Unidad 2: Cinemática de los Fluidos

Ing. Nahuel Castello

Mecánica de los fluidos - Departamento de Ingenieria Industrial
Universidad Tecnológica Nacional FRH

2018

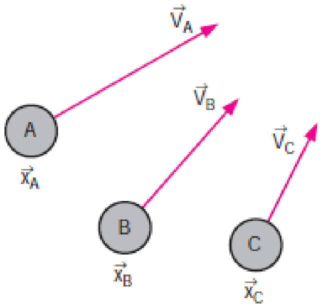
Contenido de La Unidad

- **Sistemas de referencia de Euler y Lagrange**
- **Línea de Corriente, Trayectoria y Flujo**
- **Definición de velocidad, Potencial de velocidad y Flujo permanente**
- **Definición de Campo de Aceleración**
- **Definición de Caudal másico**
- **Concepto de Circulación y Teorema de Stokes**
- **Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino**

Sistemas de referencia de Euler y Lagrange

- El tema llamado cinemática se refiere al estudio del movimiento.
- En Mecánica de los fluidos la cinemática de fluidos es el estudio de cómo fluyen los fluidos y cómo describir el movimiento del fluido.
- Desde un punto de vista fundamental, hay dos formas de describir el movimiento.

1- Lagrangiana: Es el método más familiar, es el que aprendiste en la clase de física de la escuela secundaria para seguir el camino del individuo u objetos. Por ejemplo, todos hemos visto experimentos de física en los que una pelota en una mesa de billar o un disco en una mesa de hockey de aire colisiona con otra bola o disco o con la pared. Las leyes de Newton se utilizan para describir el movimiento de tales objetos, y podemos predecir con precisión dónde van y cómo el impulso y la energía cinética se intercambian de un objeto a otro.
La cinemática de tales experimentos implica hacer un seguimiento de la posición vector de cada objeto, como funciones del tiempo. Cuando este método se aplica a un fluido que fluye, lo llamamos la descripción de Lagrangiana.

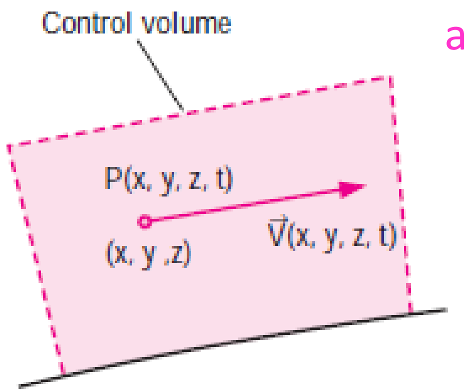


Sistemas de referencia de Euler y Lagrange

2- Euleriano: Un método más común para describir el flujo de fluidos es el euleriano. Descripción del movimiento del fluido, llamado así por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

En la descripción euleriana del flujo de fluidos, un volumen finito llamado *dominio de flujo* o *volumen de control* , a través del cual fluye fluido dentro y fuera.

No necesitamos hacer un seguimiento de la posición y la velocidad de una masa de partículas fluidas de identidad fija. En cambio, definimos variables de campo, funciones de espacio y tiempo, dentro del volumen de control.



Campos escalar de presión, campo vectorial de velocidad y aceleración. Todos depende de la posición y del tiempo (x,y,z,t)

$$P = P(x, y, z, t) \qquad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \qquad \vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$$

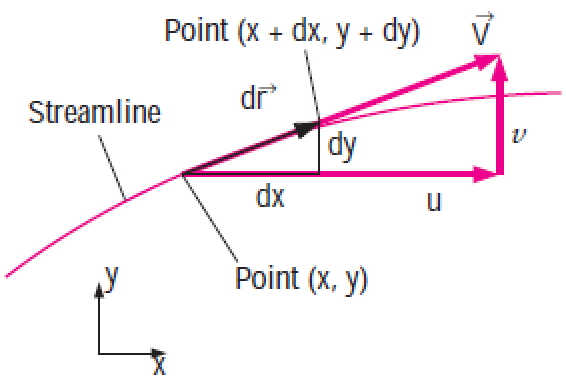
Línea de Corriente, Trayectoria y Flujo

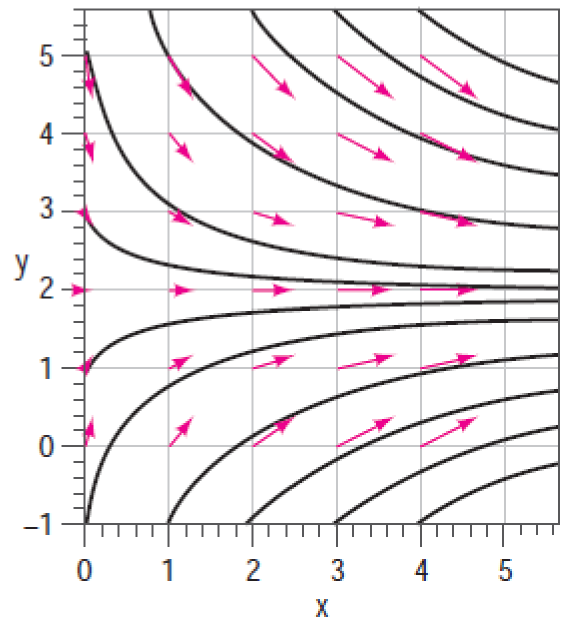
Línea de corriente (Streamline): Es la línea en la que todo momento el vector velocidad es paralela a ella.

Definición matemática para tres dimensiones: $\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{\upsilon} = \frac{dz}{w}$

Línea de corriente en dos dimensiones (x,y):

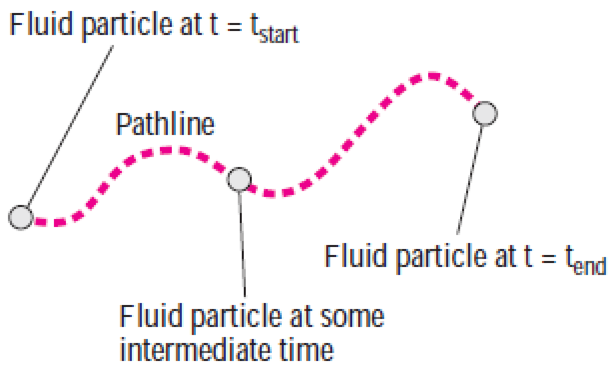
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{along a streamline}} = \frac{\upsilon}{u}$$



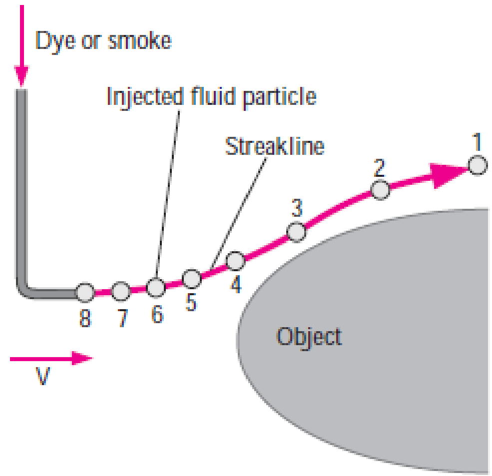


Línea de Corriente, Trayectoria y Flujo

Línea de Trayectoria (Pathline): Es la línea que sigue una misma partícula en todo momento.



Línea de Flujo (Streakline): Es la línea formada por un conjunto de partículas que paso por un mismo punto en momento dado.



Línea de Corriente, Trayectoria y Flujo

"En estado estacionario, las líneas de corriente, trayectoria y flujo son exactamente la misma línea"

"Físicamente la línea de flujo es el comportamiento de la línea de corriente un instante de tiempo anterior"

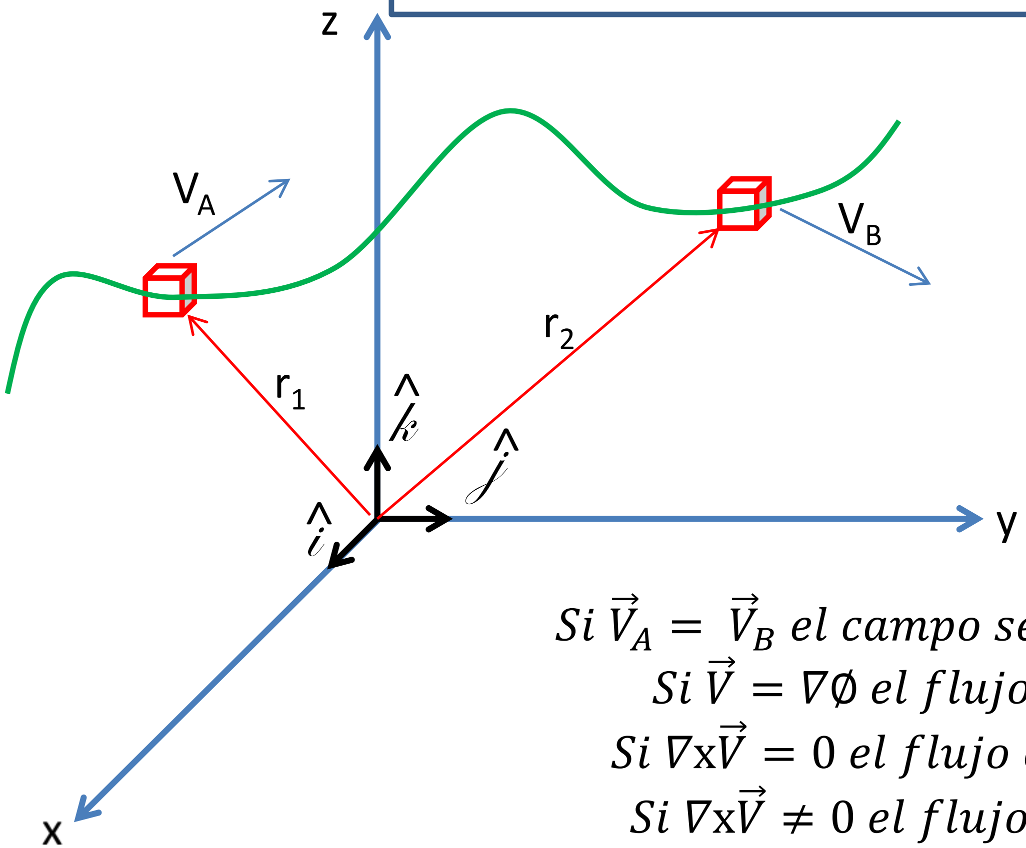
"Físicamente la línea de trayectoria es el comportamiento de la línea de corriente un instante de tiempo posterior"

Línea de Corriente, Trayectoria y Flujo

Campo de Velocidad y Potencial de Velocidad

El campo de velocidad en un flujo tridimensional depende de 4 variables, las tres coordenadas espaciales y el tiempo (x,y,z,t)

$$\boxed{\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}u(x, y, z, t) + \mathbf{j}v(x, y, z, t) + \mathbf{k}w(x, y, z, t)}$$



u: *componente de* $\vec{V}$ *en* x
v: *componente de* $\vec{V}$ *en* y
w: *componente de* $\vec{V}$ *en* z

$$Si\ \vec{V}_A = \vec{V}_B\ el\ campo\ se\ llama\ conforme$$
$$Si\ \vec{V} = \nabla\emptyset\ el\ flujo\ es\ potencial$$
$$Si\ \nabla \mathrm{x} \vec{V} = 0\ el\ flujo\ es\ irrotacional$$
$$Si\ \nabla \mathrm{x} \vec{V} \neq 0\ el\ flujo\ es\ rotacional$$

Los flujos potenciales son irrotacionales

Campo de Aceleración

El campo de aceleración en un flujo tridimensional depende de 4 variables, las tres coordenadas espaciales y el tiempo (x,y,z,t). Y se define como la derivada en el tiempo del campo de velocidad.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{i}\frac{du}{dt} + \mathbf{j}\frac{dv}{dt} + \mathbf{k}\frac{dw}{dt}$$

Al depender cada componente de la velocidad de 4 variables, se aplica la regla de la cadena. Por ejemplo para la componente de la velocidad en x tenemos:

$$\frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Llevado esto al resto de las componentes de la velocidad, tenemos las tres componentes del campo de aceleración:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)u$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)w$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{\left(u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right)}_{\text{Convective}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}}$$

Campo de Velocidad y Campo de Aceleración

Ejemplo: $\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 1.2x)\vec{i} + (-2.0 - 1.2y)\vec{j}$

Grafico del campo de velocidad

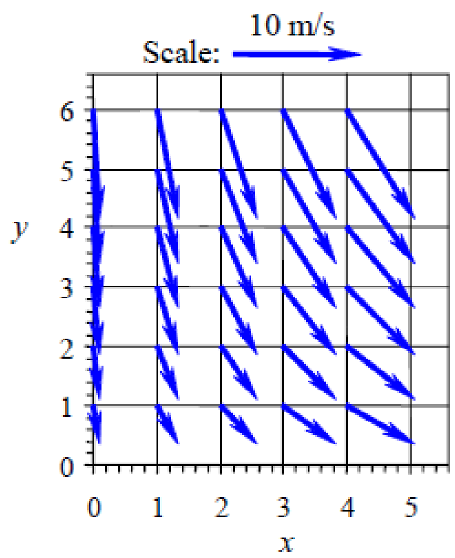
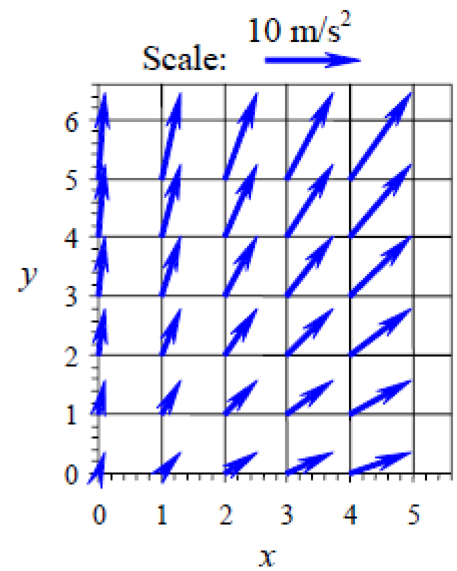
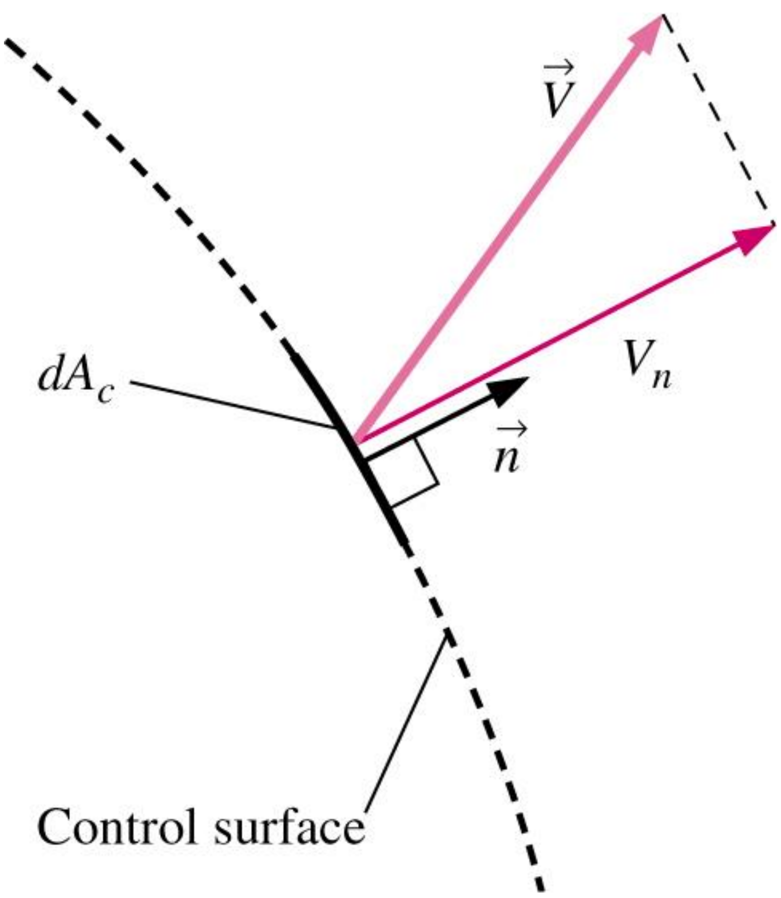


Grafico del campo de aceleración



Caudal Másico



- La cantidad de masa de fluido que fluye por una determinada superficie por unidad de tiempo se conoce como Caudal Másico, y se nombra como $\dot{m}$
- El punto sobre la m se utiliza para indicar que corresponde a la masa por unidad de tiempo.
- El caudal másico a través de un área es obtenido mediante la siguiente integración:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta m = \int_{A_c} \rho V_n dA_c$$

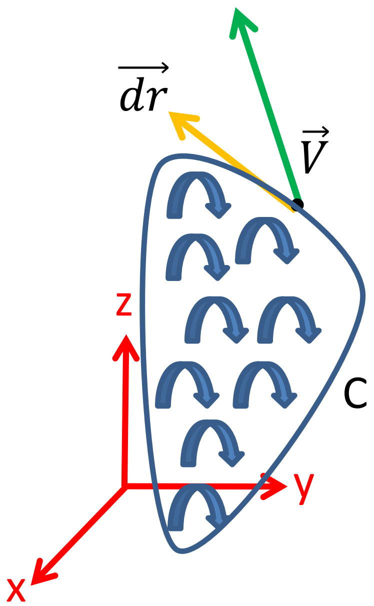
$$\dot{m}$$

- Aunque esta expresión es exacta, no siempre es conveniente para análisis de Ingenieria.

Concepto de Circulación

Sea $\vec{V}(x, y, z, t) = u\,\check{\imath} + v\,\check{\jmath} + w\,\check{k}$ el campo de velocidades

Sea $d\vec{r} = dx\,\check{\imath} + dy\,\check{\jmath} + dz\,\check{k}$ el vector tangente a la curva C en cada punto de la misma



Se define como **Circulación del Campo $\vec{V}$** a lo largo de la curva C como:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint \nabla\, x\, \vec{V}\; \hat{n}\, ds$$

Teorema de Stokes

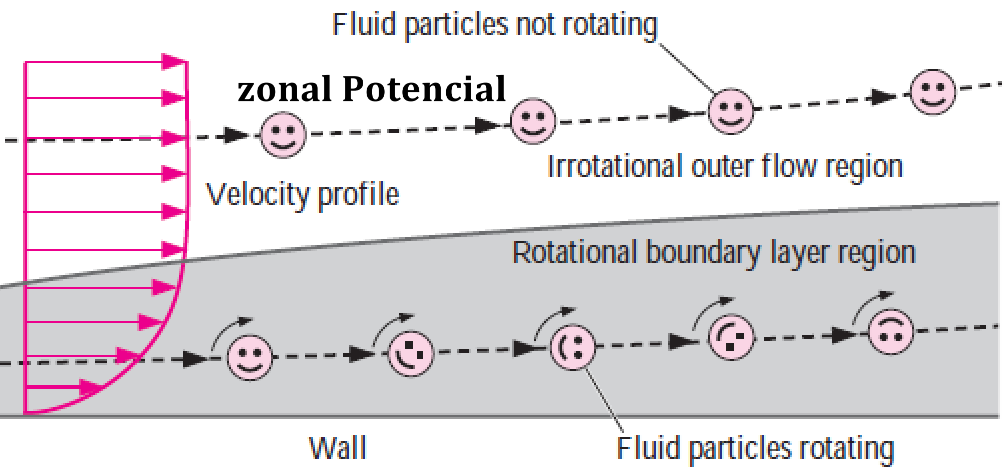
El flujo del rotacional a través de un área es igual a la circulación de la velocidad a lo largo de la curva cerrada que envuelve al área donde se considera el flujo del rotacional.

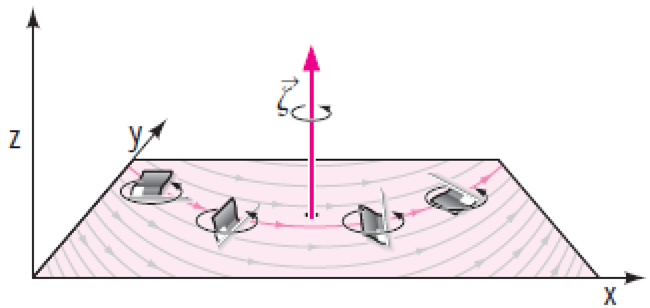
$$\nabla\, x\, \vec{V} = \bar{\zeta} \rightarrow Curl\,(\vec{V}) = \bar{\zeta}$$

Vorticidad

El rotor del campo de velocidad es la vorticidad del campo de velocidades

Flujo Rotacional e Irrotacional





Sea $\vec{V}(x,y,z,t) = u\,\check{\imath} + v\,\check{\jmath} + w\,\check{k}$

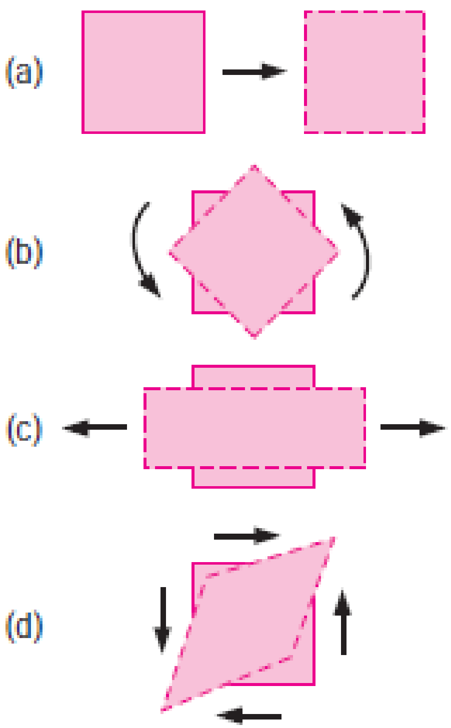
Vector Vorticidad:

$$\bar{\zeta} = \nabla x\, \vec{V}$$

$$\bar{\zeta} = \nabla x\, \vec{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

$$\bar{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino



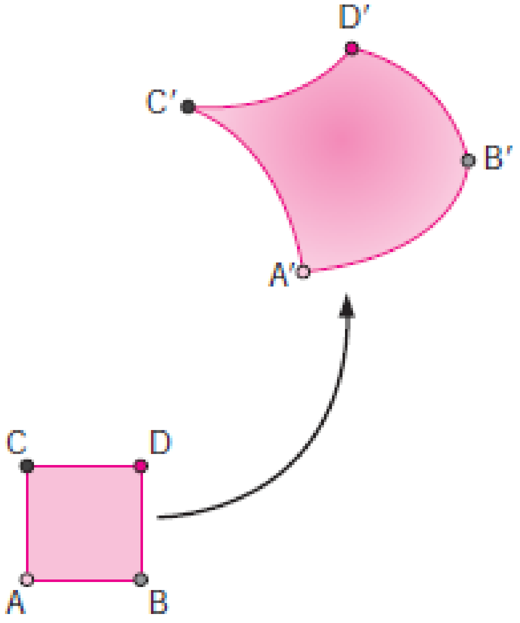
Un Fluido puede:

a) Trasladarse

b) Rotar

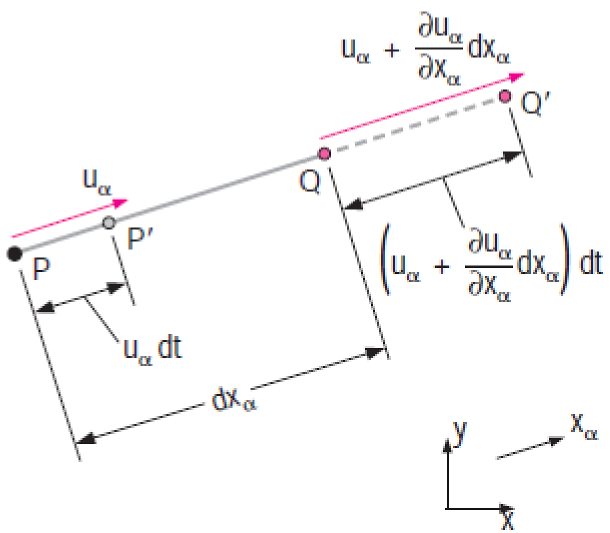
c) Deformarse linealmente (comprimirse o expandirse)

d) Distorsionarse



Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino

Tasa de Deformación Lineal:



$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ}\right)$$

$$\cong \frac{d}{dt}\left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha\right) dt + dx_\alpha - u_\alpha\, dt}^{\text{Length of } P'Q' \text{ in the } x_\alpha\text{-direction}} \quad - \overbrace{dx_\alpha}^{\text{Length of } PQ \text{ in the } x_\alpha\text{-direction}}}{\underbrace{dx_\alpha}_{\text{Length of } PQ \text{ in the } x_\alpha\text{-direction}}}\right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

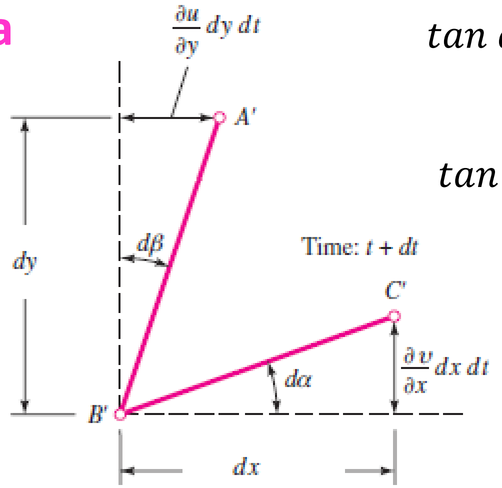
Tasa de Deformación Volumétrica

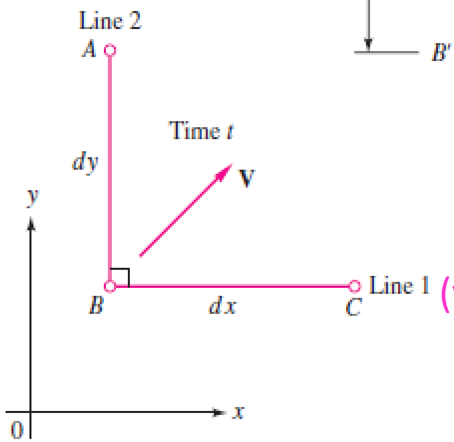
$$\boxed{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \nabla \cdot \bar{V}}$$

La divergencia del campo de velocidades representa la Tasa de Deformación Volumétrica. Y denota si el flujo es incompresible ($\nabla \cdot \bar{V} = 0$), o compresible ($\nabla \cdot \bar{V} \neq 0$)

Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino

Distorsión y Tasa de Deformación por corte:





$$\tan d\alpha = \frac{\partial v/\partial x\; dx\; dt}{dx} \longrightarrow d\alpha = \frac{(\partial v/\partial x)\, dx\, dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$\tan d\beta = \frac{\partial u/\partial y\; dy\; dt}{dy} \longrightarrow d\beta = \frac{(\partial u/\partial y)\, dy\, dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right) \longrightarrow$$

"La velocidad angular de la partícula se mide como el promedio de la variación de los ángulos en sentido anti horario"

Vector Torbellino en (x,y) (velocidad angular de la partícula)

$$\boxed{\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

Tasa de Deformación por Corte en (x,y)

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

Vector Torbellino en (x,y,z)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \longrightarrow$$

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla x\, \vec{V}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix}}$$

Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino

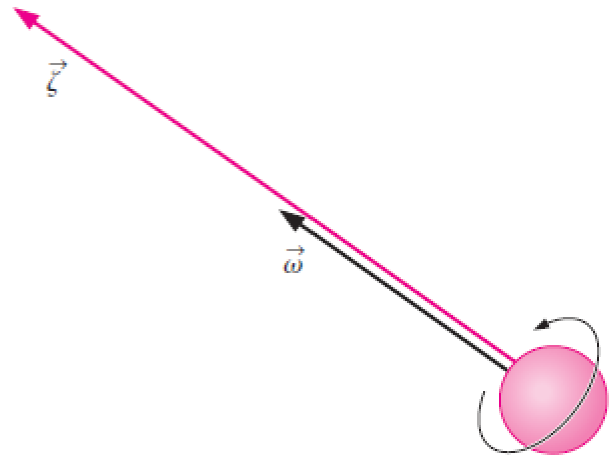
$$Sea\ \vec{V}(x,y,z,t) = u\,\check{i} + v\,\check{j} + w\,\check{k}$$

Vector Torbellino:

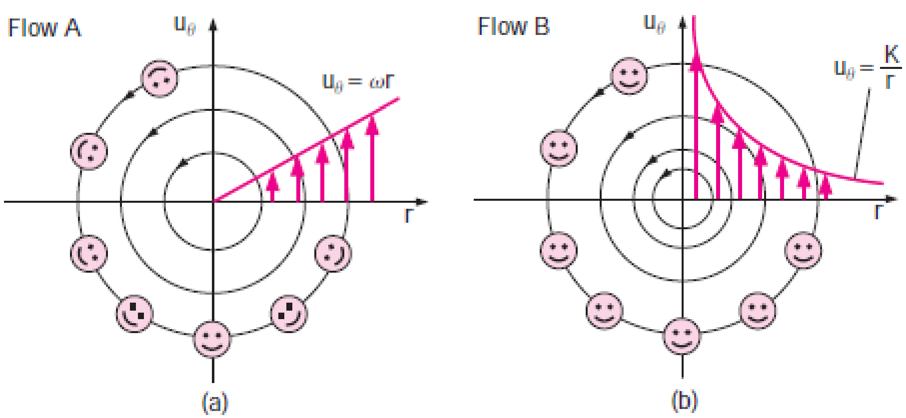
$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\,\bar{\zeta}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla x\,\vec{V}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$



El Flujo A es una rotación como solido rigido.
El Flujo B es un vórtice lineal y es irrotacional en todos los puntos excepto el origen.

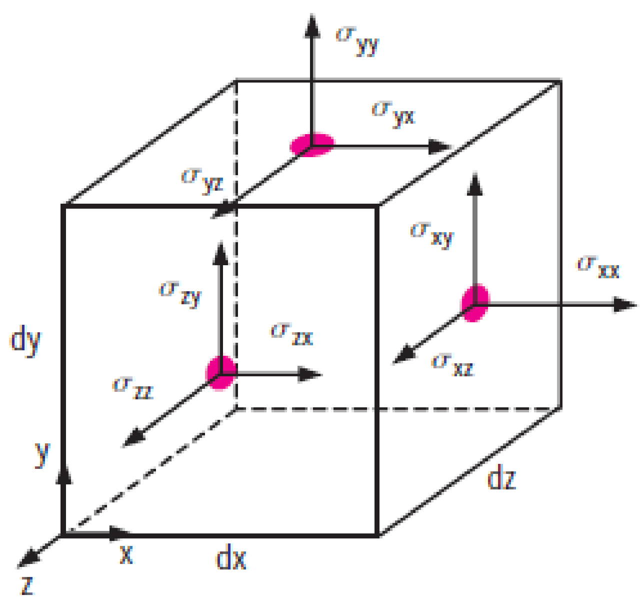


(a) (b)

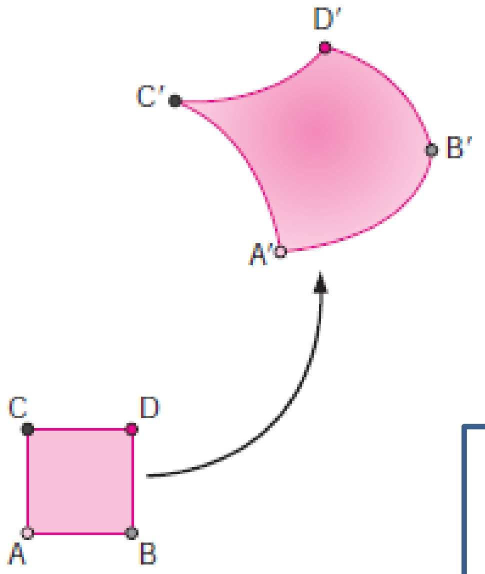
Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \overbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}}^{\text{Fluido en Reposo}} + \overbrace{\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}^{\text{Tensor Viscoso (Desviador)}}}^{\text{Fluido en Movimiento}}$$

Se introduce un Nuevo tensor con las tensiones de corte como valores desconocidos



Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino



Tasa de Deformación por Corte en (x,y)

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Tensor de Tasa de Deformación por Corte

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Deformaciones en los fluidos newtonianos, Flujos rotacional e irrotacional, Vector torbellino

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}}$$

Se define el tensor de deformación viscoso. Se considera Flujo Incompresible y adiabático (esto implica viscosidad constante)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$