- FUNCIÓN INVERSA
- CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES: Inyectiva-Sobreyectiva-Biyectiva
- COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

FUNCIÓN INVERSA

$f: R \rightarrow R / f(x) = 2x+1$

$Df = R$

$If = R$

x	y
0	1
1	2
-2	-3
3	7
?	-5

$x \rightarrow y$

$x \leftarrow -5$

Dado cualquier valor real a x obtenemos el correspondiente valor de y

Cuando estamos trabajando con funciones, interesa encontrar:

a) El valor de y dado el valor de x $\quad x \rightarrow y$ IMAGEN DE X A TRAVÉS DE LA FUNCIÓN

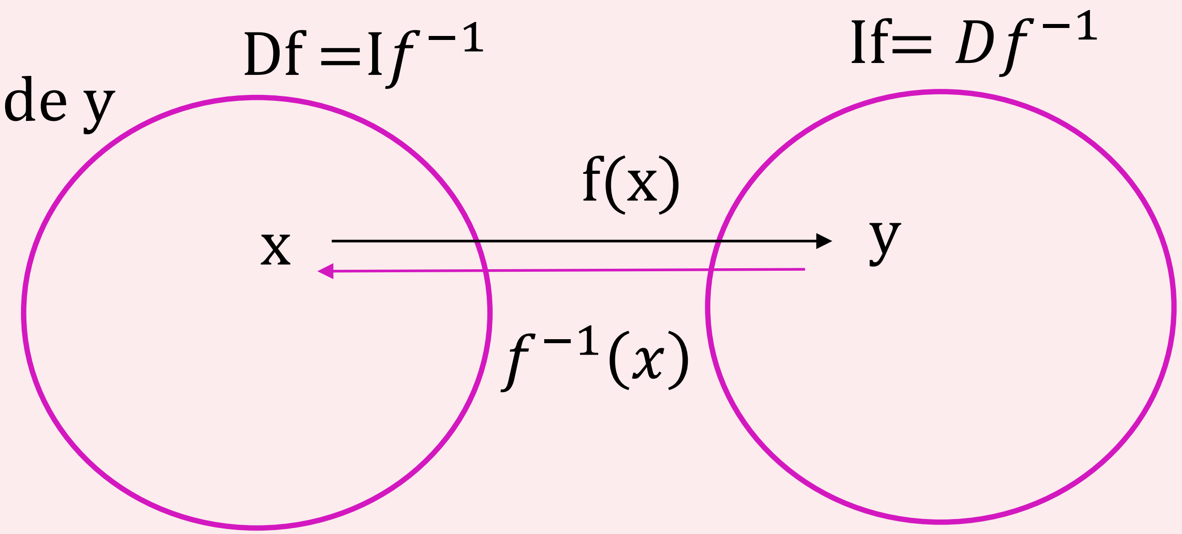
b) El valor de x dado el valor de y $\quad x \leftarrow y$ PREIMAGEN DE Y A TRAVÉS DE LA FUNCIÓN

En nuestro ejemplo concreto si $y = -5$ ¿cuál es el valor de x ?

$f(x) = 2x+1 \qquad f(x) = y$

$$-5 = 2x+1 \longrightarrow -5 - 1 = 2x \longrightarrow \frac{-6}{2} = x \longrightarrow \boxed{-3 = x}$$

Buscamos la fórmula para **cualquier** valor de y



<u>Obtenemos la relación inversa de f</u>

y=f (x)= 2x+1

a) Despejamos la variable x

y−1= 2x

$\frac{y-1}{2}$= x

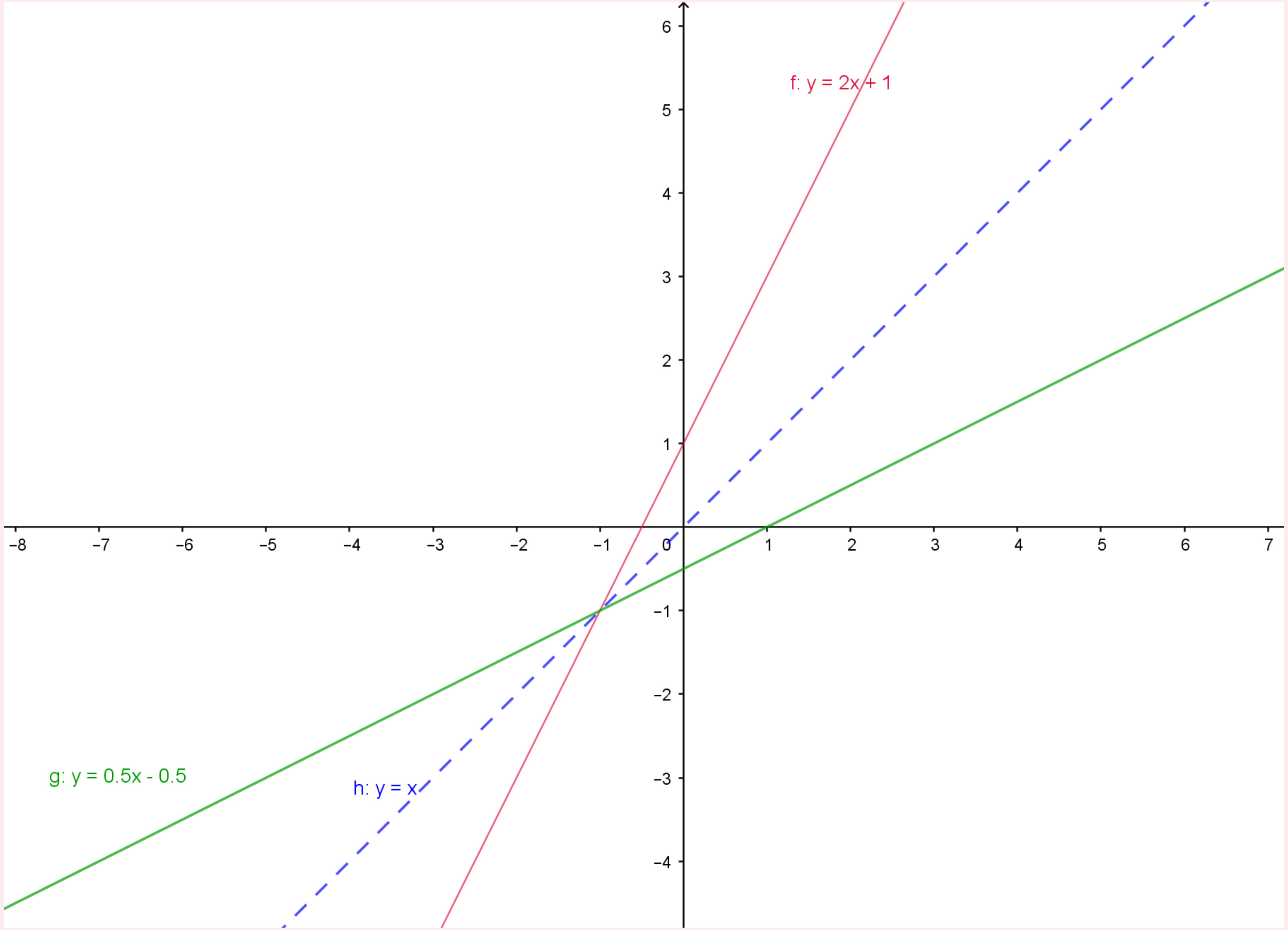
$\boxed{\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}= x}$

b) Hacemos un cambio de variables para poder dibujar la función y su relación/función inversa en un mismo sistema de ejes cartesianos.

$\boxed{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}= y= f^{-1}(x)}$

Obtenemos una nueva relación entre x e y.

¿Es función? SI



SI DOS FUNCIONES SON INVERSAS ENTRE SI, SUS GRAFICAS SON SIMÉTRICAS CON RESPECTO A LA RECTA y=x

Sea la función y= $x^2 + 1$ Df= R   If= [1,+∞)

<u>Obtenemos la relación inversa de f</u>

a) Despejamos la variable x

$$y-1 = x^2$$

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{y-1} = |x|$$

$$\sqrt{y-1} = x$$

$$-\sqrt{y-1} = x$$

b) Hacemos un cambio de variables.

$$\pm\sqrt{x-1} = y$$

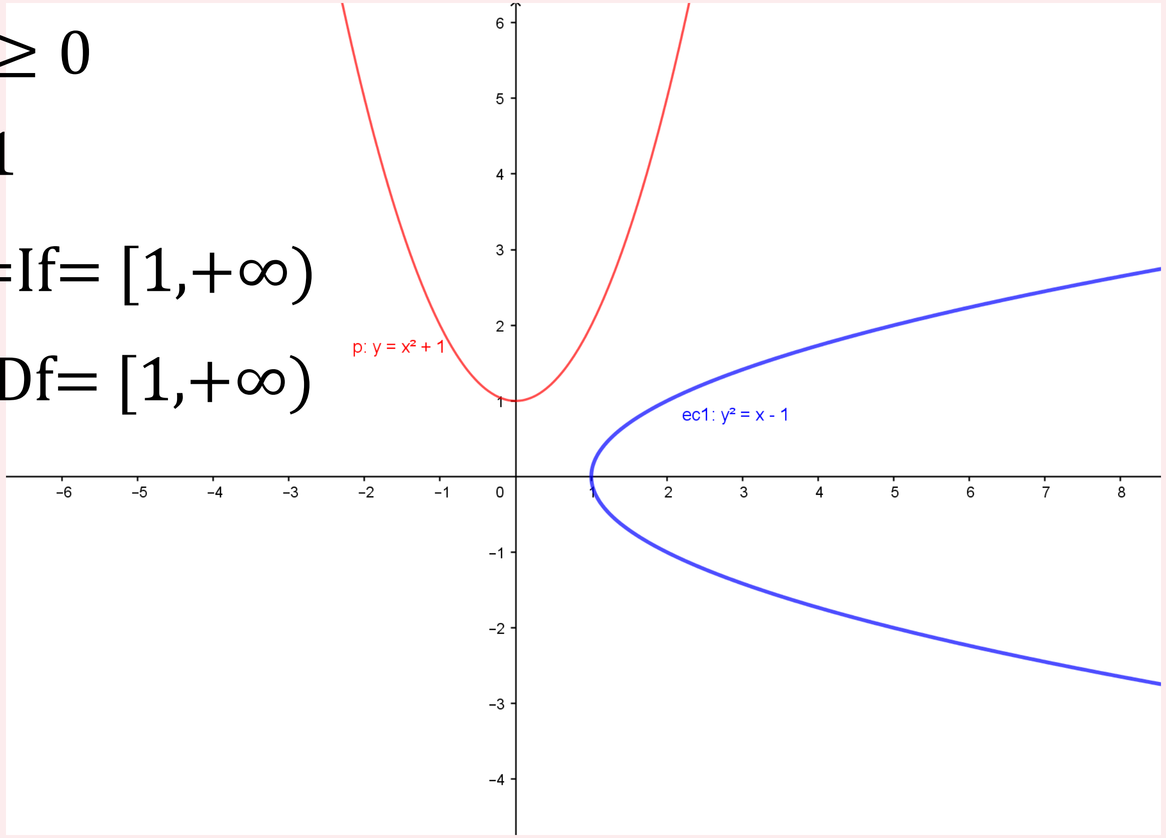
Obtenemos una nueva relación entre x e y. ¿Es función? NO

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

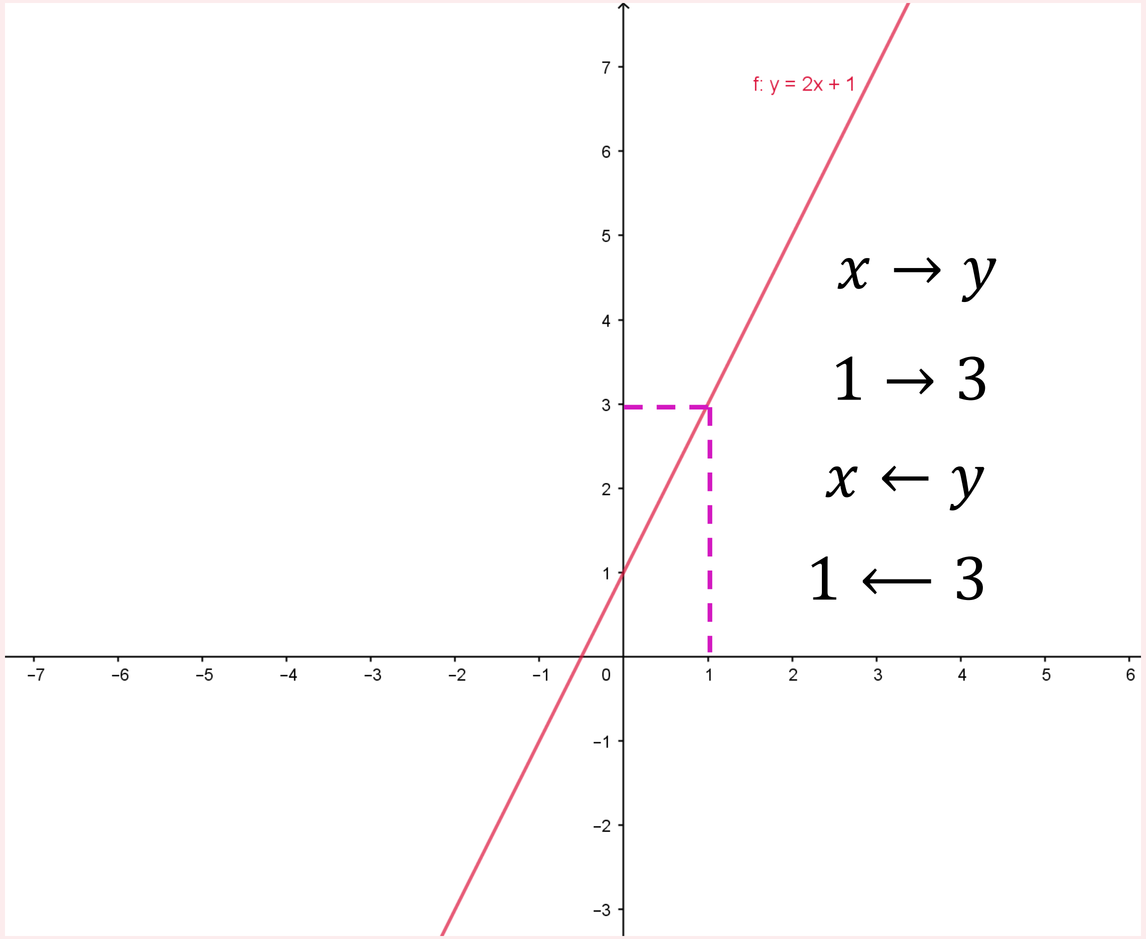
$$DR^{-1} = \text{If} = [1,+\infty)$$

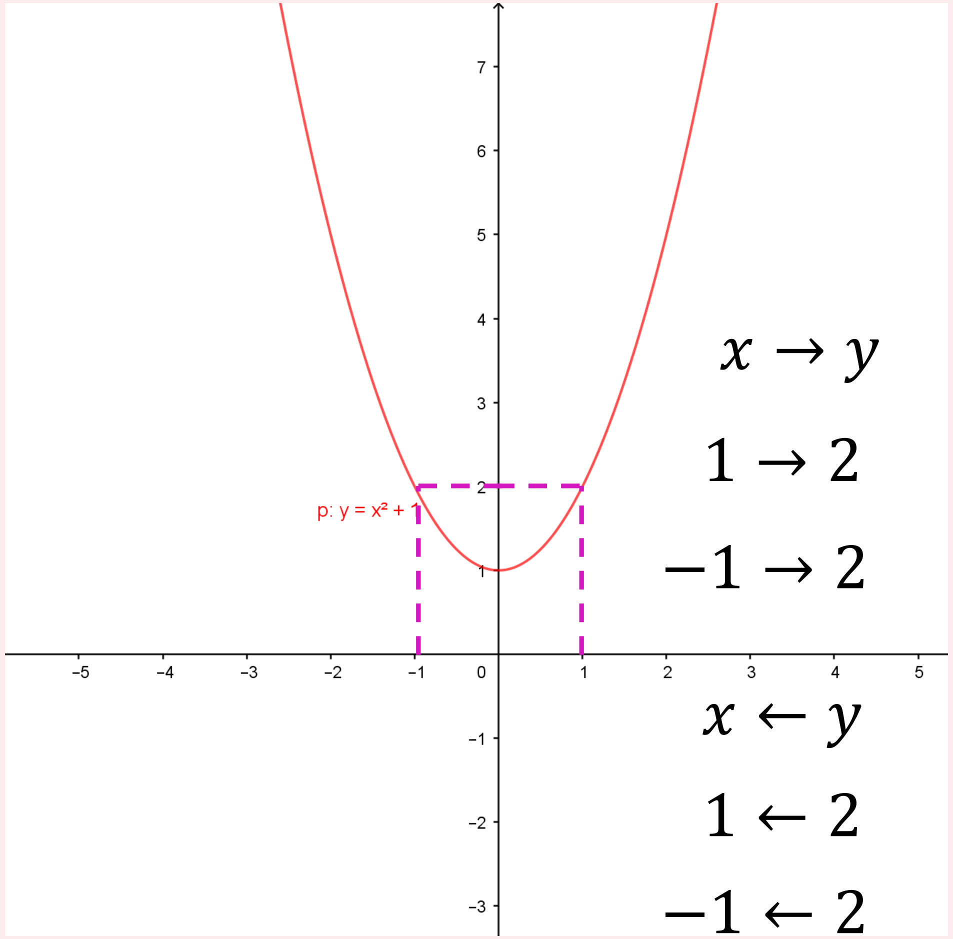
$$IR^{-1} = \text{Df} = [1,+\infty)$$



Para que f sea inversible o sea que su relación inversa sea función

¿ qué condiciones se tienen que dar en la función dada?





Necesitamos que dos x distintos se correspondan con dos y distintos

CLASIFICACION DE FUNCIONES

FUNCIÓN INYECTIVA

$$\boldsymbol{f: A \rightarrow B \; es \; inyectiva \Leftrightarrow \forall x_1 \in A, \forall \; x_2 \in A: x_1 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

FUNCIÓN SOBREYECTIVA

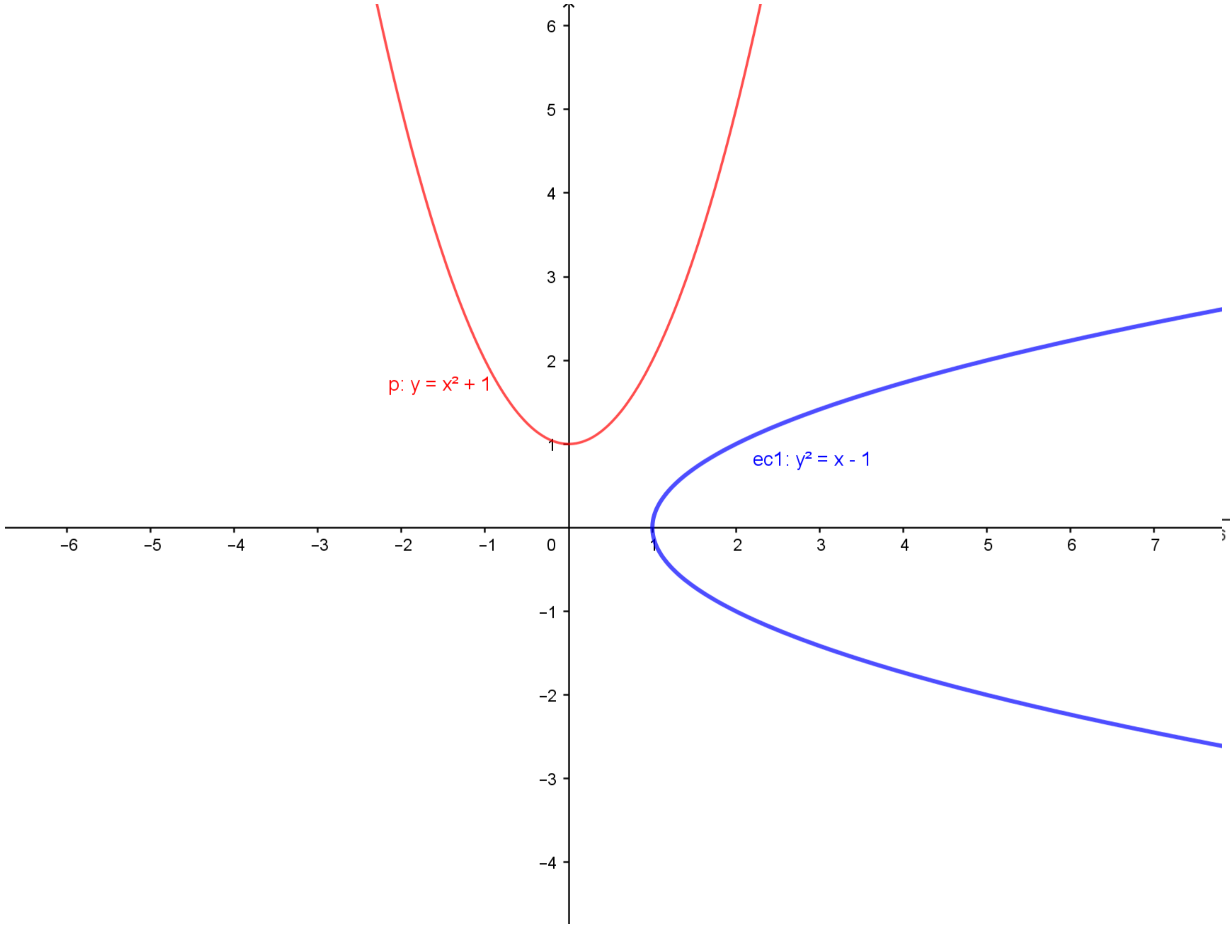
$\boldsymbol{f:A \rightarrow B \; es \; sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B \,, \exists x \in A \,/\, (x, y) \in f$ If = B

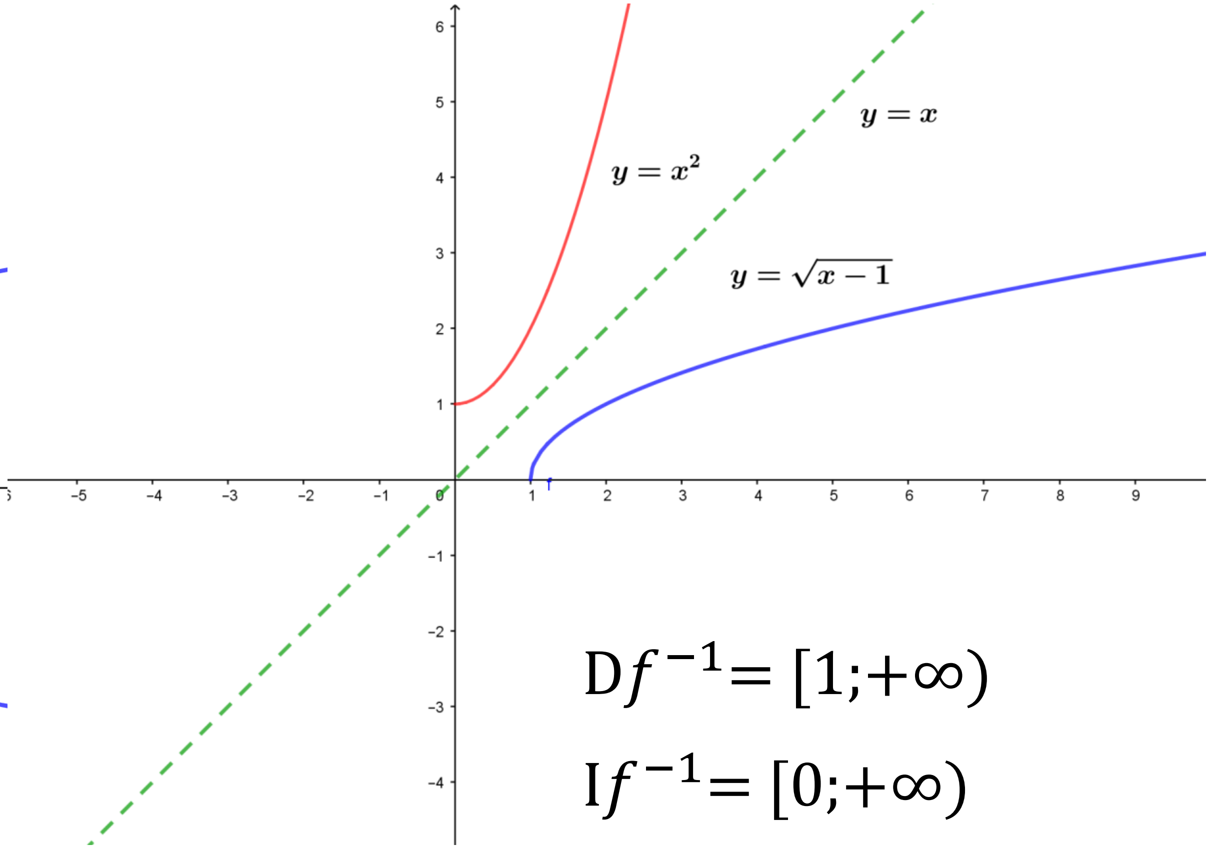
FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

$$Df = [0;+\infty)$$

$$If = [1,+\infty)$$





$$Df^{-1} = [1;+\infty)$$

$$If^{-1} = [0;+\infty)$$

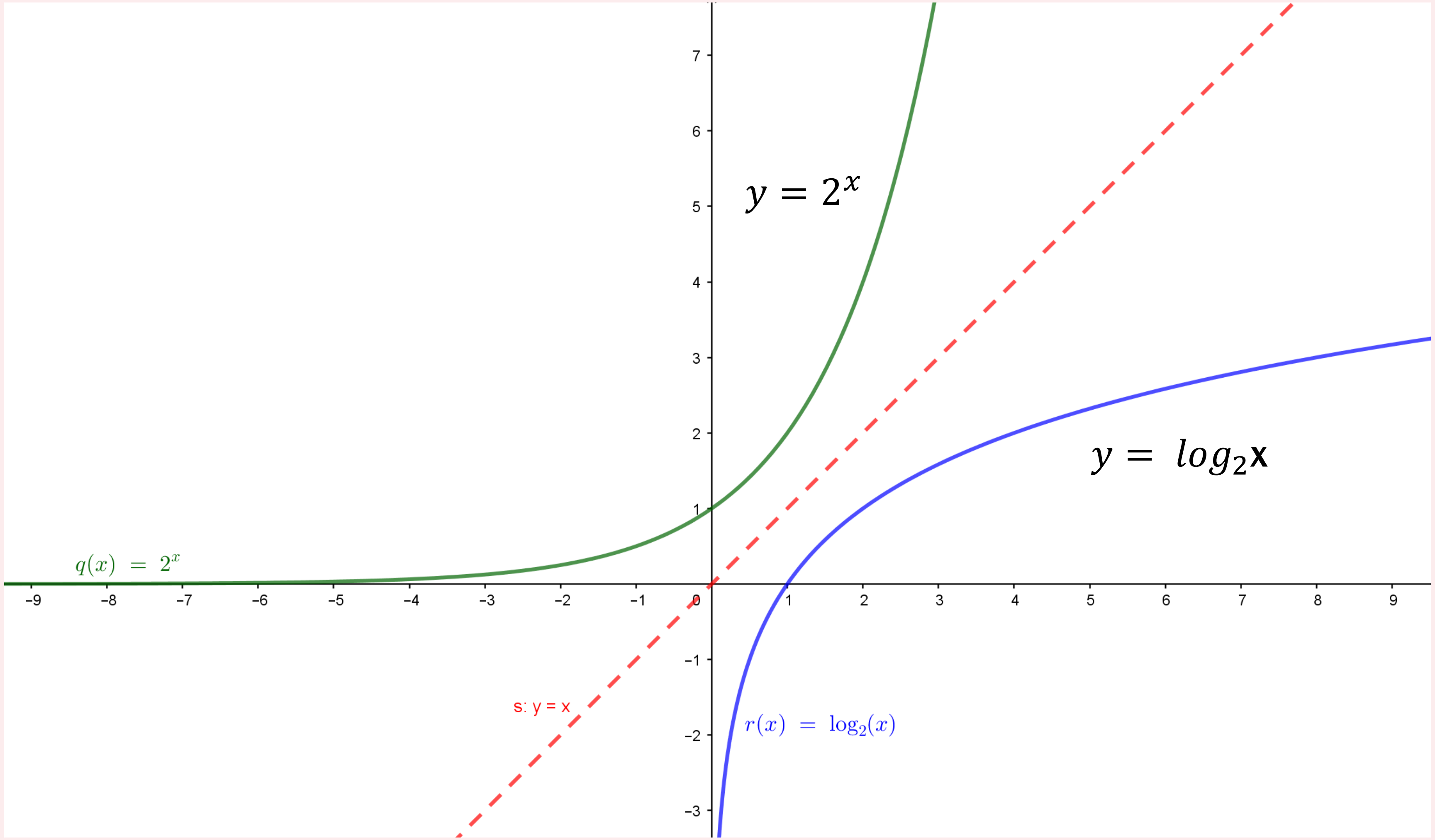
Se desprende una propiedad útil

a) Si f es una función biyectiva y g su relación inversa ENTONCES g es función y también es biyectiva

La lectura recíproca

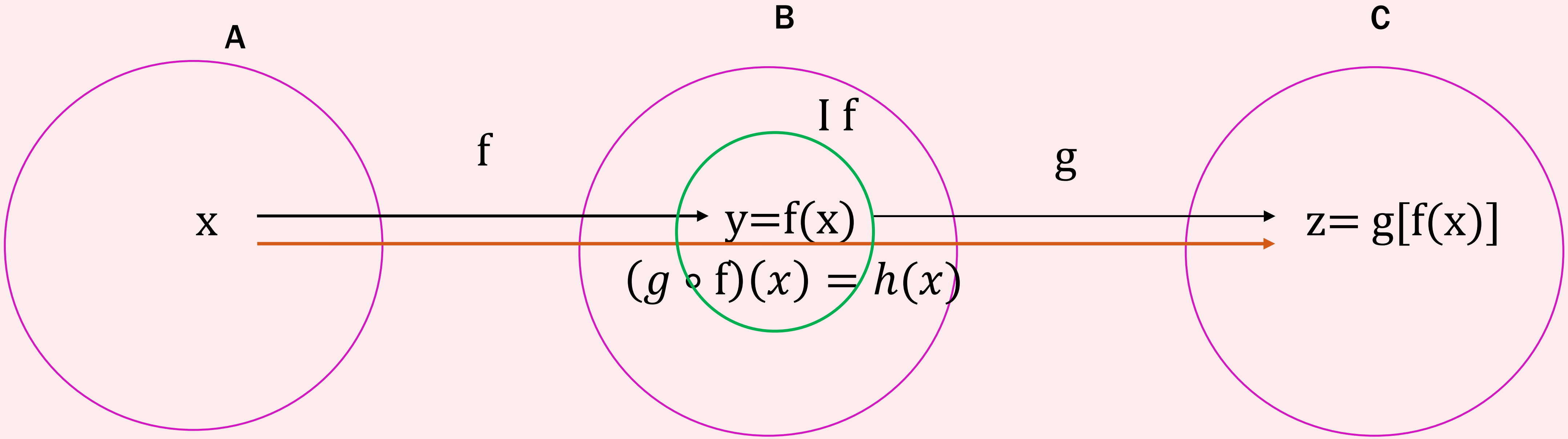
b) Si la relación inversa de una función es función ENTONCES f es función biyectiva

*Si queremos por ejemplo determinar **si una función es biyectiva**, podemos hallar la relación inversa y preguntamos ¿si es función? Comprobando que se cumple la condición de existencia y unicidad.*



$y = 2^x$
$y = log_2\mathbf{x}$
$q(x) = 2^x$
s: y = x
$r(x) = \log_2(x)$

Composición de funciones



¿Siempre será posible realizar la composición?

a) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = h(x)$

CONDICIÓN

$\boxed{\text{a) If} \subseteq Dg}$ $\boxed{\text{Dh}= \text{Df}}$

b) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = h(x)$

$\boxed{\text{b)Ig} \subseteq Df}$ $\boxed{\text{Dh}= \text{Dg}}$

EJEMPLO

$f(x) = \sqrt{2-x}$ $\quad$ $g(x) = x+3$

a) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = h(x)$

DOMINIO

$2 - x \geq 0$

$2 \geq x$

$Df = (-\infty; 2]$

$Dg = R$

IMAGEN

$If = [0; +\infty)$

$Ig = R$

CONDICIÓN

a) $I f \subseteq Dg$

$[0; +\infty) \subset R$

a) $(g \circ f)(x) = g\left[\sqrt{2-x}\right] = \sqrt{2-x}+3 = h(x)$

$Dh = Df = (-\infty; 2]$

$Ih = [3;+\infty)$

b) $(f \circ g)(x) = \mathrm{f}\,[\mathrm{g(x)}] = \mathrm{h(x)}$

$\mathrm{Df} = (-\infty; 2]$ $\quad$ $\mathrm{If} = [0; +\infty)$

$\mathrm{Dg} = \mathrm{R}$ $\quad$ $\mathrm{Ig} = \mathrm{R}$

<u>CONDICIÓN</u>

b) $\mathrm{Ig} \subseteq Df$

$$\mathrm{R} \not\subseteq (-\infty; 2]$$

Como en este caso **NO** se cumple, la composición **NO** se puede realizar

Ahora bien se podría redefinir la función g de modo que Ig⊆Df .

Pero la función g ya no sería la misma ya que al cambiar su imagen también cambiará su dominio.

Decimos que restringimos a la función g, por lo tanto definimos una nueva función que llamaremos g* ya que tiene otro dominio distinto al dominio de la función g.

Ahora bien se podría redefinir la función g de modo que Ig⊆Df .

Le vamos a pedir a g que su conjunto imagen **coincida** con el dominio de la funcion f

$$Ig = Df$$

$$Ig = (-\infty; 2]$$

$y \in (-\infty; 2] \Rightarrow$ $y \leq 2 \Rightarrow$ $x+3 \leq 2 \Rightarrow x \leq 2-3 \Rightarrow$ $x \leq -1$ $\boxed{Dg^* = (-\infty; -1]}$

$Dg^* = Dh = (-\infty; -1]$