UTN HAEDO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

Laboratorio
de Aerodinamica
y Fluidos
UTN F.R.H.

TP Nº1: ECUACIÓN DE BERNOULLI			
Profesor titular		**JTP**	
Ayudante		**JTP LAyF**	Ing. Ramiro Bracco

INSTANCIA	Dictado del TP	1º entrega	2º entrega	3º entrega	Aprobación
FECHA					

GRUPO Nº:				
NOMBRE				
LEGAJO				

ÍNDICE

1 RESUMEN

Esta guía persigue el objetivo de introducir al lector en los conocimientos básicos necesarios para poder realizar correctamente el trabajo práctico denominado “Ecuación de Bernoulli- Tubo venturi”. Además se lo familiarizará con elementos de medición necesarios para la realización del mismo y sus principios de básicos de funcionamiento. Por último, se detalla el procedimiento a seguir en la realización del trabajo, las mediciones que son necesarias tomar y sus correspondientes planillas de adquisición de datos.

2 INTRODUCCIÓN TEÓRICA

2.1 Ecuación de Continuidad

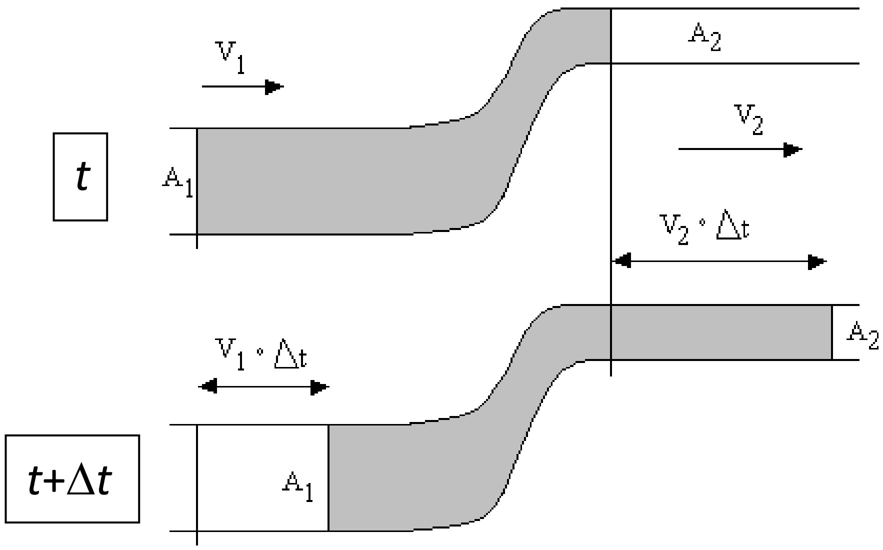

Figura 2.1.1: Porción de fluido para 2 instantes de tiempo

Tomemos en consideración una porción de fluido (color gris en la Figura 2.2.1), en el instante inicial t y en el instante $t+\Delta t$.

En un intervalo de tiempo Δt la sección A_1 que limita a la porción de fluido en la tubería inferior se mueve hacia la derecha una distancia dada por la relación:

$\Delta x_1 = v_1 * \Delta t.$ siendo v_1 la velocidad del flujo en la sección 1

Y la masa de fluido desplazada hacia la derecha será:

$\Delta m_1 = \rho * A_1 * \Delta x_1 = \rho * A_1 (v_1 * \Delta t)$ *con* ρ *la densidad del fluido y* A_1 *el área local en 1.*

Si hacemos un razonamiento análogo con la sección 2, la sección A_2 que limita a la porción de fluido se mueve hacia la derecha:

$$\Delta x_2 = v_2 * \Delta t$$

en el lapso de tiempo dado por Δt y la masa desplazada estará dada por:

$$\Delta m_2 = \rho * A_2 * v_2 * \Delta t.$$

Debido a que el flujo es estacionario (los parámetros del fluido se mantienen constante con el tiempo) y no hay aportes ni pérdidas en el recorrido, la masa que atraviesa la sección A_1 en el tiempo Δt, tiene que ser igual a la masa que atraviesa la sección A_2 para un mismo lapso de tiempo.

Además, consideramos que la velocidad del flujo corresponde a bajo subsónico; por ende se comporta como un fluido incompresible (densidad constante).

En base a estas aseveraciones podemos escribir:

$$\cancel{\rho} * A_1 * v_1 * \cancel{\Delta t} = \cancel{\rho} * A_2 * v_2 * \cancel{\Delta t} \quad \therefore \quad \boxed{A_i * v_i = constante}$$

Esta última relación se denomina ecuación de continuidad y al producto $\rho * A_i * v_i$ se lo conoce como caudal másico.

Esta expresión permite afirmar que conocido el caudal total y las áreas de todas las secciones es posible determinar la velocidad en cada sección que se desee.

2.2 Ecuación de Bernoulli

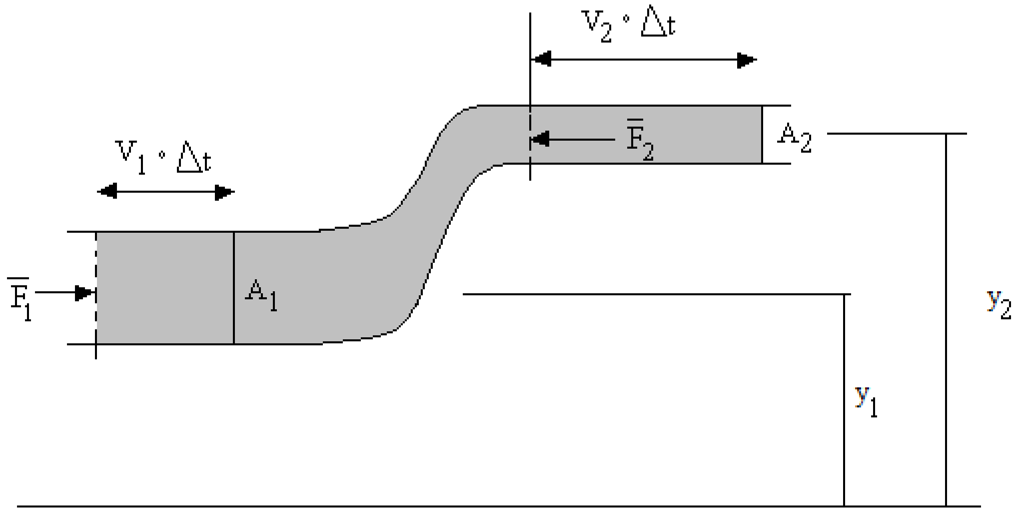

Figura 2.2.1: Puntos de evaluación para obtener la ecuación de Bernoulli

Vamos a evaluar los cambios energéticos que tienen lugar en la porción de fluido de la Figura 2.2.1 cuando fluye a los largo del conducto. En la figura, se señala el estadio inicial (línea de trazos) y se compara con el final después de un tiempo Δt (trazo continuo). En ese lapso de tiempo, la sección A_1 se desplaza a la derecha una magnitud $v_1 * \Delta t$; en tanto, la A_2 lo hace $v_2 * \Delta t$.

El elemento de masa Δm lo podemos escribir como el producto del caudal másico por el lapso de tiempo transcurrido:

$\Delta m = \rho * A_2 * v_2 * \Delta t = \rho * A_1 * v_1 * \Delta t = \rho \Delta V$ con ΔV = volumen desplazado

Al comparar el estado inicial en el instante t con el final en el instante $t+\Delta t$; se aprecia que el elemento Δm aumenta su altura, desde y_1 a y_2.

Si detallamos las distintas variaciones tendremos:

***La variación de energía potencial** es:

$$\Delta E_{pot} = \Delta m * g * y_2 - \Delta m * g * y_1 = [\Delta m] * (y_2 - y_1) * g = [\rho \Delta V] * (y_2 - y_1) * g$$

***La variación de energía cinética** es

$$\Delta E_{cin} = 1/2 * \Delta m * v_2^2 - 1/2 * \Delta m * v_1^2 = 1/2 * \rho \Delta V * (v_2^2 - v_1^2)$$

***Trabajo de las fuerzas exteriores**

Al mismo tiempo que el fluido se desplaza, el fluido restante ejerce fuerzas debidas a la presión sobre las caras anterior y posterior dadas por:

$F_1 = p_1 * A_1$ y $F_2 = p_2 * A_2$ siendo p_i la presión en cada sección

Estas fuerzas, a raíz del desplazamiento, realizan un trabajo. Será positivo para F_1 (mismo sentido que el desplazamiento) y negativo para F_2 (opuesta al desplazamiento).

Los desplazamientos estarán dados por: $\Delta x_1 = v_1 * \Delta t$ y $\Delta x_2 = v_2 * \Delta t$ respectivamente, por lo que el trabajo de las fuerzas exteriores estará dado por:

$$W_{ext} = F_1 * \Delta x_1 - F_2 * \Delta x_2 = (p_1 - p_2) * \Delta V$$

Sabiendo que el trabajo de las fuerzas exteriores es igual a la variación de la energía del sistema, podemos plantear:

$$W_{ext} = E_f - E_i = (E_{cin} + E_{pot})_{final} - (E_{cin} + E_{pot})_{inicial} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2) * \cancel{\Delta V} = [\rho \cancel{\Delta V}] * (y_2 - y_1) * g + 1/2 * \rho \cancel{\Delta V} * (v_2^2 - v_1^2)$$

Reordenando llegamos a la ecuación de Bernoulli :

$$p_1+ \rho *y_1*g +1/2* \rho *v_1^2 = p_2+ \rho *y_2*g +1/2* \rho *v_2^2 \qquad (1)$$

$$\boxed{p+ \rho *y*g +1/2* \rho *v^2 = constante}$$

El significado físico de esta ecuación es el siguiente: "Cuando la velocidad aumenta, la presión decrece y cuando la velocidad decrece, la presión crece"

Además, para un flujo incompresible (densidad constante), la ecuación de Bernoulli es una relación de energía mecánica : "El trabajo hecho en un fluido por las fuerzas de presión es igual al cambio de energía cinética del flujo". Nótese que las unidades de los términos de la ecuación son de energía por unidad de volumen.

Al primer término de la ecuación se lo denomina presión estática(p) y al segundo presión dinámica ($0.5* \rho* V^2$). Es menester aclarar que la ecuación solo es válida para régimen INCOMPRESIBLE.

Si tomamos 2 puntos distintos en un flujo se cumple la igualdad (1). Debido a que la densidad del aire es relativamente pequeña, en comparación con otros fluidos, el tercer término de ambos miembros se puede despreciar para diferencias de alturas (entre los 2 puntos) menores a 30 m aproximadamente. Por ende:

$$p_1+ \cancel{\rho *y_1*g} +1/2* \rho *v_1^2 = p_2+ \cancel{\rho *y_2*g} +1/2* \rho *v_2^2$$

y operando matemáticamente:

$$p_1 -p_2 =1/2* \rho * (v_2^2-v_1^2)$$

Por lo tanto, conocida la variación de velocidad entre 2 puntos, estaremos en condiciones de determinar la diferencia de presión entre dichos puntos.

En el presente trabajo se deberá obtener la diferencia de presión entre distintas secciones en base a esta fórmula y cotejarla con la obtenida en la medición a realizarse en el laboratorio. Sin embargo, para este segundo paso se deberán explicar algunos conceptos que se detallarán a continuación.

2.3 Ecuación Hidrostática

Para comenzar se considerará un elemento cúbico de fluido muy diminuto (de lados infinitesimales) situado en un fluido en reposo (Figura 2.3.1). Los lados del cubo son respectivamente *dx*, *dy* y *dz*.

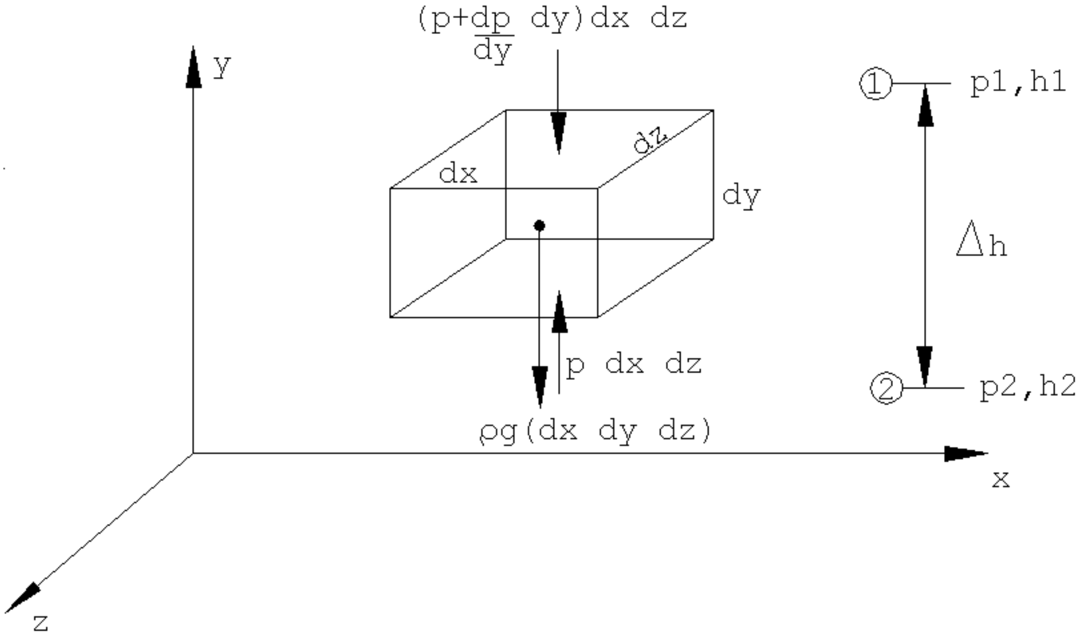

Figura 2.3.1: Elemento infinitesimal de fluido

Sobre este elemento infinitesimal actúan 2 tipos de fuerzas:

i- La fuerza originada en la presión que el fluido adyacente ejerce sobre los lados del cubo infinitesimal considerado

ii- La fuerza de gravedad debido al peso del elemento considerado de fluido

La presión que actúa sobre la superficie inferior del elemento la denominaremos *p*, por ende, la fuerza resultante se obtendrá al multiplicar esta magnitud por la superficie mencionada (*dx*dz*). La dirección de esta fuerza es hacia arriba.

La presión reinante en la cara superior es *p* más la taza de variación de la presión con la altura (dp / dy) por la altura del elemento infinitesimal en el que centramos nuestro estudio.

La fuerza resultante tendrá sentido hacia abajo y su magnitud será el producto:

$$[- \{p + (dp / dy) * dy\} * (dx * dz)].$$

La presión en los lados del cubo son idénticas; por lo tanto, las fuerzas de presión resultantes se cancelan mutuamente

La fuerza de gravedad (W) del elemento de fluido considerado resultará:

$$W = -\rho * g * volumen_{cubo} = -\rho * g * (dx * dy * dz)$$

Siendo: g=aceleración de la gravedad y ρ=densidad del fluido.

Dado que elemento está en reposo se deberá cumplir la condición de equilibrio: $\sum F_y = 0$

$$-\left\{p + \left(\frac{dp}{dy}\right)\right\} * dx * dz + p * dx * dz - \rho * g * (dx * dy * dz) = 0$$

Y operando llegamos a la expresión:

$$-\left(\frac{dp}{dy}\right) dy - \rho * g * dy = 0 \quad \Rightarrow \boxed{dp = -g\,\rho\,dy}$$

La expresión recuadrada es la ecuación hidrostática que relaciona las variaciones de presión con las de altura en un fluido.

Si consideramos un líquido (en el que la densidad es constante) e integrando la expresión anterior entre 2 estados (1 y 2) llegamos a:

$$\int_{p1}^{p2} dp = -g\,\rho \int_{h1}^{h2} dy \quad \Rightarrow \; p2 - p1 = -\rho\, g\,(h2 - h1) \therefore \boxed{p2 - p1 = \rho\, g\, \Delta h}$$

siendo esta expresión la que gobierna el principio de funcionamiento de un manómetro diferencial.

3 INSTRUMENTACIÓN

3.1 Tubo Venturi

En la práctica se aplicará la ecuación de Bernoulli a un conducto por donde circula aire y que presenta diferentes secciones en distintos tramos. A este dispositivo se lo llama Tubo Venturi, siendo mostrados esquemas del mismo en las Figuras 3.1.1 y 3.1.2.

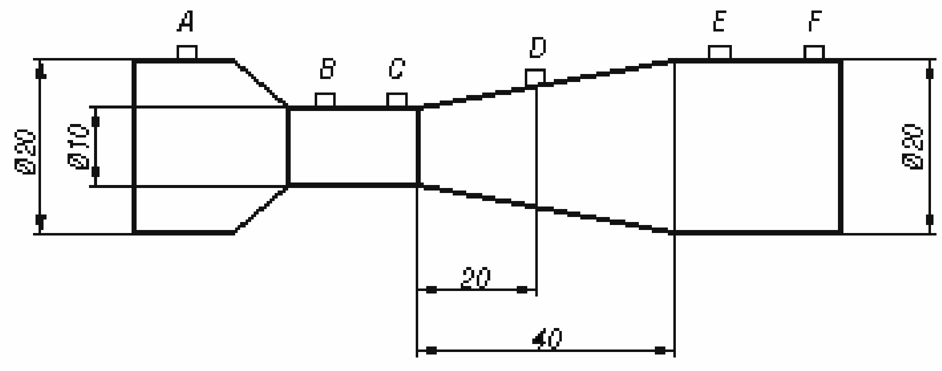

Figura 3.1.1: Tubo de sección variable, dimensiones características y puntos de muestra

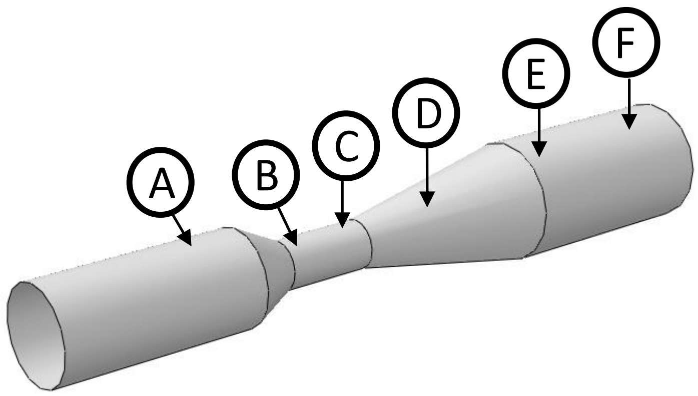

Figura 3.1.2: Tubo de sección variable, forma constructiva

3.2 Manómetro Diferencial

Es uno de los elementos más empleados para medir presiones. Consta de un tubo continuo doblado en forma de "U" y con ambos extremos abiertos. En su interior se encuentra un líquido que se desplazará en función de las presiones (P1 y P2 en la Figura 3.2.1) que actúan en cada uno de los extremos abiertos.

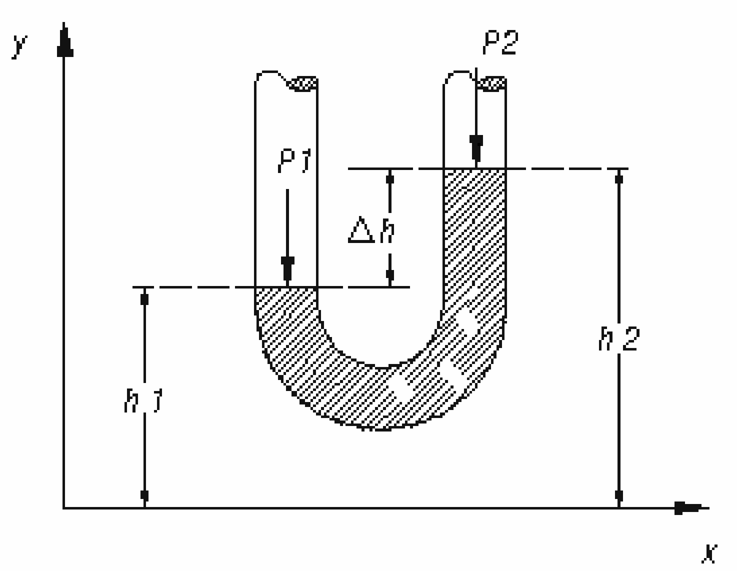

Figura 3.2.1: Manómetro diferencial, esquema básico y nomenclatura.

La expresión que relaciona la diferencia de presiones con la altura de las columnas de líquido (ver la Figura 3.2.1) es la anteriormente citada en la sección 2.3: "Ecuación Hidrostática"

$$\boxed{p1 - p2 = \rho\, g\, \Delta h} \qquad \text{con } \Delta h = h2 - h1$$

En muchos casos, para disminuir el error de apreciación en la lectura de la altura el manómetro, este se encuentra inclinado cierto ángulo (ver Figura 3.2.2), quedando la expresión anterior:

$$\boxed{p1 - p2 = \rho * g * \Delta h * \mathrm{Sin}[\alpha]}$$

Una observación mas minuciosa de la expresión anterior, dará como resultado la conclusión de que variando la densidad (ρ) del líquido del manómetro nos permitirá medir distintos rangos de presiones. Por ejemplo, si utilizamos agua estaremos acotados en el rango de presiones a medir debido a su baja densidad ya que la altura del líquido pueda alcanzar magnitudes poco prácticas para un manómetro. Por eso, en el caso de querer medir valores de presión más altos, el líquido a utilizar puede ser mercurio. Como contrapartida, si las presiones son muy bajas, conviene utilizar líquidos de baja densidad para ganar sensibilidad en las mediciones (con líquidos de alta densidad el Δh puede ser muy chico perdiendo exactitud). Por otro lado, la expresión anterior se puede expresar del siguiente modo:

$$p2+ \rho *g* h2 =p1+\rho *g* h1 \quad \therefore \quad p + \rho * g * h= \text{constante}$$

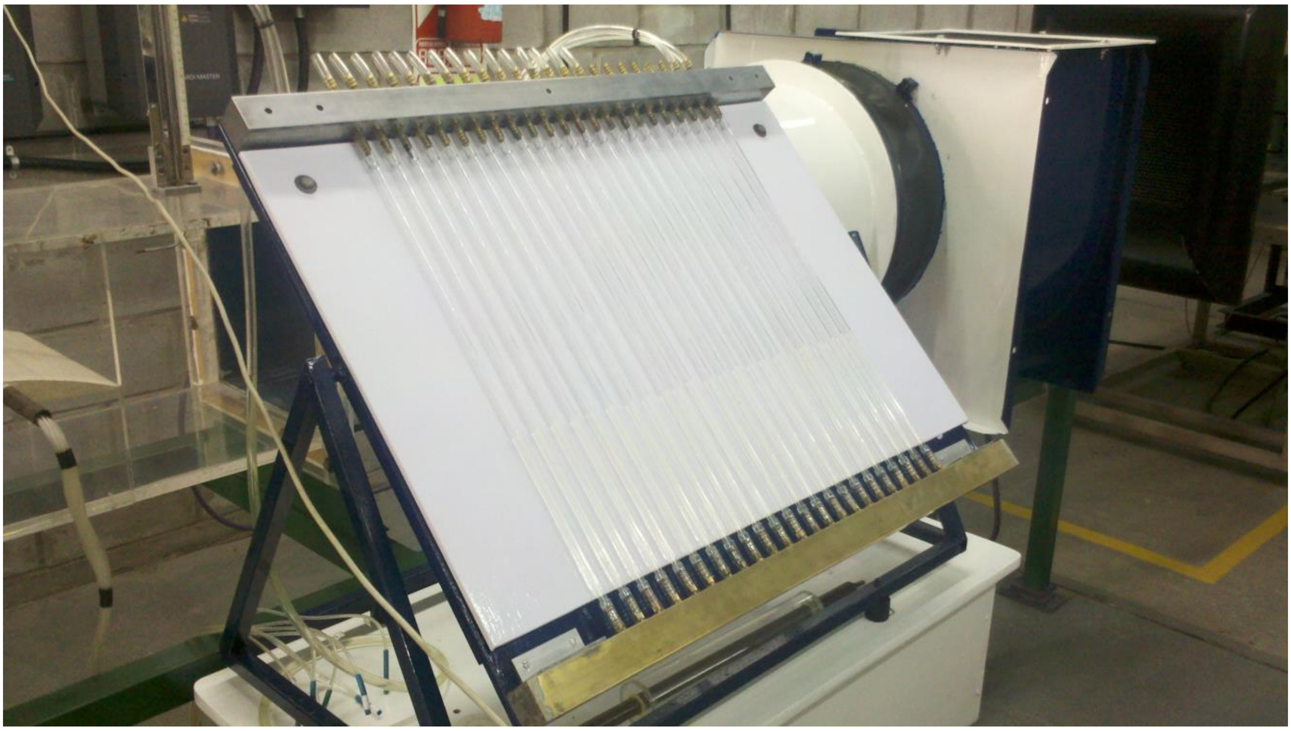

Figura 3.2.2: Manómetro diferencial usado en el laboratorio, nótese las múltiples columnas y la inclinación a 45º.

Por ende, sabiendo el valor de una de las presiones, es posible saber la presión reinante en el otro extremo. Si, por ejemplo, consideramos el extremo 1 abierto a la atmósfera: $p1 = p_{atm}$ =>

$$p2 + \rho\, g\, h2 = p_{atm} + \rho\, g\, h1 \Rightarrow p2 = p_{atm} + \rho\, g\,(h1 - h2) \therefore \boxed{p2 = p_{atm} - \rho\, g\, \Delta h}$$

3.3 Tubo Pitot

Es el dispositivo para medir velocidades de uso más generalizado. Su esquema básico es el mostrado en la Figura 3.3.1 y su funcionamiento se basa en la ecuación de Bernoulli antes mencionada

El principio de operación es el que sigue (todas las explicaciones están referidas a la Figura 3.3.1):

En el instante inicial (t =0) la corriente libre incide sobre el extremo "A" del conducto dispuesto en forma paralela al flujo.

El fluido ingresa al conducto e incide sobre la superficie de la columna de líquido asociada a dicho conducto en el manómetro. En este período, la velocidad en el punto A tendrá un valor finito que corresponde a la del flujo ingresando al manómetro.

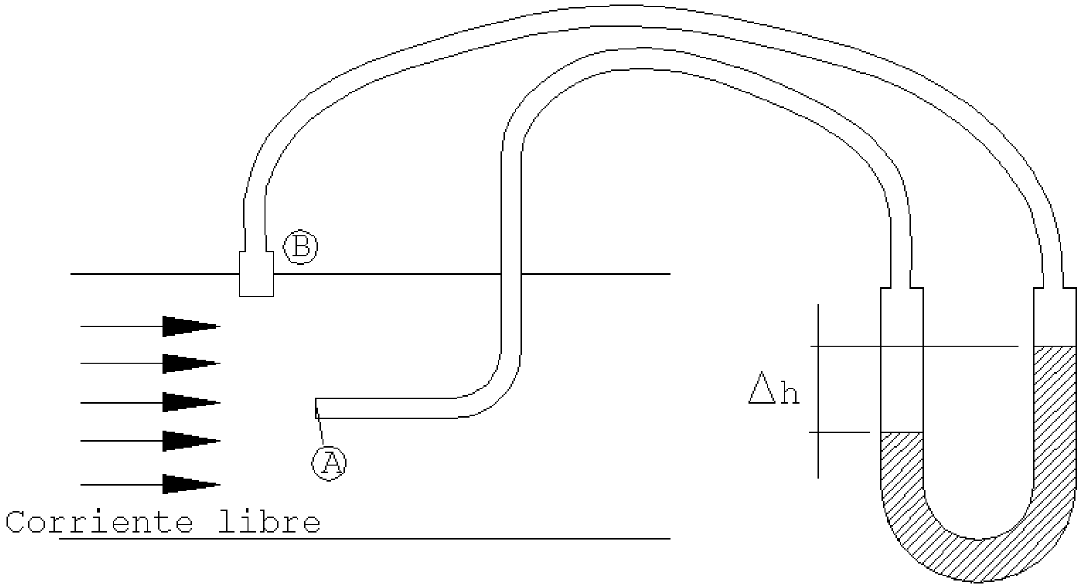

Figura 3.3.1: Esquema básico del Tubo Pitot.

Después de un tiempo, el flujo que ingresa llena completamente el conducto impidiendo que ingrese más flujo por "A". En este instante la velocidad en el punto "A" es nula, convirtiéndose en un punto de remanso. La presión en el punto de remanso se denomina presión de estancamiento o, más comúnmente, presión total (p_0).

Al mismo tiempo, la columna del manómetro asociada a "B" medirá la presión estática de la corriente libre (p_B= p_{est}).Volviendo a la expresión de Bernoulli para los puntos "A"y "B" tendremos:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho V_A{}^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B{}^2$$

Pero V_A=0 $\therefore$

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B{}^2$$

Y al ser “A” un punto de remanso: P_A =P_0

$$\boxed{\sqrt{\frac{2*(p_0 - p_B)}{\rho}} = V_B}$$

Siendo V_B la velocidad de la corriente libre

Y por lo visto anteriormente:

$$(p_0 - p_B) = \rho\, g\, \Delta h = \rho\, g\, (h_B - h_A) = \rho\, g \left(h_{estática} - h_{Total}\right)$$

Una conclusión importante a sacar luego de este estudio es que la presión dinámica (q) es igual a la diferencia entre la presión total y estática

$$\boxed{q = P_0 - P_B}$$

Un modelo real de tubo pitot puede ser visto en la Figura 3.3.2. Este es el modelo usado en el laboratorio y pueden notarse las 2 salidas correspondientes a la toma de presión estática (B) y la de presión total (A),que en todos los casos sale en dirección vertical siguiendo al tubo.

Figura 3.3.2: Tubo Pitot estándar usado en el laboratorio.

4 Ensayo

4.1 Objetivo

El objetivo de este ensayo es obtener las mediciones correspondientes a las presiones estáticas en cada una de las estaciones de muestra (A, B,C, D,E) y la presión total en la garganta (estación B). También se busca familiarizar al alumno con el uso del manómetro diferencial.

4.2 Tareas preparatorias

Deben conectarse las mangueras que ligarán los puntos de toma de presión con sus columnas respectivas en el manómetro diferencial. A su vez, es menester asegurarse la correcta alineación del tubo pitot con la dirección de la corriente libre.

4.3 Procedimiento

i- Prender el ventilador encargado de forzar al aire a ingresar al tubo de sección variable.

ii- Marcar en una hoja milimetrada (por medio del manómetro diferencial) la altura correspondiente de las columnas de líquido que sondean la presión estática de cada punto de muestra y la presión total de la garganta (llenar dichos valores en la Tabla 5.1.1).

iii- Con las mediciones de la presión estática y total en la estación B (P_b y P_T), es posible obtener la velocidad en dicho punto.

$$\sqrt{\frac{2 * \rho_{agua}\, g \left(h_{estática} - h_{Total}\right) * \mathrm{Sin}[\alpha]}{\rho_{aire}}} = V_B$$

iv- Aplicando el principio de conservación de la masa, calcular la velocidad en cada estación. Una vez obtenidos estos datos, llenar la tabla 5.1.2

v- Por medio de la ecuación de Bernoulli, obtener la diferencia de presión (estática) entre las estaciones y el punto B . Estos valores son llamados diferencia de presión “teórica” y deben ser volcados en la tabla 5.1.3.

vi- Midiendo directamente los niveles en la hoja milimetrada, estimar la diferencia de presión (estática) entre las estaciones y el punto B . En este caso, estos valores reciben el nombre de diferencia de presión “por medición” y, como el caso anterior, también deben ser volcados en la tabla 5.1.3.

5 Cuestionario

1. Llenar las tablas a continuación (es menester incluir en la resolución el cálculo detallado de los valores presentados)

Sección	***Altura [m]****
A	
B (Est)	
B (Total)	
C	
D	
E	
F	

Tabla 5.1.1

* Indicar claramente en la hoja milimetrada el punto patrón usado como base en las mediciones

Sección	***Velocidad [m/s]***
A	
B	
C	
D	
E	
F	

Tabla 5.1.2

	Teórica [Pa]	***Medición [Pa]***
P_A-P_B		
P_C-P_B		
P_D-P_B		
P_E-P_B		
P_F-P_B		

Tabla 5.1.3

2. ¿Cuáles son las restricciones a la que está sujeta la ecuación de Bernoulli?

3. ¿Porqué se elimina en este caso, de la ecuación de Bernoulli, el término de la energía potencial (gz)?

4. Según lo calculado teóricamente: ¿Cómo son las presiones P_A-P_B, P_E-P_B y P_F-P_B? ¿Por qué?

5. Según lo medido en el laboratorio: ¿Cómo son las presiones P_A-P_B, P_E-P_B y P_F-P_B? ¿Por qué?