpy}}$	Dissipation
Specific-heat ratio	$k = \dfrac{c_p}{c_v}$	$\dfrac{\text{Enthalpy}}{\text{Internal energy}}$	Compressible flow

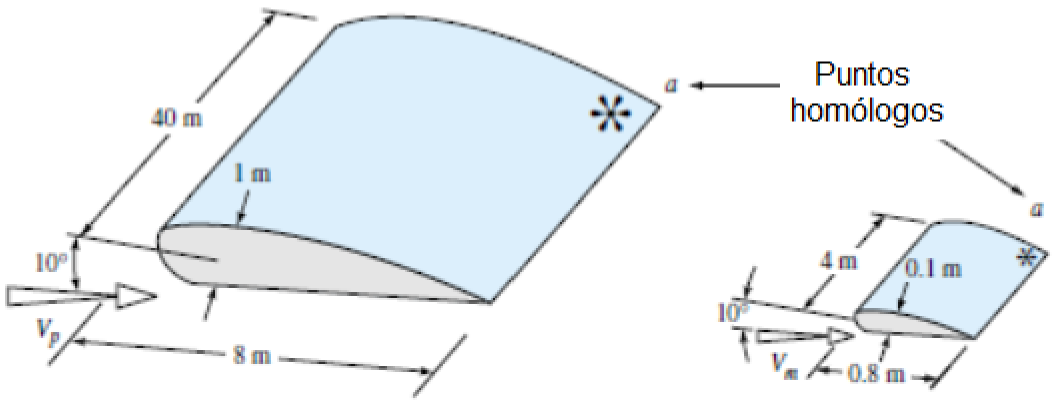
Números Adimensionales

Parameter	Definition	Qualitative ratio of effects	Importance
Strouhal number	$\mathrm{St} = \dfrac{\omega L}{U}$	$\dfrac{\text{Oscillation}}{\text{Mean speed}}$	Oscillating flow
Roughness ratio	$\dfrac{\epsilon}{L}$	$\dfrac{\text{Wall roughness}}{\text{Body length}}$	Turbulent, rough walls
Grashof number	$\mathrm{Gr} = \dfrac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\dfrac{\text{Buoyancy}}{\text{Viscosity}}$	Natural convection
Temperature ratio	$\dfrac{T_w}{T_0}$	$\dfrac{\text{Wall temperature}}{\text{Stream temperature}}$	Heat transfer
Pressure coefficient	$C_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	$\dfrac{\text{Static pressure}}{\text{Dynamic pressure}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Lift coefficient	$C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\dfrac{\text{Lift force}}{\text{Dynamic force}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Drag coefficient	$C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\dfrac{\text{Drag force}}{\text{Dynamic force}}$	Aerodynamics, hydrodynamics

Similitud entre modelo y prototipo

"Las condiciones de flujo para un modelo de prueba son similares si todos los parámetros adimensionales tienen los mismos valores entre modelo y prototipo"

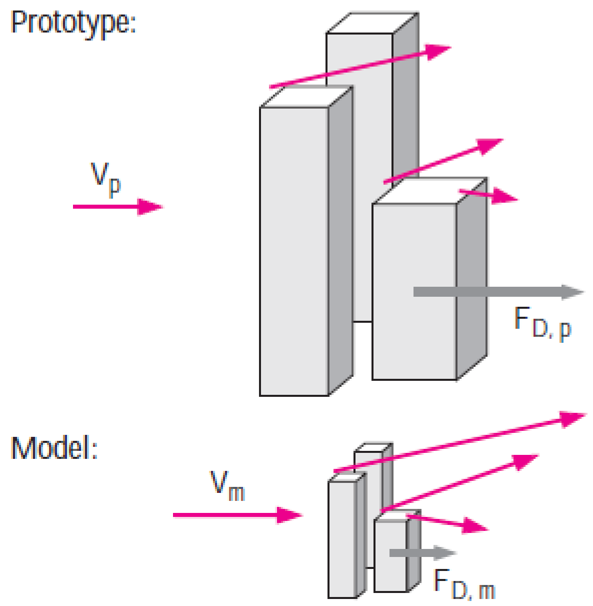
Semejanza geométrica



Un modelo es **geométricamente similar** a un prototipo si y solo **si todas las dimensiones del cuerpo** en las tres coordenadas espaciales forman las **mismas proporciones** respectivamente.

Todos los **ángulos y direcciones del flujo se mantienen** cuando **existe similitud geométrica**. La orientación del modelo respecto del medio debe ser idéntica a la del prototipo .

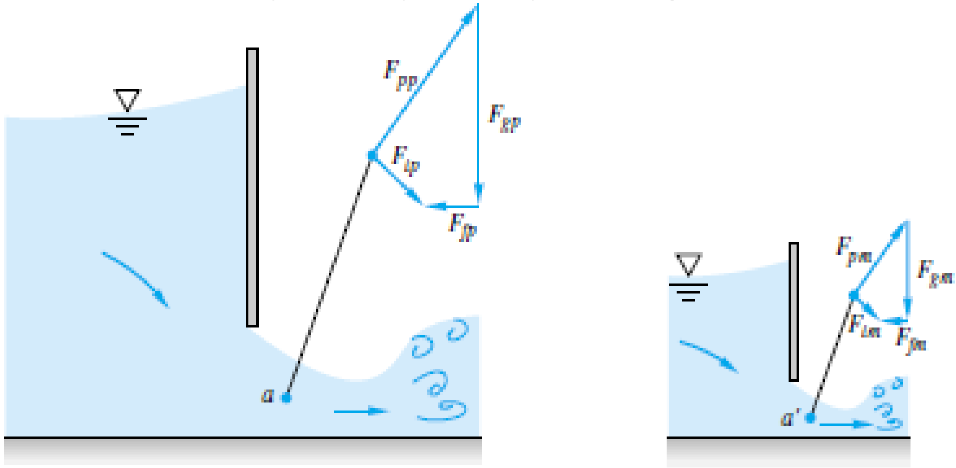
Semejanza Cinemática



El Flujo es cinematicamente similar (similitud Cinemática) si las velocidades en el prototipo son proporcionales (por una constante) y tienen la misma dirección que en el modelo. La similitud Geométrica es un pre requisito para lograr similitud cinemática.

Semejanza dinámica

El Flujo es dinámica similar (similitud dinámica) si las fuerzas en el prototipo son proporcionales (por una constante) y tienen la misma dirección que en el modelo. La similitud Cinemática es un pre requisito para lograr similitud dinámica.



(a) (b)

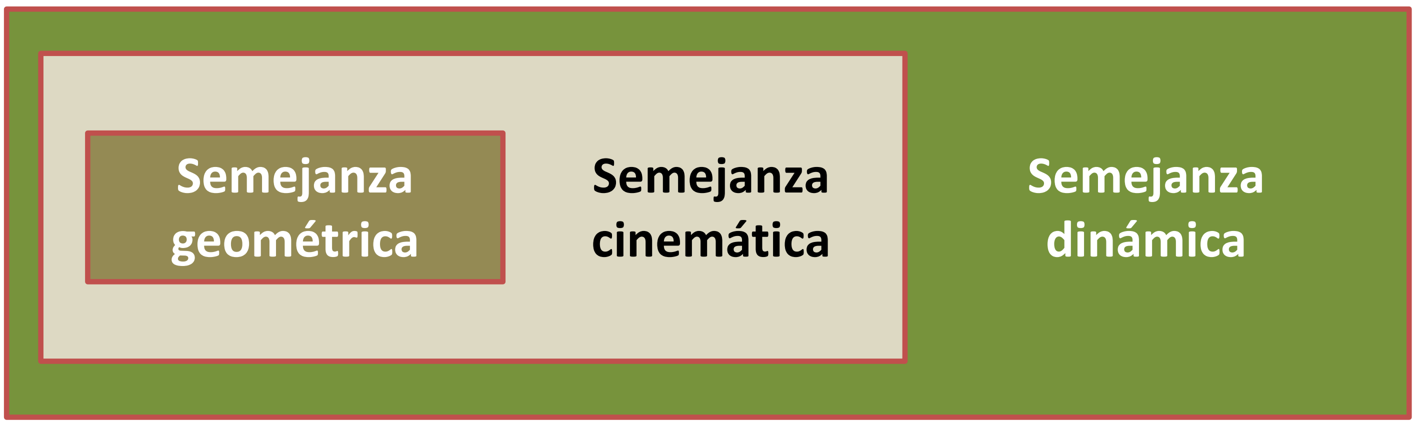
Flujo compresible: el número de Reynolds (Re), el número de Mach (M) y el cociente entre Cp y Cv (k) deben ser iguales entre modelo y prototipo.

Flujo incompresible:

a) Sin superficie libre: el número de Reynolds (Re) debe ser igual entre modelo y prototipo.
b) Con superficie libre: el número de Reynolds (Re), El número de Froude (Fr), y de ser necesario, los números de Weber (We) y de cavitación (Ca) deben ser iguales entre modelo y prototipo.

Similitud entre Modelo y Prototipo

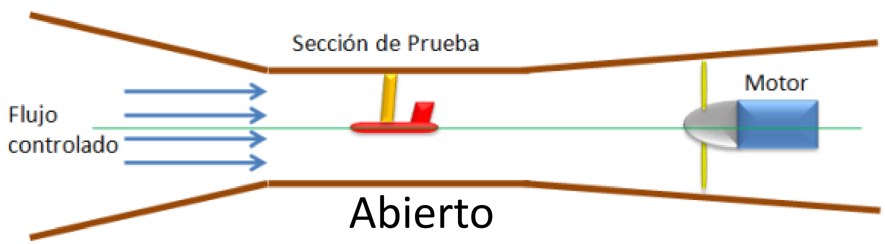
"En un campo de flujo la similitud completa se logra solo cuando existe similitud Geométrica, Cinemática y Dinámica"



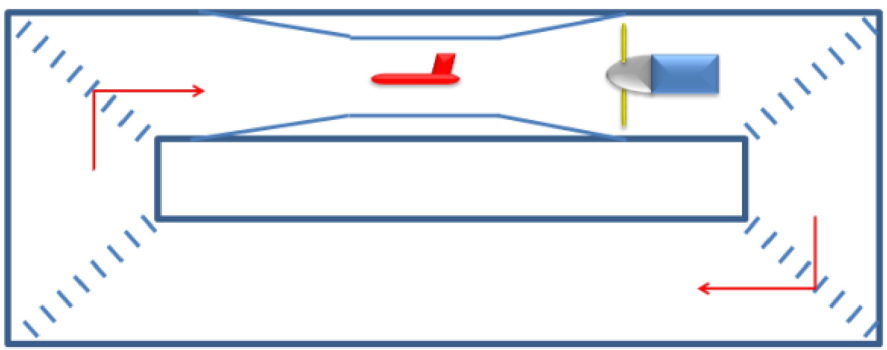
Túnel de ensayo

El túnel de ensayo es una herramienta ingenieril de investigación desarrollada para ayudar en el estudio de los efectos del movimiento de un fluido alrededor de objetos sólidos.

Clasificación según la circulación de fluido



Abierto

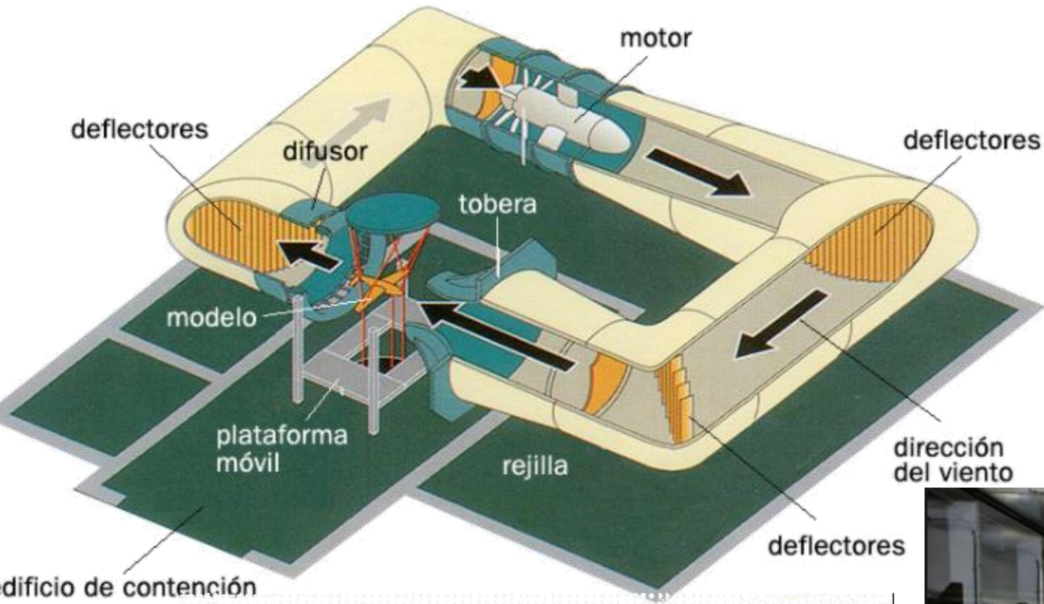


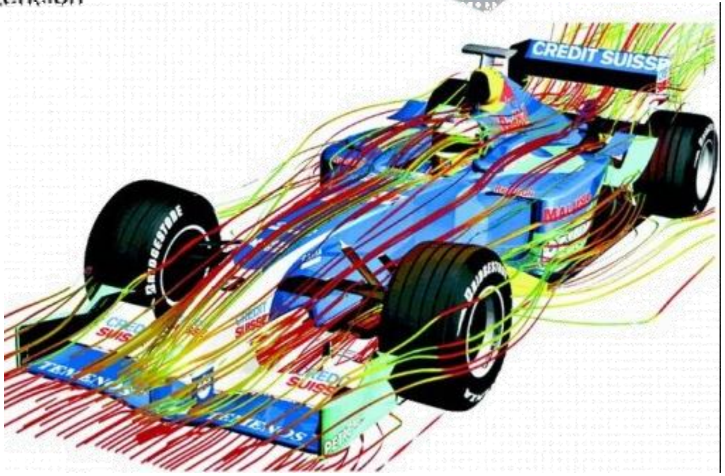
Cerrado

Clasificación según la velocidad

Régimen de Velocidad	Flujo Típico (Modelo)	Sección de Entrada	Radio de Compresión	Motor o sistemas de motor
Subsónico (M= 0 - 0.7)			1.0+	
Transónico (M= 0.7 - 1.2)			1.1	
Supersónico (M= 1.2 - 5)			2 (M = 2)	
Hipersónico (M > 5)			20 (M = 5)	

Similitud entre Modelo y Prototipo





Teorema π de Buckingham

Si un proceso físico satisface el PHD e involucra **n variables dimensionales**, se puede reducir a una relación de **k (Π's) variables adimensionales**. La reducción ***k = n-j***, equivale al número máximo de variables que no forman un Π entre ellas y es siempre menor o igual al número de variables dimensionales.

$$F = f(L, V, \rho, \mu)$$

n = 5 Variables

j ≤ 3 Variables dimensionales: M -L -T

$\Rightarrow$

K = n - j ≥ 2 Variables adimensionales

$$C_F = g(Re)$$

$$\Pi_1 = C_F \qquad \Pi_2 = Re$$

"Una vez encontrado el valor de ***k***, deben encontrarse las variables que no forman Π's. Cada Π será el producto de los ***n* parámetros repetitivos** elevadas a potencias a determinar más una variable adicional a la que se le asigna un exponente cero convenientemente. Por costumbre, **la primera Π (*k*) generada es la dependiente, el resto serán las independientes."**

Teorema π de Buckingham

Ejemplo de fuerza ejercida sobre un cuerpo inmerso en un fluido viscoso en movimiento.

Pasos a Seguir:

1) Plantear la función:

$$\boldsymbol{F = f(L, V, \rho, \mu)}$$

2) Definir el valor de parámetros del problema (variables dimensionales, adimensionales, constantes y variable dependiente), **n**:

$$\boldsymbol{n = 5}$$

3) Listar las dimensiones primarias, **j**, del problema:

F	L	U	ρ	μ
$M^1L^1T^{-2}$	$M^0L^1T^0$	$M^0L^1T^{-1}$	$M^1L^{-3}T^0$	$M^1L^{-1}T^{-1}$

$$\mathbf{j = 3}$$

Teorema π de Buckingham

4) Reducción. Encontrar el valor de k, que es el numero esperado de **Π's, k (Π's)** = n – j :

$$\mathbf{k\ (\Pi's)} = 5 - 3 = 2$$

5) **Seleccionar un numero k de parámetros repetitivos (n),** en este caso se seleccionan 2, por que k es 2:

1) Nunca elija parámetros repetitivos que sean variable dependiente. Podría aparecer en todas las **Π's.**
2) No elija parámetros repetitivos que ya sean adimensionales, es decir que formen ellos mismos un **Π's.**
3) Los parámetros repetitivos deben representar todas las dimensiones primarias del problema.
4) No elija parámetros repetitivos que tengan las mismas dimensiones.
5) Siempre que sea posible elija constantes dimensionales sobre las variables dimensionales.

F	L	U	ρ	μ
$M^1L^1T^{-2}$	$M^0L^1T^0$	$M^0L^1T^{-1}$	$M^1L^{-3}T^0$	$M^1L^{-1}T^{-1}$

La elección mas apropiada en este ejemplo es $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\mu}$

Teorema $\boldsymbol{\pi}$ de Buckingham

6) **Combinar en productos** los **parámetros repetitivos (n)** anteriores con un los **parámetros restantes** $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{V}, \rho, \mu, \boldsymbol{F})$**.** En este caso se selecciona:

$$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{L}, puede\ ser\ la\ variable\ dependiente\ \boldsymbol{F}$$

y **fuerce el producto a ser adimensional** igualando a un **producto de las dimensiones primarias (j), donde cada una se encuentra elevada a un exponente cero**.

En este caso **la primera Π será es siempre la Π dependiente y se forma con la variable dependiente $\boldsymbol{F}$**.
Las constantes **exponentes a, b y c son constantes que hay que determinar.**

Plantear los grupos Π igualándolos a un parámetro adimensional (producto de las dimensiones primarias elevadas a una potencia 0):

$\boldsymbol{\rho}$ para $\boldsymbol{\Pi_1}$ para la $\Pi_1$dependiente , $\boldsymbol{\mu}$ para $\boldsymbol{\Pi_2}$ independiente

$$\Pi_1 = L^a V^b \boldsymbol{\rho}^c F = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = L^a V^b \rho^c \boldsymbol{\mu} = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

Teorema $\boldsymbol{\pi}$ de Buckingham

$$\Pi_1 = L^a V^b \boldsymbol{\rho}^c F = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = L^a V^b \rho^c \boldsymbol{\mu} = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

8) Armar los sistemas de ecuaciones para cada grupo Π:

Π_1:

$$\begin{aligned} L&: a + b - 3c + 1 = 0 \\ T&: -b - 2 = 0 \\ M&: c + 1 = 0 \end{aligned}$$

Π_2:

$$\begin{aligned} L&: a + b - 3c - 1 = 0 \\ T&: -b - 1 = 0 \\ M&: c + 1 = 0 \end{aligned}$$

9) Resolver los sistemas:

$$a = -2;\ b = -2;\ c = -1 \qquad a = -1;\ b = -1;\ c = -1$$

10) Obtener los grupos Π dependiente e independientes:

$$\Pi_1 = L^a V^b \boldsymbol{\rho}^c F \qquad \Pi_2 = L^a V^b \rho^c \boldsymbol{\mu}$$

$$\Pi_1 = \frac{F}{L^2 V^2 \rho} = C_F \qquad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L} = \frac{1}{Re} \longrightarrow \Pi_{2\,modificada} = Re$$

$$\boxed{C_{F} = F\ (Re)}$$