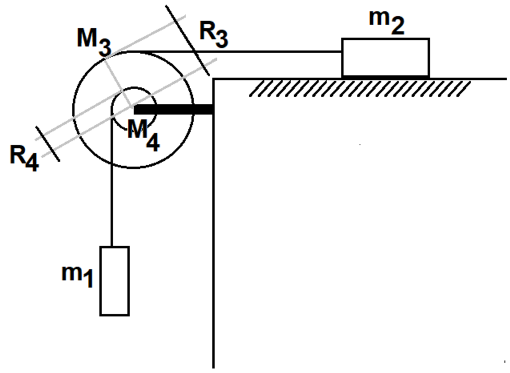
Ejercicios Resueltos - Dinámica del Cuerpo Rígido

Ejercicio 1 (183 de la Guía)



Al descender el cuerpo de masa m_1, hace girar la polea cilíndrica y desplaza hacia la izquierda el cuerpo de masa m_2. El coeficiente de roce cinético entre éste último cuerpo y el plano horizontal es $\mu_c = 0,1$. Aceptando que las cuerdas son inextensibles, de masas y espesores despreciables, calcular la altura que descendió el cuerpo 1 hasta quedar detenido a partir de la posición para la cual la polea tenía una velocidad angular de $\omega_0 = 3s^{-1}$. Datos: $m_1 = 1kg$; $m_2 = 20kg$; $M_3 = 60kg$; $M_4 = 30kg$; $R_3 = 40cm$; $R_4 = 20cm$.. [Respuesta: $h = 1,32m$]

1. Resolución a partir del planteo de las ecuaciones de Newton.

Durante los inicios de este curso hemos trabajado en problemas de dinámica de la partícula en los que se necesitaba hallar la evolución temporal del sistema. Para lograr resolverlos, alcanzaba con conocer las fuerzas aplicadas y las condiciones iniciales que los caracterizan. En el contexto actual, al tratarse de cuerpos extensos, no solamente las partes del sistema pueden trasladarse sino que además pueden rotar. De este modo a las ecuaciones conocidas de traslación se agregará un conjunto que regula los movimientos de rotación. Sin embargo, a pesar de que los problemas tendrían ahora cierta complejidad adicional, podemos aplicar las mismas estrategias utilizadas para el abordaje de aquellos problemas de dinámica de la partícula, es decir:

a) Hacer los diagramas de cuerpo libre.

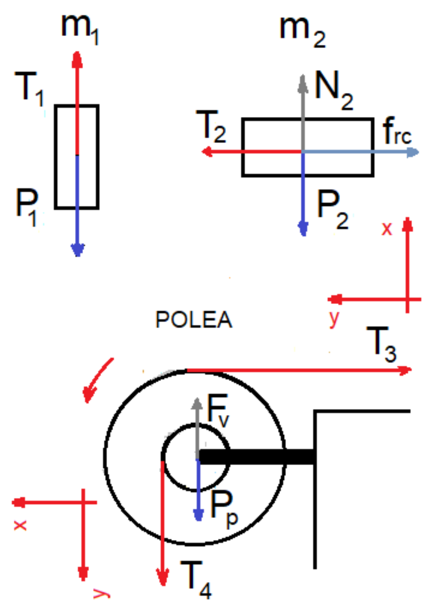
b) Definir un sistema de coordenadas.

c) Escribir las ecuaciones de Newton para cada cuerpo y en cada componente.

d) Reducir el número de incógnitas considerando los vínculos.

e) Resolver el sistema de ecuaciones.

A partir de los diagramas de cuerpo libre vamos a escribir las ecuaciones de Newton eligiendo un sistema de coordenadas para el que el sentido descendente de la masa m_1 compatible con la rotación inicial de la polea sea positivo. En el dibujo se muestran los ejes cuya terna derecha asociada es compatible con esta elección y deja a las aceleraciones angular y tangenciales del mismo signo. Para este cuerpo tendremos una unica ecuación. Para la masa m_2 tendremos dos ecuaciones, una corresponderá al movimiento de traslación proveniente de su vínculo con la masa colgante y la otra al equilibrio en la dirección vertical y por último tendremos una ecuación de momento que rige el movimiento de rotación de la polea.



Ecuaciones de Newton

Para la masa m_1

$$P_1 - T_1 = m_1 a_1 \tag{1}$$

Para la masa m_2

$$T_2 - f_{rc} = m_2 a_2 \tag{2}$$

$$N_2 - P_2 = 0 \tag{3}$$

Y por último para la polea

$$T_4 R_4 - T_3 R_3 = I_p \gamma \tag{4}$$

Algunas de las incógnitas del sistema estan vinculadas. Al utilizar la hipótesis de que la cuerda es de masa despreciable, si consideramos que sobre ella se ejercen las reacciones de las tensiones aplicadas a la polea y los cuerpos vinculados a través de la cuerda, se tiene que la ecuación de Newton para la soga anclada al radio menor de la polea es
T_4'-T_1'=$m_s a_s$=0 y resulta T_4'=T_1'y como por acción y reacción son respectivamente iguales T_1'=T_1 y T_4'=T_4 resulta que son iguales las tensiones

$$T_4 = T_1 \tag{5}$$

y por consideraciones análogas

$$T_3 = T_2 \tag{6}$$

Dado que la cuerda es inextensible, las posiciones relativas de dos puntos cualesquiera de la misma se mantienen constantes lo cual implica que son iguales las velocidades y aceleraciones en todos sus puntos. Suponemos que no hay deslizamiento entre la cuerda y la polea por lo que las aceleraciones de los cuerpos y la aceleración angular de la polea se vinculan por las relaciones:

$$a_1 = \gamma R_4 \tag{7}$$

y lo mismo para la soga que se enrolla en el radio mayor de la polea

$$a_2 = \gamma R_3 \tag{8}$$

Si reemplazamos la fuerza de rozamiento cinetico por su valor en terminos del coeficiente de rozamiento cinético ndicado y el valor de la normal debida al contacto de la masa 2 y la superficie de apoyo, es decir f_{rc}=$\mu_c N$=$\mu_c P_2$, reunimos toda la información de los vínculos y reemplazamos en las ecuaciones de Newton, el sistema a resolver queda reducido en el número de incógnitas

$$P_1 - T_1 = m_1 \gamma R_4 \tag{9}$$

$$T_2 - \mu_c P_2 = m_2 \gamma R_3 \tag{10}$$

$$T_1 R_4 - T_2 R_3 = I_p \gamma \tag{11}$$

Para resolver de manera sencilla hagamos R_4 (9) y R_3 (10) y sumemos los resultados a la ecuación (11). Eso permite cancelar los términos que involucran a las tensiones y arribar a una expresión que nos permite despejar la aceleración angular en función de variables conocidas. A saber:

$$\gamma = \frac{P_1 R_4 - \mu_c P_2 R_3}{m_1 {R_4}^2 + m_2 {R_3}^2 + I_p} \tag{12}$$

El momento de inercia de la polea es $I_p = \frac{1}{2} M_3 {R_3}^2 + \frac{1}{2} M_4 {R_4}^2$, con lo cual la expresión final para la aceleración angular es:

$$\boxed{\gamma = [\frac{m_1 R_4 - \mu_c m_2 R_3}{(m_1 + \frac{1}{2} M_4){R_4}^2 + (m_2 + \frac{1}{2} M_3){R_3}^2}]g} \tag{13}$$

Si se reemplazan los valores de los datos resulta que la aceleración angular que buscamos es:

$$\boxed{\gamma = -0,68 s^{-2}}$$

Su signo nos muestra que en efecto el descenso incial de la masa 1 cesará debido al rozamiento y a la relación entre las masas relativas y los radios en la polea. Calcularemos el desplazamiento usando las ecuaciones cinemáticas del movimiento con aceleración constante.
$\Delta\ y = y(t) - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = \omega_0 R_4 t + \frac{1}{2} \gamma R_4 t^2$ para t^*tal que $v(t^*) = 0$
Reemplazando los valores el resultado final es:

$$\boxed{\Delta\text{y=1,32m}}$$

2. <u>Resolución a partir de consideraciones energéticas:</u>

Este problema puede ser resuelto planteando la relación entre la variación de la energía mecánica del sistema y el trabajo de las fuerzas no conservativas. Hemos visto que:

$$W_{FNC} = \Delta E_M \tag{14}$$

Comencemos analizando qué fuerzas del sistema son no conservativas y veamos que trabajo efectúan. Del conjunto de fuerzas del sistema, sabemos que debemos calcular el trabajo neto que realizan las tensiones $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$, $\overrightarrow{T_3}$, $\overrightarrow{T_4}$ y la fuerza de rozamiento $\overrightarrow{f_{rc}}$. Las fuerzas $\overrightarrow{N_2}$ y $\overrightarrow{F_v}$ no realizan trabajo por ser perpendicular al desplazamiento en un caso y por no existir desplazamiento respectivamente. Calculemos primero los trabajos de las tensiones $\overrightarrow{T_3}$ y $\overrightarrow{T_2}$. El trabajo realizado por la primera fuerza para hacer rotar la polea es:

$$W_{T_3} = \int \overrightarrow{T_3} \cdot \overrightarrow{dl} = -T_3 R_3 \Delta\theta = -T_3 \Delta l = -T_3 \Delta y$$

siendo Δl el recorrido sobre el perímetro de la polea de un punto de la soga cuando ésta gira en un ángulo $\Delta\theta$. Como la cuerda es inextensible ese recorrido es el desplazamiento de la masa m_2 sujeta en el extremo de la cuerda Δy . Por otra parte, el trabajo realizado por la fuerza T_2 es:

$$W_{T_2} = \int \overrightarrow{T_3} \cdot \overrightarrow{dx} = T_2 \Delta y$$

Por lo tanto, recordando que por ser la cuerda de masa despreciable se tiene que $T_2 = T_3$, la suma de estos trabajos es nula. Se puede razonar de manera análoga al considerar los trabajos de las tensiones $\overrightarrow{T_1}$ y $\overrightarrow{T_4}$, de tal modo que el trabajo de las tensiones en conjunto es nulo.
En conclusión, la variación de la energía mecánica del sistema será igual al trabajo de la fuerza de rozamiento.

$$W_{f_{rc}} = \Delta E_M \tag{15}$$

Veamos cómo se escriben la energía mecánica inicial eligiendo la posición h_0 de la masa m_1 en el instante que la velocidad de la polea es ω_0 como cero de la energía potencial gravitatoria

$$E^i_{mec} = E^{pol}_{cin} + E^{m_1}_{cin} + E^{m_2}_{cin} + E^{m_2}_{pot}$$

En el instante en el que la polea se detiene, la masa m_1 ha descendido hasta la posición h_f de modo que la energía mecánica final es:

$$E^f_{mec} = -m_1 g h_f + E^{m_2}_{pot}$$

Entonces la ecuación (15) queda

$$W_{f_{rc}} = -\mu_c N_2 \Delta y = -m_1 g h_f + E^{m_2}_{pot} - (E^{pol}_{cin} + E^{m_1}_{cin} + E^{m_2}_{cin} + E^{m_2}_{pot}) \tag{16}$$

La masa m_2 no cambia su energia potencial gravitoria y su desplazamiento

$$\Delta y = \Delta h \tfrac{R_3}{R_4} = h_f \tfrac{R_3}{R_4}$$

puesto que hemos elegido $h_0 = 0$

$$E^{pol}_{cin} = \tfrac{1}{4}(M_3 R_3^2 + M_4 R_4^2)\omega_0^2$$
$$E^{m_1}_{cin} = \tfrac{1}{2} m_1 \omega_0^2 R_4^2$$
$$E^{m_2}_{cin} = \tfrac{1}{2} m_2 \omega_0^2 R_3^2$$

Reemplazando se tiene que

$$-\mu_c N_2 \Delta y = -m_1 g h_f - (\frac{1}{4}(M_3R_3^2 + M_4R_4^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_0^2R_4^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_0^2R_3^2) \quad (17)$$

$$\mu_c m_2 g h_f \frac{R_3}{R_4} = m_1 g h_f + \frac{1}{4}(M_3R_3^2 + M_4R_4^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_0^2R_4^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_0^2R_3^2 \quad (18)$$

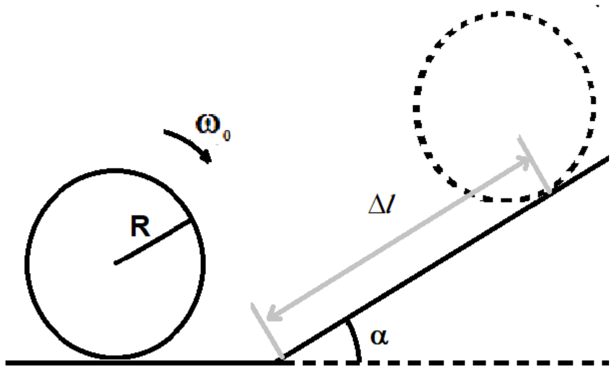
$$\boxed{h_f = \frac{\frac{1}{4}(M_3R_3^2 + M_4R_4^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_0^2R_4^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_0^2R_3^2}{\mu_c m_2 g \frac{R_3}{R_4} - m_1 g}} \quad (19)$$

Si finalmente se reemplaza por los datos en esta ultima ecuación se obtiene el valor de h_f coincidente con el encontrado planteando las ecuaciones dinámicas como hemos hecho en el punto anterior.

$$\boxed{h_f = 1{,}32\text{m}}$$

Ejercicio 2

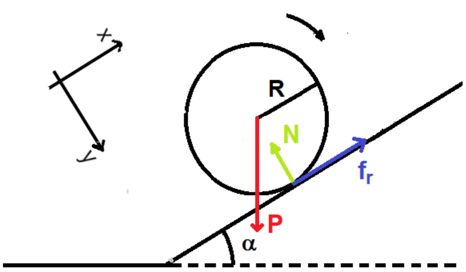
Un cilindro de masa m=2 Kg y radio R=20 cm rueda sin deslizar por una superficie horizontal que luego adquiere una pendiente de 37° por la que asciende también rodando sin deslizar. El centro de masa del cilindro recorre 1 m por el plano inclinado hasta detenerse. Determinar:



1. La velocidad angular ω_0 en la base del plano inclinado.
2. La fuerza de rozamiento f_r actuante en el plano inclinado en módulo y sentido.

1. Resolución a partir del planteo de las ecuaciones de Newton.

Vamos a comenzar efectuando el diagrama de cuerpo libre y tomando como positivo el sentido de avance del cilindro hacia el plano inclinado. Se indican los ejes del sistema de coordenadas compatible con dicha elección y de modo que las aceleraciones angular y tangencial tengan el mismo signo. La ecuación de momentos es equivalente tomarla desde el CM del cilindro o desde del punto de contacto del cilindro con la superficie donde esta aplicada la fuerza de rozamiento estático. En el primer caso esta última fuerza es la que ejercerá momento sobre el cilindro y en el segundo, será la componente del peso paralela a la superficie la que aplique el momento. Para esta elección, el momento de inercia del cilindro deberá calcularse usando el teorema de Steiner considerando el punto de contacto como centro de momentos, En esta resolución tomaremos el CM como centro de momentos



Ecuaciones de Newton

Para la trasclación del CM del cilindro

$$f_{re} - P_x = m a_{CM} \tag{20}$$

Y como ecuación de momentos tomados desde el CM

$$-R f_{re} = I_{CM}\gamma \tag{21}$$

que no involucra ni al peso porque está aplicado en el CM ni a la normal porque es paralela al vector que señala su punto de aplicación

Para resolver multipliquemos la ecuación de traslación por R miembro a miembro y sumemosla a la ecuacipon de momementos usando que $a_{CM}{=}\gamma R$ y que el momento de inercia del cilindro desde su CM es $I_{CM}{=}\frac{1}{2}\ m\ R^2$
de lo cual resulta que la aceleracipon angular del sistema será:

$$\boxed{\gamma = -\frac{msen\alpha R}{\frac{3}{2}mR^2}g} \tag{22}$$

Que reemplazando por los datos nos quedan:

$$\boxed{\gamma = -20s^{-2}}$$
$$\boxed{a_{CM} = -4m/s^{-2}}$$

El signo negativo nos indica que efectivamente el cilindro se detendrá en algún instante de su recorrido sobre el plano y comenzará a descender con la aceleración calculada
De la ecuación de momentos es inmediata la determinación del valor de la fuerza de rozamiento

$$\boxed{f_{re} = -\frac{I_{CM}}{R}\gamma}$$

Que reemplzando resulta $\boxed{f_{re} = 4N}$ cuyo signo positivo es consistente con el planteo inicial
Veamos ahora qué velocidad angular $\omega_0 = v_0/R$ tenía el cilindro al ingresar a la rampa inclinada. Para esto consideremos las ecuaciones cinemáticas. Sabemos que:
$\Delta\ x = x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}a_{CM}t^2 = \omega_0 Rt + \frac{1}{2}\gamma Rt^2$ y que para un tiempo t^*tal que $v(t^*) = 0$ el desplazamiento sobre el plano inclinado es $\Delta\ x{=}1m$
Despejando este tiempo de la ecuación de la velocidad y reemplazandolo en la ecuación de la posición se obtiene que:

$$v_0{=}\sqrt{2a_{CM}} \text{ y en consecuencia } \omega_0{=}\sqrt{2a_{CM}}/R$$

que reemplazando por los datos nos da:

$$\boxed{\omega_0 = 14,1s^{-1}}$$

2. Resolución a partir de consideraciones energéticas:

Dado que el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo, entonces la energía mecánica del sistema se conserva. Si ponemos el cero de energía potencial gravitatoria al pie del plano inclinado, entonces la energía mecánica será solo energía cinética y luego del recorrido de longitud Δx sobre la superficie de la rampa, la energía mecánica será alli solamente energía potencial gravitatoria. Tenemos dos maneras equivalentes de escribir la energía cinética, o bien como una rotación pura en torno al eje instantaneo de rotación que pasa por el punto de contacto entre el cilindro y el piso, o bien separpandola en dos términos, una energía de traslación del CM y una energía de rotación en torno al dicho punto. Vamos a optar por esta segunda opción

$$E^{i}_{mec}=\frac{1}{2}mv^{2}_{CM}+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^{2}_{0}=\frac{3}{4}mR^{2}\omega^{2}_{0}=mg\Delta xsen\alpha=E^{f}_{mec}$$

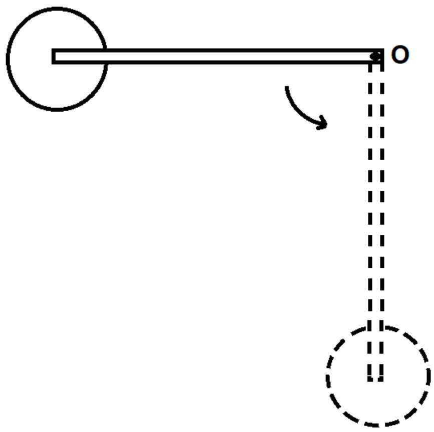
De donde resulta

$$\boxed{\omega_{0}=\sqrt{\frac{4\Delta xgsen\alpha}{3R^{2}}}=14,1s^{-1}}$$

El item b) se resuelve de modo idéntico al planteo anterior a partir de las ecuaciones de Newton

Ejercicio 3

Una varilla de masa $m_v = 3kg$ y longitud $l = 1m$ tiene adosado un disco de masa $m_d = 2kg$ y radio $R = 20cm$ en uno de sus extremos. El otro extremo cuelga de un pivote (que es señalado en la figura como punto O) de modo que le permite girar en un plano vertical. Inicialmente se ubica la varilla en posición horizontal y se la suelta desde su posición en reposo. Despreciando el rozamiento en el eje, hallar:



a) La velocidad angular ω cuando la varilla está en posición vertical.

b) La velocidad del CM de la varilla en ese instante.

c) El impulso angular del disco desde el punto O cuando alcanza el punto más bajo.

En este sistema no hay trabajo de fuerzas no conservativas por lo que la energía mecánica se conserva. Existen varias alternativas para escribir la energía potencial gravitatoria de la varilla y el disco. Vamos a ubicar el cero de potencial a la altura de la posición incial de los CM de ambos cuerpos. Con esta elección la E^i_{mec}=0. Para la posición vertical, el CM de la varilla desciende una distancia $l/2$ y el del disco una distancia l por lo cual la energía potencial gravitaroria en ese instante valdrá:

$$E^f_{pot}{=}{-}m_dgl - m_vg\tfrac{l}{2}$$

La energía cinética requiere la corrección de los momentos de inercia respectivos refiriendolos al eje isntantaneo de rotación (EIR) que pasa por el punto O usando el teorema de Steiner, es decir:

$$E^f_{cin}{=}\tfrac{1}{2}(I^{EIR}_d + I^{EIR}_v)\omega^2$$

$$E^f_{cin}{=}\tfrac{1}{2}(I^{CM}_d + m_dl^2 + I^{CM}_v + m_v\tfrac{l^2}{4})\omega^2$$

$$E^f_{cin}{=}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_dR^2 + m_dl^2 + \tfrac{1}{3}m_vl^2)\omega^2$$

Reuniendo toda la información la conservación de la energía mecánica queda expresada del siguiente modo:

$$E^{i}_{mec}=0=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_dR^2+m_dl^2+\frac{1}{3}m_vl^2)\omega^2-m_dgl-m_vg\frac{l}{2}=E^{f}_{mec}$$

De donde podemos despejar la velocidad angular ω

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{2gl(m_d+\frac{m_v}{2})}{\frac{1}{2}m_dR^2+m_dl^2+\frac{1}{3}m_vl^2}}} \tag{23}$$

si reemplazamos por los datos en esta última ecuación

$$\boxed{\omega=4,8s^{-1}}$$

Con la velocidad angular se puede calcular la velocidad del CM de la varilla multiplicando por la distancia $l/2$

$$\boxed{v^{varilla}_{CM}=2,4\frac{m}{s}}$$

Por último podemos calcular el momento angular del disco desde el EIR sabiendo que su modulo es:

$$|L^o_d|=I^{EIR}_d|\omega|=\frac{1}{2}m_d(R^2+l^2)|\omega|$$

que resulta reemplazando:

$$\boxed{|L^o_d|=4,99Nms}$$

Siendo su dirección y sentido normal al plano y saliente.