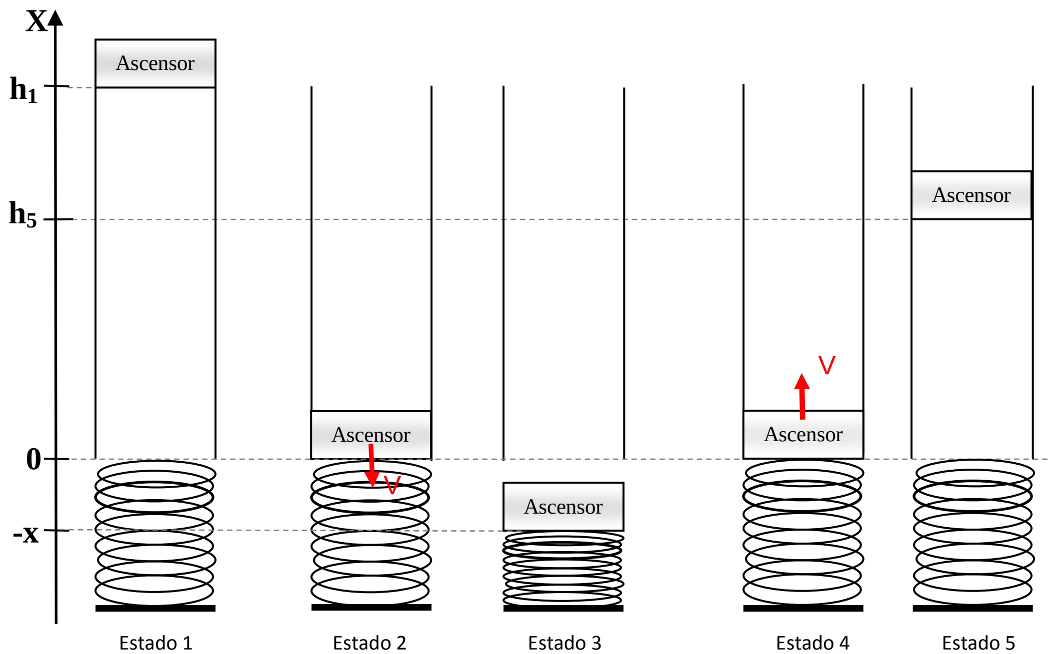
Un ascensor, de 400 kg de masa, está en reposo en el segundo piso, a 6 m de altura sobre el extremo superior de un resorte paragolpes cuya constante elástica es 20000 N/m. En esas condiciones se rompe el cable que lo sostiene y, simultáneamente, actúa un freno de fricción contra las guías que le aplica una fuerza opuesta al desplazamiento de 2500 N (esta fuerza actúa sólo hasta que el ascensor toma contacto con el resorte). Hallar: a) la velocidad del coche al llegar al extremo del resorte; b) la máxima distancia que lo comprimirá; c) la altura máxima que alcanzará, luego del primer rebote.

Hacemos un esquema del problema, indicando los distintos estados de interés



Ahora consideramos la energía mecánica en cada uno de los estados

Estado 1 : El ascensor se encuentra en reposo ($v_1 = 0$) y a una altura de $h_1 = 6$ m , por lo tanto la energía mecánica en este estado es solamente energía potencial gravitatoria.

$$\mathbf{E_1 = mgh_1}$$

Estado 2 : En este estado el ascensor se encuentra en la posición de altura $h_2 = 0$, con velocidad $v_2 = V$ y el resorte todavía no esta comprimido. Por lo tanto la energía mecánica es solamente energía cinética

$$E_2 = (½)mV^2$$

Estado 3 : El ascensor se encuentra en reposo ($v_3 = 0$) en la posición $h_3 = -x$ y el resorte esta comprimido totalmente en la posición -x, entonces la energía mecánica es la suma de la energía potencial gravitatoria del ascensor y la energía potencial elástica del resorte.

$$E_3 = mgh_3 + (½)K(-x)^2 = -mgx + (½)Kx^2$$

Estado 4 : Nuevamente el resorte esta en su longitud libre y el ascensor tiene velocidad $v_4 = V$ y la energía mecánica es solamente la energía cinética del ascensor.

$$E_4 = (½)mV^2$$

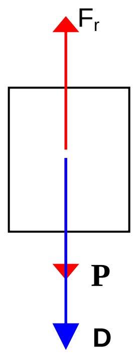
Estado 5 : El ascensor se detiene (v_5 = 0) en la posición h_5 , la energía mecánica es la energía potencial gravitatoria del ascensor.

$E_5 = mgh_5$

Veamos si se conserva la energía mecánica entre los estados, para ello estudiamos las fuerzas no conservativas que actúan y si realizan trabajo, aplicando el teorema del trabajo y la energía mecánica.
Las fuerzas que actúan en todo el proceso son la fuerza Peso, la fuerza Elástica y la fuerza de Fricción, como el Peso y la Elástica son fuerzas conservativas solamente vamos a considerar el trabajo realizado por la fuerza de Fricción, que es opuesta al desplazamiento y realizará, por lo tanto, un trabajo negativo que produce una pérdida de energía mecánica.

a) Para contestar esta pregunta analizamos el movimiento del ascensor desde el estado 1 al estado 2, el desplazamiento del ascensor es D = 6 m

DCL



Utilizando el teorema del trabajo de las fuerzas no conservativas y la energía mecánica, la única fuerza no conservativa es F_r que forma un ángulo π con el vector desplazamiento D.

$$W_{FNC}^{1-2} = \Delta E_m^{1-2}$$
$$F_r D \cos(\pi) = E_2 - E_1$$
$$-F_r D = \frac{1}{2} m V^2 - mgh_1$$

Despejando

$$V = \sqrt{\frac{2(mgh_1 - F_r D)}{m}}$$
$$V = 6{,}7 \text{ m/s}$$

Se puede ver que la altura $\mathbf{h_1}$ desde la cual cae el ascensor coincide con el desplazamiento **D** por lo que se puede escribir la velocidad en función de la altura

$$V = \sqrt{\frac{2(mg - F_r)h_1}{m}}$$
$$V = \sqrt{7{,}5h_1}$$

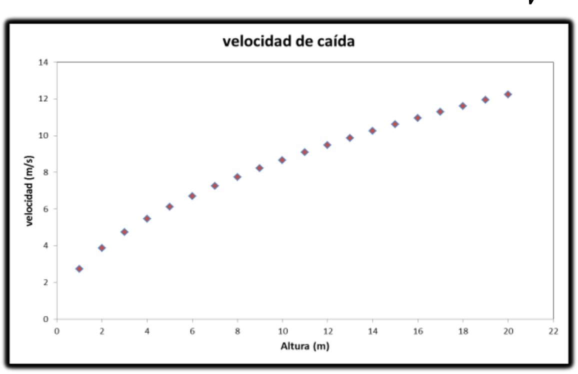


Gráfico de la velocidad con la que llega el ascensor al extremo del resorte en función de la altura de caída

b) Ahora se analiza el problema desde el estado 1 al estado 3, nuevamente la única fuerza no conservativa es F_r y realiza el mismo trabajo que en el punto anterior

$$W_{FNC}^{1-2} = \Delta E_m^{1-2}$$
$$W_{FNC}^{1-2} = E_m^2 - E_m^1$$
$$-F_r D = \frac{1}{2}KX^2 - mgX - mgh_1$$
$$\frac{1}{2}KX^2 - mgX + (F_r D - mgh_1) = 0$$
$$10000X^2 - 4000X - 9000 = 0$$

Máxima compresión

$$\boxed{X = 1{,}16 \text{ m}}$$

Rescribiendo la cuadrática puede despejarse la compresión del resorte X en función de la altura de caída h_1

$$\frac{1}{2}KX^2 - mgX + (F_r - mg)h_1 = 0$$

Despejando

$$X = \frac{mg}{K}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2K(mg - F_r)}{m^2 g^2} h_1}\right]$$

$$X = 0{,}2\left[1 + \sqrt{1 + 3.75 h_1}\right]$$

Relación entre la compresión del resorte y la altura de caída

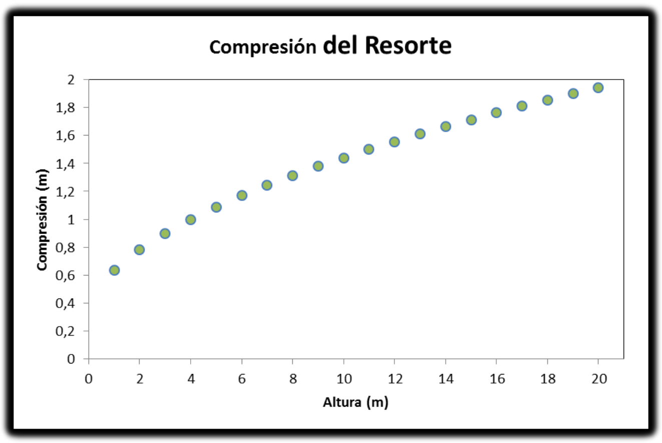


Gráfico de la compresión del resorte X en función de la altura de caída h_1

c) En este punto analizamos desde el estado 1 al estado 5, la fuerza de fricción entre el ascensor y las guías actúa cuando el ascensor cae (ya analizado) y cuando vuelve a subir después del rebote, realizando un trabajo negativo pues la fuerza F_r es opuesta al desplazamiento D. Siendo el trabajo total la suma de los trabajos en cada tramo.

$$W_{FNC}^{1-5} = W_{FNC}^{1-2} + W_{FNC}^{4-5}$$

entonces

$$W_{FNC}^{1-5} = \Delta E_m^{1-5}$$

$$W_{FNC}^{1-2} + W_{FNC}^{4-5} = E_m^5 - E_m^1$$

$$-F_r D - F_r h_5 = mgh_5 - mgh_1$$

despejando

$$h_5 = \frac{(mg - F_r)h_1}{mg + F_r}$$

Siendo la altura máxima alcanzada después del rebote

$$\boxed{h_5 = 1{,}38\ m}$$

La altura h_5 también puede escribirse en función de la altura de caída h_1 , para los datos del problema

$$h_5 = 0{,}23h_1$$

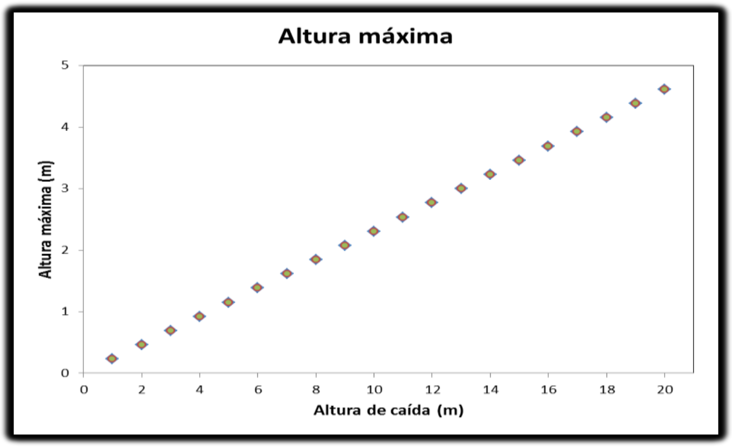


Gráfico de la altura máxima alcanzada después de rebotar contra el resorte en función de la altura de caída