Hidrostática

La materia se encuentra en la naturaleza en tres estados: sólido, líquido y gaseoso. Hasta aquí hemos estudiado conceptos de la física aplicables estrictamente al estado sólido. Los líquidos y los gases presentan algunas características tales que justifican un estudio particularizado. Por eso, estas últimas clases están dedicadas exclusivamente a ellos. Una denominación que incluye tanto a los líquidos como a los gases es la de *fluidos*.

Los fluidos desempeñan un papel crucial en muchos aspectos de la vida cotidiana. Los bebemos, respiramos, y nadamos en ellos; circulan por nuestro organismo y controlan el clima. Los aviones vuelan a través de ellos y los barcos flotan en ellos. Un fluido es cualquier sustancia que puede fluir.

Se llama HIDROSTÁTICA a la parte de la mecánica que estudia a los fluidos en reposo, en condiciones de equilibrio.

El nombre de hidrostática resulta inapropiado ya que parece referirse exclusivamente al estado líquido, lo que obligaría a utilizar otro término (neumostática) para los gases; sólo se conserva por "inercia histórica". El nombre correcto debe ser *estática de los fluidos.*

Densidad (ρ)

Se define a la densidad como la razón entre la masa de un cuerpo y su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{En el S.I.} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

Es una propiedad importante de cualquier material. Cuando éste tiene el mismo valor de densidad en todas sus partes, se dice que es un material homogéneo. Cada sustancia tiene un valor de densidad que le es propia. En la siguiente tabla, las densidades están expresadas en $\frac{kg}{m^3}$

MATERIAL		MATERIAL		MATERIAL	
Agua pura	1000	Hierro	7800	Plata	10500
Agua de mar	1030	Latón	8600	Platino	21400
aluminio	2700	Mercurio	13600		
Hielo	920	Oro	19300		

Llamamos *densidad relativa* a la razón entre la densidad de un material cualquiera y la del agua; es adimensional. Por ejemplo, la densidad relativa del hierro vale 7,8.

La medición de la densidad es una técnica analítica no destructiva importante. Por ejemplo, nos permite saber acerca del nivel de carga de la batería de un automóvil; la densidad de la solución de H_2SO_4 debe dar 1300 $\frac{kg}{m^3}$ si la carga está completa, o 1150 $\frac{kg}{m^3}$ si está totalmente descargada.

El peso específico (δ) guarda con la densidad, la misma relación que el peso guarda con la masa:

$$\text{Si} \quad P = m \bullet g \qquad \rightarrow \qquad \delta = \rho \bullet g$$

Presión (p)

Tal vez la diferencia más importante entre los sólidos y los fluidos está en que estos últimos únicamente pueden soportar la acción de fuerzas perpendiculares a su superficie. Si se aplica una fuerza inclinada sobre la superficie libre de un líquido en reposo, ella podrá descomponerse en una componente tangencial y otra normal; la primera hará resbalar las láminas de líquido superficiales entre sí, quebrándose el estado de reposo. Por eso:

Los fluidos no resisten fuerzas tangenciales o esfuerzos de corte.

Por este motivo se define una magnitud nueva: la presión. Ella representa el valor de la fuerza normal que actúa por unidad de superficie:

$$p = \frac{F_\perp}{S}$$

Tanto la fuerza como la superficie son cantidades vectoriales que en este caso siempre tendrán la misma dirección.

La presión es la fuerza normal aplicada por unidad de área.

UNIDADES DE PRESIÓN: En el S.I. Pascal (Pa) $1\ Pa = \frac{1\ N}{1\ m^2}$

Otras unidades antiguas, aún en uso, y su equivalencia con el Pa:

Bar 1 bar = 10^5 Pa

Milibar 1 mbar = 100 Pa

Atmósfera 1 atm = 101.325 Pa
mmHg o Torr 1 mmHg = 133,3 Pa

Cuando se desea aumentar el valor de una presión, se dispone de dos caminos: aumentar F o disminuir S. Generalmente esta segunda opción es la más práctica.
Algunos ejemplos del caso: 1- cortar un pan de manteca con un cuchillo afilado.
2- clavar un clavo de punta y de cabeza
3- caso del faquir
4- La enorme presión (30 kgr/cm^2) que hacía la púa sobre el disco, en los tocadiscos antiguos.

La presión dentro de una masa líquida.

Recibe el nombre de *manómetro*, todo instrumento capaz de medir presiones. Supongamos tener un recipiente conteniendo agua y un manómetro. Experimentalmente es posible hacer las siguientes comprobaciones:

1- Si recorremos con el sensor del manómetro puntos de un plano horizontal a cualquier profundidad dentro del líquido del recipiente, mediremos la misma presión en todos sus puntos.

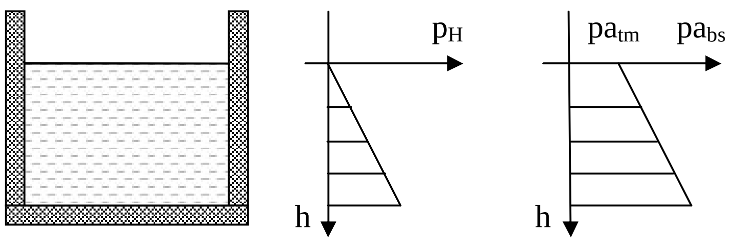
2- Si recorremos con el sensor del manómetro puntos de un plano vertical, mediremos presiones mayores conforme aumente la profundidad. Es decir que a peso específico constante, la presión es proporcional a la profundidad.

3- Si recurrimos ahora a varios recipientes, donde en cada uno hemos puesto un líquido diferente (con una densidad distinta), tomando las presiones en cada recipiente, siempre a igual profundidad, mediremos valores diferentes. Se podrá establecer que tales valores, a profundidad constante, son proporcionales a las densidades.

Todas estas observaciones nos conducen a que la presión en el interior de una masa líquida es proporcional simultáneamente al peso específico y a la profundidad:

$$p_H = \rho \bullet g \bullet h \qquad (1)$$

Esta presión se llama presión hidrostática. Alcanza su máximo valor en el fondo del recipiente, y para un líquido determinado, su valor depende únicamente de la profundidad h; es independiente de la masa de líquido. Esta circunstancia se conoce con el nombre de *paradoja hidrostática*.



Si a la presión hidrostática, que es la generada por el líquido, le agregamos la presión atmosférica, ejercida por el aire sobre la superficie libre del líquido, obtenemos la presión total, que es llamada *presión absoluta*:

$$p_{abs} = p_{atm} + \rho g h \qquad (2)$$

La expresión anterior es conocida con el nombre de *teorema general de la hidrostática*. El gráfico de arriba muestra cómo la presión crece linealmente con la profundidad, hecho que comprobamos cuando nos sumergimos en aguas profundas; allí los oídos nos indican que la presión aumenta rápidamente al aumentar la profundidad.

Si en la expresión (2): $p_{abs} = p_{atm} + \rho gh$ ordenamos términos:

$$p_{abs} - p_{atm} = \rho gh$$

la diferencia de presiones del primer miembro recibe el nombre de *presión manométrica*; representa el exceso de presión existente con respecto a la presión atmosférica. El motivo del nombre está en que ésta es normalmente la presión que miden los manómetros. Así por ejemplo, si la presión dentro de un neumático es igual a la presión atmosférica, el neumático está desinflado: la presión debe ser mayor que la atmosférica para poder sostener al vehículo, así que la cantidad significativa es la diferencia entre las presiones interior y exterior. Un manómetro mide justamente dicha diferencia; entonces:

$$p_{abs} - p_{atm} = p_{manométrica}.$$

Como se ve, la presión manométrica es igual a la presión hidrostática:

$$p_{man} = p_H.$$

Problemas.

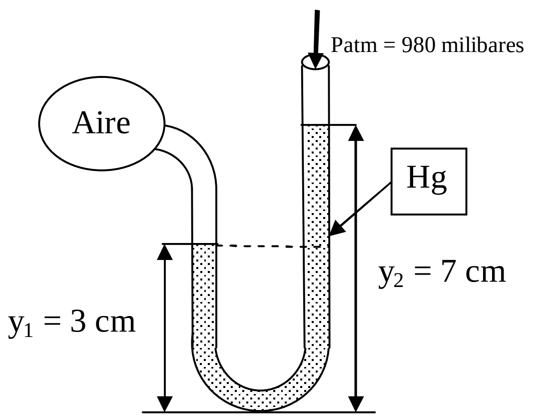
1- Un barril contiene una capa de aceite (ρ_{ac} = 600 kg/m^3) de 12 cm de espesor, sobre 25 cm de agua. a) ¿Cuánta presión manométrica hay en la interfase aceite-agua? b) Ídem en el fondo del barril.

Solución:

a) $p_{man\ A} = \rho_{ac} \cdot g \cdot h_{ac} = 600 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}12 = 705{,}6$ Pa

b) $p_{man\ B} = p_{man\ A} + \rho_{ag} \cdot g \cdot h_{ag} = 705{,}6 + 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}25 = 3155{,}6$ Pa

2- En el manómetro de la figura, a) ¿Cuánta presión absoluta hay en la base del tubo en U? b) ¿Y en el tubo abierto, 4 cm debajo de la superficie libre? c) ¿Cuánta presión absoluta tiene el aire del tanque? d) ¿Cuánta presión manométrica tiene el aire de la ampolla en Pa?



Solución:

980 milibares = 98.000 Pa

a) $p = p_{atm} + \rho g y_2$

$p = 98.000 + 13.600 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}07 =$ 107.330 Pa

b) $p = p_{atm} + \rho g(y_2 - y_1) = 98.000 + 13.600 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}04 = 103.331$ Pa

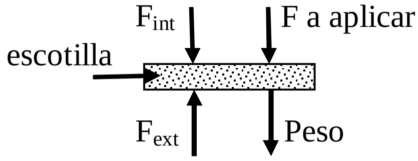
c) La p_{abs} calculada en b) es la misma p_{abs} que hay en la superficie libre de Hg en la rama de la izquierda. Por lo tanto la respuesta es 103.331 Pa.

d) $p_{man} = p_{abs} - p_{atm} = (103.331 - 98.000)$Pa = 5.331 Pa

3- Un cortocircuito deja sin electricidad a un submarino que está 30 m bajo el nivel del mar. Para escapar, la tripulación debe empujar hacia afuera una escotilla en el fondo, que tiene un área de 0,75 m^2 y pesa 300 N. Si la presión interior es de 1 atm, ¿cuánta fuerza hacia abajo se debe ejercer sobre la escotilla para abrirla?

Solución:

$F = F_{ext} - F_{int} - P = [p_{ext} - p_{int}]S - P$
$= [(\rho_{ag} \cdot gh + p_{atm}) - (p_{atm})]S - P$
$= \rho_{ag} \cdot gh \cdot S - P = (1030 \cdot 9{,}8 \cdot 30 \cdot 0{,}75 - 300)N$
$= 226.815$ N



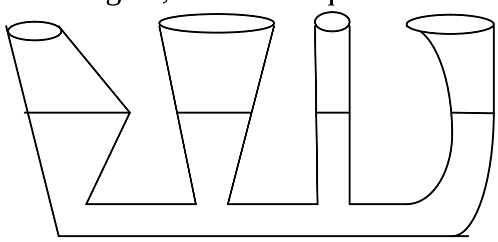
Vasos comunicantes.

A- CON UN MISMO LÍQUIDO.

Hemos estudiado que dentro de una misma masa líquida,"puntos a igual profundidad h, tienen la misma presión". Esta es una frase típicamente reversible, donde si permuto las posiciones de las palabras profundidad y presión, la nueva afirmación, también es válida:

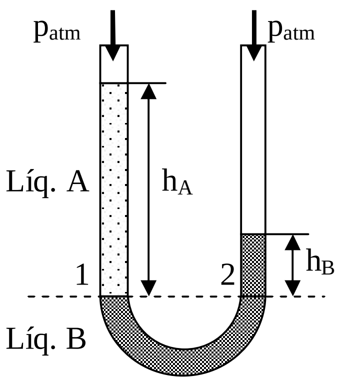
"Puntos a igual presión, deben estar a la misma profundidad".

Esto puede comprobarse en el dispositivo de la figura, donde el líquido alcanza la misma altura en todas las columnas, sin importar cuál sea su forma o tamaño. Esto explica también por qué la superficie libre de los líquidos siempre está perfectamente nivelada. Si uno de los vasos de la figura tuviera una altura de líquido diferente a la de los demás vasos, la presión en el fondo sería diferente a la de los demás vasos, lo que provocaría una circulación de líquido dentro del recipiente, que sólo cesaría cuando tales presiones se igualen.



En los vasos comunicantes el nivel alcanzado por el líquido en reposo es el mismo en todos los recipientes, independientemente de su tamaño y forma.

B- CON DOS LÍQUIDOS NO MISCIBLES.



Si se introducen dos líquidos no miscibles, como por ejemplo A = agua y B = mercurio dentro del tubo en U de la figura, los niveles de las superficies libres de ambas ramas son diferentes. No se cumple el lema anterior, porque ahora ya no tenemos un único líquido.

Los puntos 1 y 2 están al mismo nivel, el 1 en la interfase A-B y el 2 en la otra rama, dentro de B. Los dos puntos están dentro de un mismo líquido y a un mismo nivel; por lo tanto: $p_1 = p_2$

Desarrollando: $p_{atm} + \rho_A \cdot g \cdot h_A = p_{atm} + \rho_B \cdot g \cdot h_B$

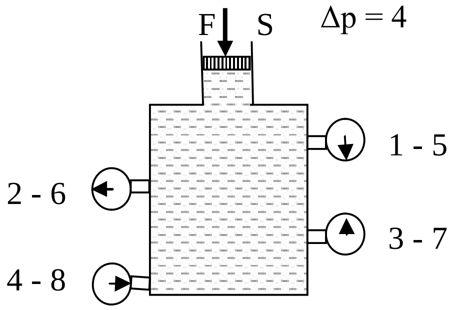
Ordenando:

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{\rho_B}{\rho_A}$$

Las alturas alcanzadas por las superficies libres de los dos líquidos medidas respecto del plano horizontal que pasa por la superficie de separación entre ambos, son inversamente proporcionales a sus pesos específicos.

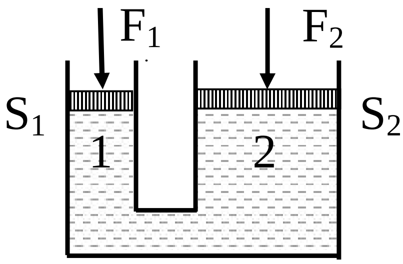
Principio de Pascal.

La sobrepresión ejercida sobre un líquido en equilibrio se transmite a todos los puntos de la masa líquida con igual valor.



Se entiende por sobrepresión a la diferencia entre la presión final y la presión inicial. Las presiones que indican los manómetros en la figura, son diferentes, ya que están ubicados a distintas alturas; no obstante, las sobrepresiones son iguales.

El científico francés Blas Pascal reconoció este hecho en 1653. La principal aplicación de este principio está en la prensa hidráulica, un dispositivo que permite multiplicar la fuerza. De hecho, Pascal construyó la primera prensa hidráulica.



I los émbolos están a igual nivel, entonces los puntos 1 y 2 están a la misma presión:

$$p_1 = p_2$$

Reemplazando,

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \rightarrow \quad F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$

Siendo el cociente del paréntesis mayor que 1, en esa relación se verá multiplicada la fuerza. Luego $F_2 > F_1$.

Los elevadores hidráulicos para automóviles, los frenos hidráulicos, las compactadoras y las estampadoras son ejemplos de dispositivos basados en este principio.

La fuerza de empuje $\left(\vec{E}\right)$ y su punto de aplicación.

Supongamos tener un recipiente de forma prismática, conteniendo un líquido; cada una de las caras laterales del recipiente soporta una fuerza distribuida ejercida por el líquido, en contra de ellas. La resultante de esa fuerza distribuida recibe el nombre de fuerza de empuje $\left(\vec{E}\right)$:

$$E = p_{med} \bullet S$$

donde como p no es constante en toda la cara lateral sino que se incrementa linealmente con la profundidad, debemos poner una p_{media} tal que $p_{med} = \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot h$.

Por otra parte, si se trata de una cara rectangular, será: $S = h \bullet l$. Reemplazando:

$$E = \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot h^2 \bullet l$$

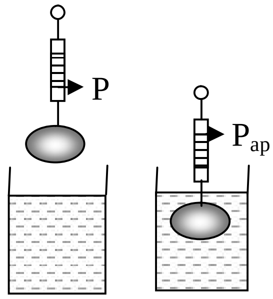
Las coordenadas del punto de aplicación de esta fuerza son:

$$\text{Centro de empuje: } \left(\frac{1}{2}l; \frac{2}{3}h\right)$$

Principio de Arquímedes.

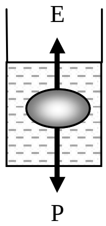
Arquímedes nació en Grecia en el -278 y murió en el -212 cuando un destacamento de soldados romanos irrumpió en su casa y le dio muerte. Vivió en

Siracusa, capital de la colonia griega en Sicilia. Descubrió el principio de la palanca y sus diversas aplicaciones, las que produjeron gran sensación en el mundo antiguo. Pero probablemente su descubrimiento más importante haya sido su ley sobre la pérdida aparente de peso que sufren los cuerpos sumergidos dentro de un fluido.



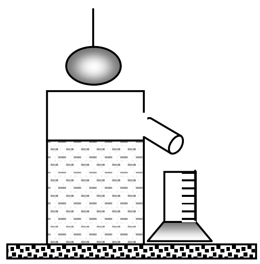
Desde muy antiguo era un hecho conocido pero inexplicable que cuando se sumerge un cuerpo en agua, parece pesar menos. Si P = mg y tanto m como g se mantienen invariablemente constantes, ¿por qué disminuía P?

Fue Arquímedes quien trajo la respuesta; el líquido aplica al cuerpo una fuerza en la misma dirección del peso y con sentido opuesto, de modo que el módulo de la resultante se reduce. Actualmente damos a esta fuerza los nombres de *fuerza de flotación o de empuje*.



$$\boxed{E = P - P_{ap}}$$

Pero Arquímedes fue más allá. Encontró que el valor de la *fuerza de flotación o de empuje* (módulo de $\vec{E}$) podía calcularse de otra manera. Si se llena el recipiente de la figura de la derecha hasta enrasar con su pico de derrame y se sumerge luego el cuerpo, recogiendo el líquido derramado, el peso de dicho líquido derramado es el valor de la fuerza de flotación:



$$P_{\text{líq. derramado}} = E$$

Por lo tanto:

$$E = \rho_l \bullet g \bullet V_{cs}.$$

El enunciado del principio de Arquímedes es:

Si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, éste ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo, igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

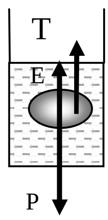
Problemas.

1- Una pesa metálica de 400 N tiene un volumen de $5x10^{-3}$ m^3. Por medio de una cuerda, se la suspende dentro de un líquido de 760 kg/m^3 de densidad. Calcular los valores a) del empuje E; b) de la tensión T en la cuerda.

<u>Solución</u>:

a) $E = \rho_l \bullet g \bullet V_{cs} .= 760 \bullet 9{,}8 \bullet 5x10^{-3} = 37{,}24$ N

b) $T = P - E = (400 - 37{,}24)N = 362{,}76$ N



2- Un objeto pesa 500 N en el aire y 450 N cuando está totalmente sumergido en agua. Hallar a) el volumen de la pieza; b) la densidad de la aleación.

<u>Solución</u>:

$E = P - Pa = (500 - 450)N = 50$ N

a) $E = \rho_l \bullet g \bullet V_{cs}. \rightarrow \quad Vcs = \frac{E}{\rho_l . g} = \frac{50}{1000 \cdot 9{,}8} = 5{,}1x10^{-3}$ m^3

b) $\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{P_c}{g \cdot V_c} = \frac{500}{9{,}8 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}} = 10.000 \frac{kg}{m^3}$

3- Una plancha de hielo flota en un lago de agua dulce. ¿Cuál es el mínimo volumen que debe tener para que una mujer de 45 kg pueda pararse sin mojarse los pies?

Solución:

Condición de flotación: $P = E$ siendo $P = P_{hielo} + P_{mujer}$.

$$\rho_h \cdot g \cdot V_h + 45 \cdot 9{,}8\ N = \rho_l \cdot g \cdot V_h$$

$$g \cdot V_h\ (\rho_l - \rho_h) = 441\ N$$

$$V_h = \frac{441\ N}{9{,}8 \cdot (1000-920)\ N/m^3} = 0{,}5625\ m^3$$

Tensión superficial.

Es la propiedad que tiene la superficie libre de un líquido (o la superficie de interfase entre dos líquidos) por la cual se comporta como una membrana en tensión.

Este fenómeno se debe a que las moléculas del líquido ejercen fuerzas de atracción entre sí. La fuerza neta sobre una molécula dentro del volumen del líquido es cero, pero una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen. Por esta razón, el líquido tiende a reducir al mínimo su área superficial, tal como lo hace una membrana estirada.

Algunos ejemplos que ilustran este fenómeno son:

1- Algunos objetos como un clip o un alfiler pueden descansar sobre la superficie libre del agua, a pesar de tener una densidad muy superior a la del agua.

2- Al introducir una brocha o un pincel en el agua, todas sus cerdas se unen en un haz.

3- Al pasar un peine por debajo del chorro de agua de una canilla, se forma una película entre diente y diente. Este mismo fenómeno es el que mantiene el cabello bien peinado cuando está mojado.

4- Las gotas de lluvia en caída libre tienen forma esférica (no de lágrima), porque una esfera tiene menor área superficial para un volumen dado que cualquier otra forma.

5- La formación de la gota en un gotero.

6- Las pompas de jabón que hacemos soplando una película de solución jabonosa extendida sobre un aro de alambre.

Para hacer un buen lavado de la ropa, es necesario que el agua pueda pasar a través de los pequeños espacios que existen en la trama del tejido de la ropa, pero ello es dificultado por la tensión superficial. Para reducirla, se emplea agua caliente y jabón o detergentes; ambas cosas ayudan a reducir la tensión superficial.

La formación de meniscos en la superficie libre de líquidos en tubos, o en contacto con la pared del recipiente, también es consecuencia de la tensión superficial. Finalmente, si se escucha el sonido que produce el chorro de agua fría y el de agua caliente al caer sobre la pileta, se notará que esta última no golpea con la misma fuerza que la fría, pues su tensión superficial es menor.

Capilaridad.

Al estudiar vasos comunicantes vimos que el líquido alcanzaba el mismo nivel en todos los vasos. Del mismo modo, si introducimos verticalmente un tubo dentro de un recipiente con líquido, el nivel de la superficie libre es el mismo dentro del tubo que afuera. Sin embargo, si el tubo es muy delgado, es un capilar (delgado como un cabello) observaremos cosas diferentes. Según de qué líquido se trate, el líquido sube o baja dentro del tubo capilar, respecto del nivel en el recipiente. Lo primero ocurre cuando el líquido es miscible, o sea que moja las paredes del tubo o del recipiente; lo segundo en cambio, sucede cuando el líquido es no miscible. Este fenómeno se conoce con el nombre de capilaridad.

Algunos ejemplos que ilustran este fenómeno son:

1- El papel secante, absorbe la tinta derramada, y ella se extiende sobre el papel. Ello se debe a que las fibras del papel actúan como delgados tubos, promoviendo el fenómeno de la capilaridad.

2- Por el mismo motivo, una gota de café derramada sobre un terrón de azúcar, se extiende por todo el terrón.

Los fenómenos de capilaridad se contradicen con lo estudiado en la hidrostática. La ley de Jurin da una expresión matemática que describe este fenómeno. Según ella:

$$h = \frac{2 \cdot T \cdot \cos\,\theta}{r \cdot \rho \cdot g}$$

donde h es la altura de líquido (en el ascenso o descenso) dentro del tubo capilar.(m)

T es el valor de la tensión superficial. $\left(\frac{N}{m}\right)$

θ es el ángulo de contacto

r es la medida del radio del tubo capilar. (m)

ρ es la densidad del líquido. $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

g es la aceleración de la gravedad $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

La altura o ascenso capilar alcanzado por un líquido de tensión superficial conocida, en un tubo capilar, es inversamente proporcional al radio y a la densidad del líquido, a la vez que es directamente proporcional a su tensión superficial.

Generalmente la ley de Jurin se usa para conocer el valor de la tensión superficial, despejando T de su fórmula.

Hidrodinámica I

(LÍQUIDOS IDEALES)

Desde hace un tiempo circula por internet un mail que cuenta una interesante historia que en este momento resulta ideal como introducción al tema de la clase de hoy. Por eso lo voy a leer, y como verán enseguida, se trata de una gansada; dice:

"La próxima temporada, cuando veas los gansos emigrar dirigiéndose hacia un lugar más cálido para pasar el invierno, fíjate que vuelan en forma de V, de V corta. Tal vez te interese saber el por qué lo hacen en esa forma. Lo hacen porque al batir sus alas, cada pájaro produce un movimiento en el aire que ayuda al pájaro que va detrás de él. Volando en V, la bandada de gansos aumenta por lo menos un 70% su capacidad de vuelo, en comparación con la de un pájaro que vuela solo. Cada vez que un ganso sale de la formación, siente inmediatamente la resistencia del aire; se da cuenta de la dificultad de hacerlo solo y rápidamente vuelve a la formación para beneficiarse del compañero que va adelante.

Cuando el líder de los gansos se cansa, se pasa a uno de los lugares de atrás y otro ganso toma su lugar. Los gansos que van atrás graznan para alentar a los que van adelante a mantener la velocidad. Finalmente cuando un ganso se enferma o cae herido por un disparo, otros dos gansos salen de la formación y lo siguen para apoyarlo y protegerlo".

Hasta aquí el relato. Justamente cuestiones como ésta, que se ocupan del movimiento de un cuerpo dentro de un fluido, o del movimiento de los fluidos, como las aguas de un río, o los remolinos del humo de un cigarrillo en el aire, son las que trata la hidrodinámica. Encontraremos aquí una respuesta a preguntas tales como ¿por qué vuelan los aviones? o cómo hace un jugador de fútbol para imprimir a la pelota una trayectoria curva, y así eludir la barrera y hacer un gol.

HIDRODINÄMICA es la parte de la física que se ocupa del estudio de los fenómenos vinculados con los fluidos en movimiento.

Como hicimos cada vez que comenzamos un tema nuevo, definiremos a continuación una serie de palabras y frases de uso común en este tema:

En lo que hace al movimiento de los fluidos, éste puede ser de dos formas: *estacionario o no estacionario.* Depende de si el vector velocidad $\vec{v}$ del fluido, en un punto cualquiera dentro del espacio atravesado por el fluido, se conserva constante en el tiempo, en todos sus aspectos (módulo, dirección y sentido) o no. De manera que:

Es estacionario si $\vec{v} = f(x; y; z)$

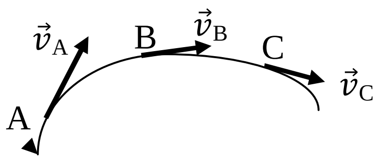
Es no estacionario si $\vec{v} = f(x; y; z; t)$

El primero ocurre cuando el fluido se mueve con baja velocidad y se llama también *régimen laminar*. El segundo se caracteriza por la presencia de remolinos, como en los rápidos de un río, y el $\vec{v}$ cambia en forma errática instante a instante y de punto a punto; a este movimiento también se lo llama de *régimen turbulento.*

Ambos casos pueden ser comparados con el movimiento de la gente; el régimen laminar es como la marcha de los soldados que avanzan en forma ordenada a mientras desfilan; en cambio el régimen turbulento es como el de los peatones en una terminal ferroviaria en hora pico.

Línea de corriente.

Sean A, B y C tres puntos dentro del recorrido de un fluido en movimiento. En el régimen estacionario los $\vec{v}$ en cada uno de ellos permanece constante en el tiempo. La línea envolvente que hace tangencia con cada uno de estos $\vec{v}$, recibe el nombre de línea de corriente.



Tubo de corriente.

La parte de líquido limitada por las líneas de corriente, recibe el nombre de *tubo de corriente o filete líquido o vena líquida*. Como $\vec{v}$ es en cada punto tangente a las líneas de corriente, lo será también a las superficies del tubo de corriente, por lo que las partículas del líquido no cruzan durante su movimiento las paredes del tubo de corriente.

Fluido ideal o perfecto.

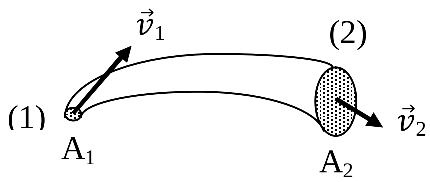
Para que un fluido sea ideal o perfecto, debe reunir dos requisitos:

a) ser incompresible, es decir que su densidad sea constante, tanto en el espacio como en el tiempo.

b) ser no viscoso, es decir que carezca de fuerzas de rozamiento interno.

En la clase de hoy estudiaremos la hidrodinámica de los fluidos ideales.

La ecuación de la continuidad.

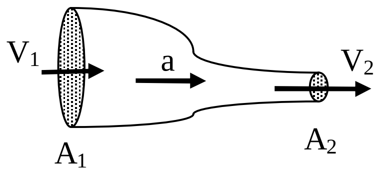


Sea un fluido ideal circulando dentro de un tubo de corriente y consideremos dos lugares (1) y (2). En un Δt cualquiera no puede acumularse ni desacumularse fluido entre las secciones A_1 y A_2, ya que de suceder tal cosa, el fluido variaría su densidad, lo que no puede suceder por tratarse de un fluido ideal. Por lo tanto, en todo momento la cantidad que ingresa a través de A_1 debe ser igual a la que sale por A_2. Se podrá poner:

$$\left(\frac{Vol}{t}\right)_1 = \left(\frac{Vol}{t}\right)_2 \quad \rightarrow \quad v_1 \bullet A_1 = v_2 \bullet A_2 = Q \text{ (caudal)} = \text{constante}$$

Esta expresión es conocida con el nombre de ecuación de la continuidad; la constante Q recibe el nombre de gasto o caudal y se expresa en m^3/s.

Esta ecuación nos muestra que para una misma vena líquida, las velocidades son inversamente proporcionales a las medidas de las secciones. Si entre dos secciones la velocidad varía, entonces tenemos una aceleración. En el mismo sentido de la aceleración tenemos una fuerza; esta fuerza es provocada por una diferencia de presiones. En la figura derecha:



$A_1 > A_2$
$v_1 < v_2$
$p_1 > p_2$

A mayor sección corresponde mayor presión y menor velocidad.

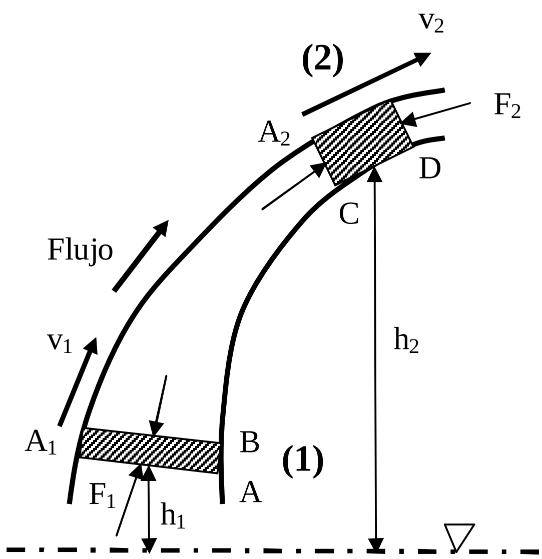
Teorema de Bernoulli.

Este teorema se constituye en la ley fundamental de la mecánica de los fluidos; puede deducirse a partir del teorema del trabajo y la energía. Daniel Bernoulli (1700 – 1782), nació en Holanda, aunque su verdadera nacionalidad es Suiza; fue profesor de Matemática en la Academia Rusa de San Petersburgo; en 1738 dedujo este teorema que hoy lleva su nombre y que relaciona la presión con la velocidad y la altura para un fluido circulando en régimen estacionario dentro de una tubería no horizontal. Este teorema NO SE CUMPLE en el régimen no estacionario o turbulento.

A continuación lo deduciremos para el caso particular de tener un fluido ideal. La figura de la próxima página muestra una vista en sección de un cierto tramo de tubería; se destaca una pequeña porción de fluido a la que le haremos su seguimiento durante su avance a lo largo de la tubería. Los números (1) y 2) indican dos lugares cualesquiera en la tubería, cada uno caracterizado por tener valores de h, v y A propios. Supondremos también que el fluido se mueve con sentido desde (1) hacia (2).

Aplicaremos la expresión: $W_{F\,ext} = \Delta Em = Em_2 - Em_1$

Nos ocuparemos previamente del primer miembro de la expresión de arriba. El cilindro de líquido de la figura soporta dos fuerzas: una sobre su tapa inferior, ejercida



por el líquido que viene atrás y que realiza un trabajo positivo desplazando al cilindro desde 1) hasta (2). La otra fuerza actúa sobre su cara superior y es ejercida por el líquido que está adelante; el trabajo de esta fuerza es negativo ya que los sentidos de dicha fuerza y del desplazamiento son opuestos. Podemos poner:

$$W_{F\,ext} = W_{Finf} - W_{Fsup}.$$

$$= \int_A^C F_{inf} \cdot dl - \int_B^D F_{sup} \cdot dl$$

Desglosando integrales:

$$W_{F\,ext} = \left[\int_A^B p \cdot A \cdot dl + \int_B^C p \cdot A \cdot dl\right] - \left[\int_B^C p \cdot A \cdot dl + \int_C^D p \cdot A \cdot dl\right]$$

Las integrales del 2° y 3° término se cancelan por ser iguales y opuestas; queda:

$$W_{F\,ext} = \int_A^B p \cdot A \cdot dl - \int_C^D p \cdot A \cdot dl$$

Por ser pequeñas las respectivas distancias AB y CD, las presiones y áreas pueden suponerse constantes sin error apreciable, con lo que resulta:

$$W_{F\,ext} = p_1 \bullet V - p_2 \bullet V$$

Retornando a la fórmula del principio y desarrollando cada término, ahora podemos poner:

$$p_1 \bullet V - p_2 \bullet V = [\, mgh_2 + ½\, mv_2^2] - [mgh_1 + ½\, mv_1^2]$$

$$mgh_1 + ½\, mv_1^2 + p_1 \bullet V = mgh_2 + ½\, mv_2^2 + p_2 \bullet V$$

La igualdad anterior nos dice que la suma de los tres términos de esta expresión arroja el mismo resultado, cuando se los calcula para el punto (1) que cuando se los calcula para el punto (2). Y teniendo en cuenta que estos puntos han sido elegidos arbitrariamente, deberá interpretarse que dicha suma tiene un resultado constante en cualquier sección de la tubería donde se la calcule. Por lo tanto, generalizando para una sección cualquiera podremos poner:

$$mgh + ½\, mv^2 + p \bullet V = Cte$$

Dividiendo por V (volumen) todos los términos de la igualdad:

$$\frac{m \cdot g}{V} \cdot h + \frac{m}{2 \cdot V} \cdot v + p = Cte$$

Y como $\frac{m}{V} = \rho$ queda finalmente:

$$\boxed{\rho g h + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + p = Cte}$$

Ésta es la expresión del teorema de Bernoulli. Cada uno de sus términos representa una presión; el primero es la *presión hidrostática*, el segundo la *presión cinética* y el tercero a la *absoluta* (no manométrica), también llamada *presión estática*.
La suma de los dos primeros términos suele recibir el nombre de *presión hidrodinámica*.

El teorema de Bernoulli puede enunciarse así:

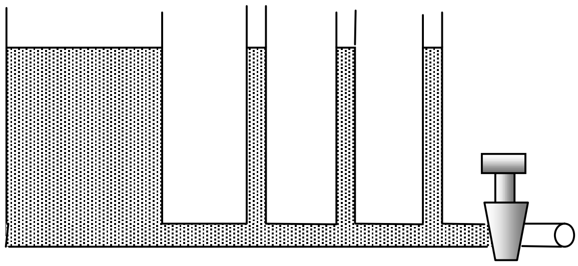
En todo fluido ideal en régimen estacionario, la suma de las presiones hidrostática, cinética y estática, es constante.

Para una mejor comprensión del Teorema de Bernoulli, consideraremos a continuación distintos casos a partir de suponer que al orificio de salida de un tanque, se le ha conectado un tubo largo. Supondremos que el nivel de líquido dentro del tanque se mantiene (o es mantenido) constante.

<u>1° CASO: LA LLAVE L AL FINAL DEL TUBO LARGO, ESTÁ CERRADA</u>.

En distintos lugares a lo largo del tubo se han colocado unos tubos verticales, largos y delgados, que van a servir para medir la presión; por eso se los llama *tubos manométricos.*

Si la llave L está cerrada, no hay circulación de líquidos; no se trata de un problema de hidrodinámica sino de hidrostática; todo el conjunto de la figura se comporta como un vaso comunicante, y como hemos estudiado, en todos los vasos el líquido alcanza el mismo nivel.



¿Cuál es la presión que miden estos tubos manométricos, también llamados piezométricos? Revisemos la ecuación de Bernoulli: su primer término proviene de la energía potencial, por lo que solo aparece cuando existe un Δh en la tubería; pero aquí la tubería es horizontal y $\Delta h = 0$. El primer término de la ecuación de Bernoulli es nulo.

Su segundo término contiene la velocidad y proviene de la energía cinética; en el caso que estamos considerando, el líquido no tiene movimiento y por lo tanto el segundo término de la ecuación de Bernoulli también es nulo.

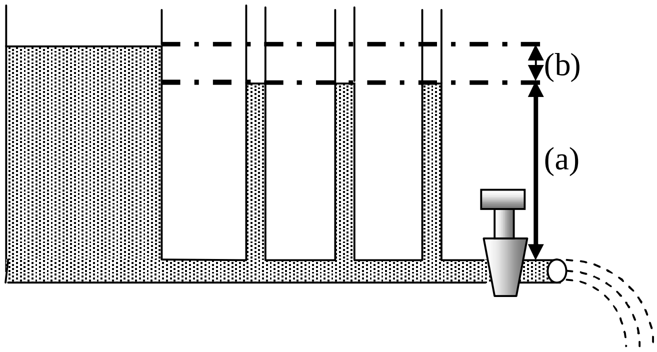
Solamente nos queda el tercer término de la ecuación de Bernoulli, el de la presión estática o absoluta. Por lo tanto, la conclusión es:

Los piezómetros miden presiones estáticas o absolutas.

<u>2° CASO: LLAVE L ABIERTA; TUBERÍA HORIZONTAL DE SECCIÓN CONSTANTE</u>.

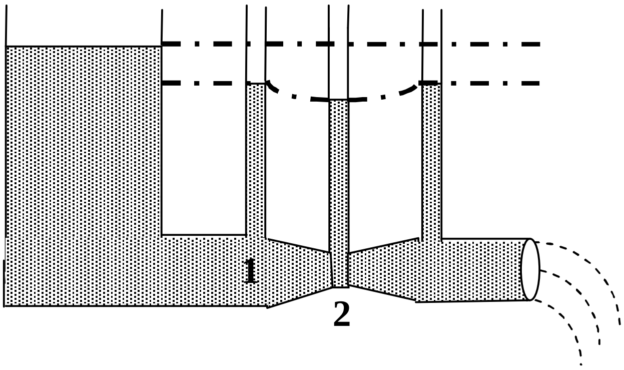
En el caso anterior, el nivel de los piezómetros era el mismo nivel del tanque; ahora ese nivel ha bajado por igual en todos los piezómetros. ¿Qué interpretación le damos a la lectura de los piezómetros? Recurrimos nuevamente a la ecuación de Bernoulli; su primer término continúa siendo nulo, porque la tubería es horizontal y $\Delta h = 0$. Pero ahora el segundo término no es nulo porque hay energía cinética. Pero como la suma de los 3 términos de la ecuación de Bernoulli debe mantenerse constante, la presión cinética que aparece lo hace a expensas de la presión estática.

Como los piezómetros miden la presión estática y ella ha disminuido, el nivel de líquido en los piezómetros es menor. En la figura, la altura (a) mide la presión estática y la altura (b) mide la presión cinética.



<u>3° CASO</u>

<u>TUBERÍA HORIZONTAL DE SECCIÓN VARIABLE</u>.

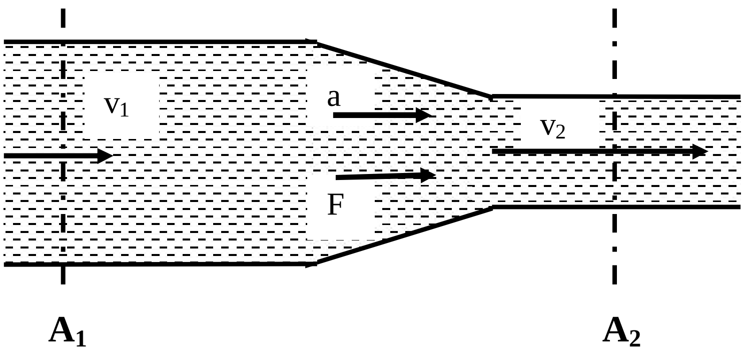


El caudal Q a través de cualquier sección debe ser el mismo, ya que si no fuera así, habría acumulación o desacumulación de líquido entre dos secciones, lo que no puede suceder por ser el líquido incompresible. Si en la tubería de la figura llamamos A_1 y A_2 a las secciones mayor y menor, deberá cumplirse que

$$A_1 \bullet v_1 = A_2 \bullet v_2$$

$$\text{Si } A_1 > A_2 \quad \rightarrow \quad v_2 > v_1$$

Si existe variación en la velocidad, entonces hay aceleración entre las secciones (1) y (2); la aceleración está representada por un vector que va de izquierda a derecha. Como donde hay aceleración hay fuerza, ésta también va de izquierda a derecha; en un líquido, la fuerza se manifiesta como una presión. Resulta entonces que:



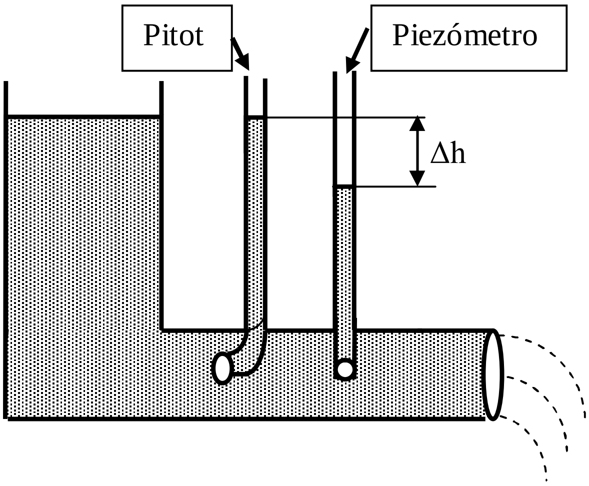
A mayor área de sección corresponde mayor presión estática o absoluta.

Los tubos piezométricos de la figura confirman esta observación; recordar que ellos sólo miden la presión estática; la diferencia entre el nivel del líquido en los piezómetros y el tanque mide la presión cinética (2° término de la ecuación de Bernoulli) y ella es mayor en la sección (2) donde v es mayor. El 1° término de la ecuación de Bernoulli continúa siendo nulo por ser la tubería horizontal.

Las conclusiones obtenidas que relacionan sección con velocidad y presión, nos conduce también a que:

Las presiones estáticas son inversamente proporcionales a las velocidades.

<u>4° CASO: TUBERÍA HORIZONTAL DE SECCIÓN CONSTANTE</u>.



La novedad va a consistir en que introduciremos al lado del tubo piezométrico, otro tubo abierto en ambos extremos, pero acodado en su parte inferior donde además su calibre se reduce; además se lo instala de modo que su boca enfrente a la corriente de líquido por la tubería. Un tubo como éste recibe el nombre de *tubo de Pitot*. El líquido que penetra dentro del Pitot, sube por dos razones: una, la presión absoluta p, la misma que mide el piezómetro; otra, por efecto de la velocidad del líquido.

Entonces, el nivel del líquido dentro de un Pitot será mayor que en el piezómetro, y si la tubería es horizontal, el nivel del Pitot debe ser igual al nivel del tanque. La figura ilustra lo dicho.

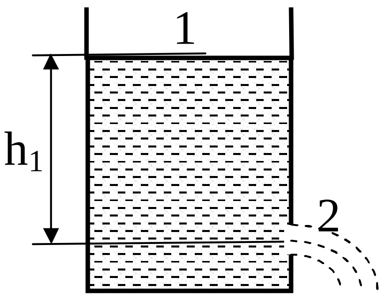
La presión cinética en una sección de la cañería, se calcula multiplicando la diferencia de niveles entre el Pitot y el piezómetro, por el peso específico del líquido.

Lo recuadrado se expresa matemáticamente así:

$$P_{cinética} = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Aplicaciones del Teorema de Bernoulli.

1- SALIDA DE UN LÍQUIDO POR UN ORIFICIO.



Nos proponemos calcular la velocidad con que sale el líquido por el orificio, en un tanque como el que muestra la figura. La expresión a la que llegaremos, es conocida con el nombre de Teorema de Torricelli.

Elegiremos un punto (1) en la superficie libre del líquido en el tanque y un punto (2) en el punto medio del orificio de salida. Nuestro nivel de referencia será el del punto (2). Aplicando el Teorema de Bernoulli a los puntos (1) y (2), ponemos:

$$\rho g h_1 + \tfrac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \rho g h_2 + \tfrac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + p_2$$

donde $v_1 = 0$ y $h_2 = 0$. Además $p_1 = p_2 = p_{atm}$ se cancelan. Nos queda:

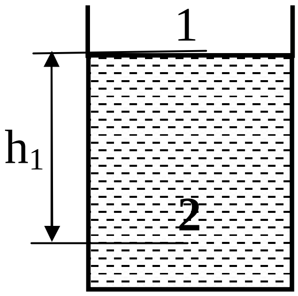
$$\rho g h_1 = \tfrac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

Simplificando ρ y despejando v_2: $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$

Siendo h_1 la altura del nivel de líquido respecto del punto medio del orificio. Observar que la fórmula obtenida para la velocidad es la misma fórmula de velocidad para una caída libre. El Teorema de Torricelli se enuncia así:

La velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en una pared plana y delgada, es la misma que adquiriría cayendo libremente en el vacío, desde la superficie libre de nivel hasta el centro del orificio.

2- LAS ECUACIONES DE LA HIDROSTÁTICA.



Las ecuaciones de la hidrostática no son más que un caso particular del Teorema de Bernoulli, para cuando v = 0 en todos los puntos. Por ejemplo, la expresión de la presión en un punto dentro de una masa líquida, como el (2), puede ser deducida aplicando el Teorema de Bernoulli entre los puntos (1) (en la superficie libre) y (2) en un lugar cualquiera. Nuestro nivel de referencia será el del punto (2).

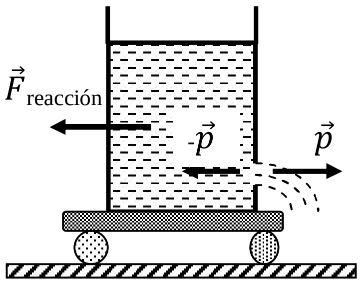
$$\rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + p_2$$

Los términos con v son nulos; $h_2 = 0$; además $p_1 = p_{atm}$. Nos queda:

$$p_2 = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

3- PROPULSIÓN POR ACCIÓN Y REACCIÓN.

Si se coloca un recipiente lleno de agua, con un orificio abajo, sobre la plataforma de un carrito, como muestra la figura, éste se pondrá en movimiento como una consecuencia del principio de acción y reacción. Mientras el chorro es despedido hacia la derecha (acción), el carrito es impulsado hacia la izquierda (reacción).



El funcionamiento de los motores reactivos y los cohetes se basan en la reacción del chorro de gas que se expulsa. El movimiento reactivo no necesita de la atmósfera para su realización.

La fuerza que mueve al carrito es la fuerza de reacción. ¿Cómo se calcula dicha fuerza? Llamaremos A al área del orificio, ρ a la densidad del líquido que fluye, y v a la velocidad de salida del líquido por el orificio. De modo que la masa expulsada puede expresarse como:

$$\text{Masa} = \rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t$$

La cantidad de movimiento $\vec{p}$ trasmitida por el recipiente al líquido que sale es:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = (\rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t)\vec{v}$$

Por el principio de acción y reacción el recipiente recibe del líquido que sale, (en el transcurso de ese Δt) una cantidad de movimiento igual y contraria: $-\vec{p}$. Visto del lado del recipiente, podemos poner que:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p_f} - \vec{p_0} = -\vec{p} - 0 = -\vec{p} \qquad \vec{F}\Delta t = -\vec{p}$$

$$\vec{F} = \frac{-(\rho a V \Delta t)\vec{v}}{\Delta t} = -\rho A v \cdot \vec{v} \qquad \left|\vec{F}\right| = \rho A |\vec{v}|^2$$

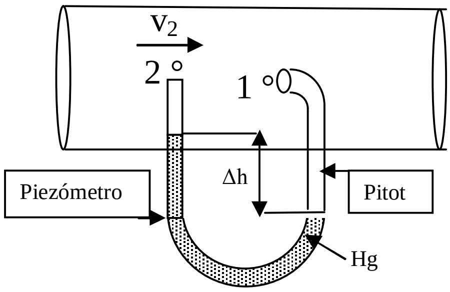
Reemplazando v por la fórmula del teorema de Torricelli de la velocidad de salida de un líquido por un orificio: v = $\sqrt{2gh}$, queda:

$$F = 2\rho gAh$$

Donde $\rho gh = p_{hidrostática}$. Finalmente:

$$F\ (\text{de reacción}) = 2 \bullet A \bullet p_H.$$

4- Medición de velocidades en una tubería, con un tubo Pitot.



Aplicando el Teorema de Bernoulli:

$$\rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho \bullet v_1^2 + p_1 = \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho \bullet v_2^2 + p_2$$

Si la tubería es horizontal como en el dibujo, entonces $h_1 = h_2$ y los primeros términos de ambos miembros se simplifican. Por otra parte, en la boca del Pitot, $v_1 = 0$ ya que de otro modo estaría entrando líquido en el tubo. Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli se reduce a:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho \bullet v_2^2$$

El valor de $p_1 - p_2$ queda medido por el desnivel Δh del mercurio, de modo que:

$$P_1 - p_2 = \rho'_{Hg} \bullet \Delta h \bullet g$$

Igualando los segundos miembros: $\frac{1}{2}\rho \bullet v_2^2 = \rho'_{Hg} \bullet \Delta h \bullet g$

Finalmente, despejando v2: $v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \rho'_{Hg}}{\rho}} \cdot \sqrt{\Delta h}$

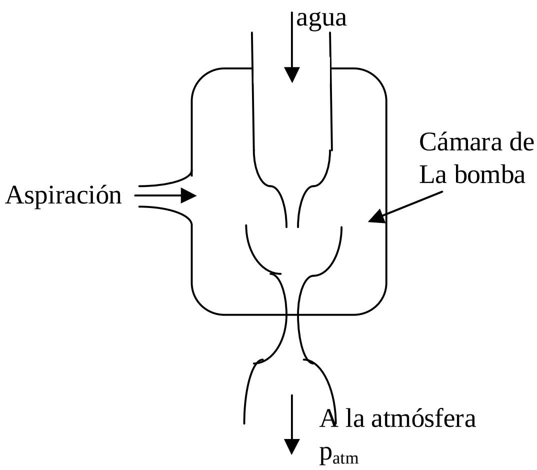
La primera raíz contiene únicamente factores constantes, o sea que tiene un valor fijo, que denominaremos K. Entonces la expresión final será:

$$v_2 = K \cdot \sqrt{\Delta h}$$

Cálculo de la constante K, para el caso que el líquido que circula fuera agua:

$$K = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \rho_{Hg}}{\rho_{agua}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 13.600}{1.000}} = 16{,}32\ \frac{m^{1/2}}{s}$$

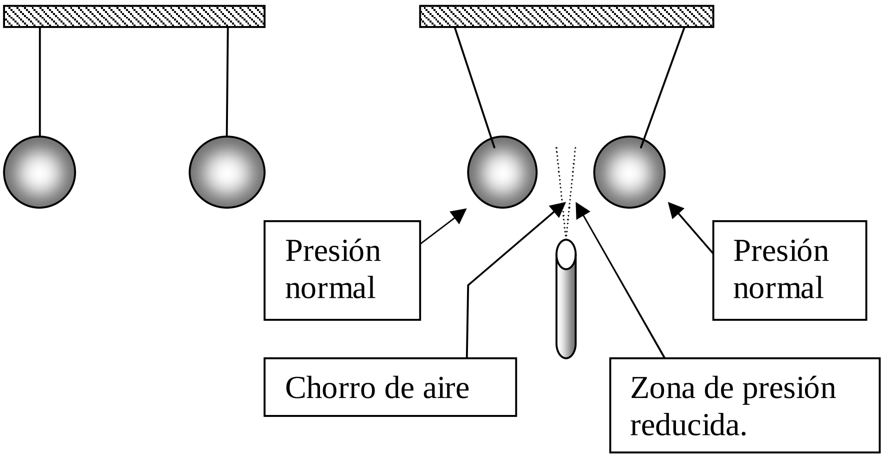
5- Trompa de agua



La figura muestra un dispositivo simple que permite extraer aire ú otro gas de un recinto, produciendo un vacío moderado. El chorro de agua ingresa por arriba y sale por abajo a un tubo comunicado con la atmósfera. El estrechamiento obliga al agua a que gane velocidad, por lo que se origina una zona de baja presión que se localiza en la cámara de la bomba. Esta cámara está comunicada con el tubo de aspiración, haciendo posible evacuar el aire ú otro gas hasta una presión de $\frac{1}{7}$ de la atmosférica (unos 100 mm Hg). El aire que se extrae se captura por el chorro de agua y se expulsa a la atmósfera.

6- Hechos paradojales.

El Teorema de Bernoulli permite explicar una serie de hechos paradojales tales

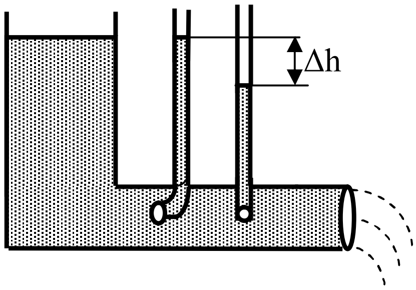


como:

a) Las pelotas de ping-pon de la figura se aproximan cuando se hace pasar un chorro de aire entre ambas. La velocidad del aire hace que aumente la presión cinética, obligando a que la presión absoluta disminuya generando una zona de depresión. Lo mismo puede hacerse con la llama de dos velas, soplando con un tubo entre ambas: las llamas se aproximan.

b) Otros casos son el pulverizador y el carburador del automóvil, que funcionan basados en este principio.

Problemas.



1- Por una tubería de 10 cm de diámetro circula un líquido ideal en el que se introduce un tubo piezométrico y un tubo Pitot. La diferencia de nivel entre los meniscos es Δh = 10 cm. Determinar el caudal.

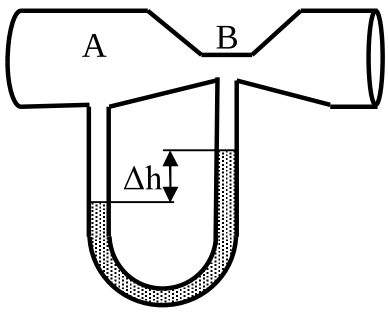
Solución:

$$p_{\text{cinética}} = \frac{1}{2}\,\rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}10} = 1{,}40\ \frac{m}{s}$$

$$Q = A \cdot v = \pi \cdot r^2 \cdot v = 3{,}14 \cdot (0{,}05\ m)^2 \cdot 1{,}40\ m/s = 0{,}010995\ m^3/s = 11\ \text{litros/s}$$

2- El tubo de la figura tiene una sección transversal de $A_A = 36\ cm^2$ en las partes anchas, y de $A_B = 9\ cm^2$ en el estrechamiento. Cada 5 segundos salen del tubo 27 litros de agua. Calcular: a) las velocidades v_A y v_B (en m/s), b) La diferencia de presiones Δp (en Pa) c) La diferencia de alturas Δh (en m).



DATOS: $\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$ $\rho_{Hg} = 13.600\ kg/m^3$

Solución:

Caudal: $Q = \frac{27\ litros}{5\ s}$ 5,4 $\frac{litros}{s} = 0{,}0054\ \frac{m^3}{s}$

$Q_A = Q_B$ Luego, $v_A \bullet A_A = v_B \bullet A_B$.

a) $v_A = \frac{Q_A}{A_A} = \frac{0{,}0054}{36x10^{-4}} = 1{,}5\ \frac{m}{s}$

$v_B = \frac{Q_B}{A_B} = \frac{0{,}0054}{9x10^{-4}} = 6{,}00\ \frac{m}{s}$

b) $p_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2$

$p_A - p_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}\left(1.000\ \frac{kg}{m^3}\right)(6^2 - 1{,}5^2)\frac{m^2}{s^2} = 16.875\ Pa$

c) $p_A - p_B = \rho \bullet g \bullet h$ Luego: $h = \frac{(p_A - p_B)}{\rho_{Hg} \cdot g} = 0{,}124\ m$

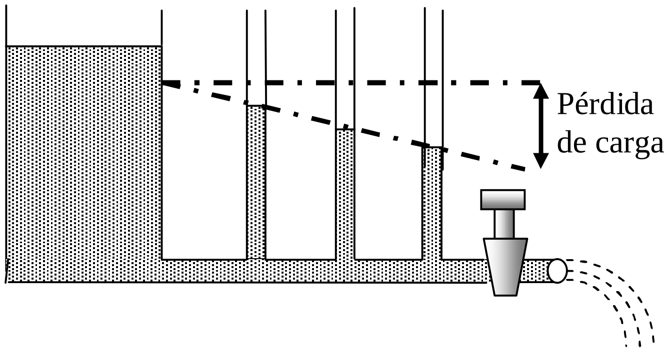
Hidrodinámica II

(LÍQUIDOS REALES)

La clase pasada hemos estudiado el Teorema de Bernoulli, una herramienta valiosa en la hidrodinámica. Sin embargo no debemos olvidar que ella solamente en válida cuando el flujo de líquido es laminar (régimen estacionario), y cuando se tiene un líquido ideal, es decir incompresible y sin viscosidad. Limitaciones incluso contradictorias ya que en la práctica no puede asegurarse el flujo laminar si no se tiene un poco de viscosidad.

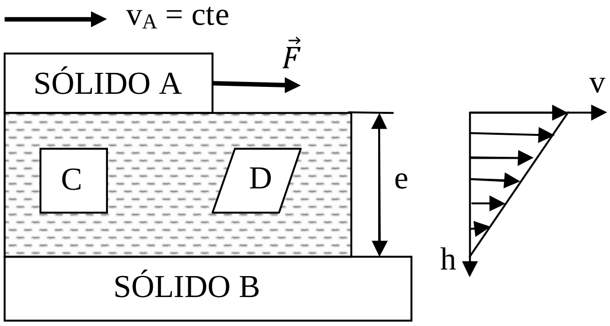
Los líquidos reales tienen siempre algo de viscosidad y esta clase estará dedicada a estudiar la hidrodinámica de ellos. Cuando un líquido real circula por una cañería, las fuerzas de rozamiento entre el líquido y las paredes de la cañería existen y son inevitables. Estas fuerzas realizan un trabajo a expensas de la energía que posee el sistema, y que finalmente es entregado al medio externo en forma de calor. Además del rozamiento contra las paredes, existen rozamientos dentro del fluido, entre láminas o porciones contiguas de líquido en movimiento relativo; estos rozamientos internos son una causa adicional de pérdida de energía.

Debido a ello el perfil real de las presiones en el caso que veníamos ejemplificando, de un tanque con un tubo de salida horizontal, será como el que muestra la figura. La presión que se pierde por rozamiento, crece con la longitud de la cañería, y se la llama *pérdida de carga*. En los oleoductos es necesario cada cierta distancia, instalar compre- sores para contrarrestar la pérdida de carga.



Viscosidad (η)

Llamamos viscosidad a la fricción interna en un fluido. La figura muestra una placa sólida A, apoyada sobre un fluido; para que ella se mueva con velocidad relativa constante respecto de otra placa sólida B, se necesita aplicarle a A una fuerza F en forma permanente, con un valor tal que contrarreste los rozamientos internos. Podemos imaginarnos al fluido, como un conjunto de láminas líquidas horizontales, una arriba de otra, a lo largo de todo el espesor e. Al moverse el fluido hacia la derecha, aparecen las fricciones internas, entre las láminas contiguas en contacto. De todas estas láminas líquidas, tanto aquella que está directamente en contacto con A, como la que lo está con B, permanecen adheridas a las superficies respectivas y no se mueven con relación a ellas. Mientras tanto en las restantes láminas se observa toda una distribución de velocidades, dando un perfil como el que se muestra en la figura. Así, una porción de líquido que inicialmente tuviera forma de cubo, como la C, terminaría adquiriendo una forma de rombo, como la D.



¿De qué depende el valor de la fuerza F? Depende:
a) del espesor de fluido e, con quien resulta inversamente proporcional, para una v dada.
b) del área A de la placa A con quien es directamente proporcional.
c) de la velocidad v con que se mueve la placa A, con quien es directamente proporcional.

Luego, $$F = \eta \bullet A \bullet \frac{v}{e}$$

Donde η (eta) es la constante de proporcionalidad; se llama *coeficiente de viscosidad* y su valor depende de dos cosas: del fluido y de la temperatura. Para encontrar las unidades en que se expresa η, se la despeja:

$$\eta = \frac{F \cdot e}{v \cdot A}$$

y se reemplaza. Así resulta, en el S.I. que las unidades son: $\frac{N \cdot s}{m^2}$

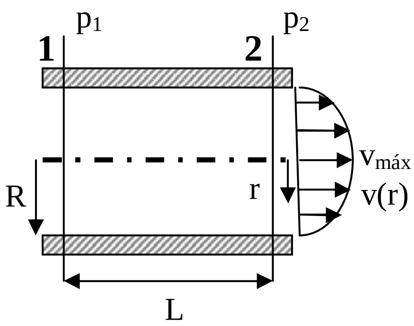
En la práctica es habitual trabajar con submúltiplos de esta unidad: el poise que es la décima parte del $\frac{N \cdot s}{m^2}$ y el centipoise, que es la milésima parte del $\frac{N \cdot s}{m^2}$.

Hay fluidos ligeros (que escurren con facilidad) como el agua y el alcohol etílico, y hay fluidos espesos (que escurren con dificultad) como la miel o una pintura.

Los coeficientes de viscosidad de todos los fluidos dependen notablemente de la temperatura. En los gases, a mayor temperatura corresponde mayor viscosidad, pero en los líquidos es al revés: a mayor temperatura corresponde menor viscosidad.

TABLA DE VISCOSIDADES (en centipoise)			
AGUA		GLICERINA	
t (°C)	η	t(°C)	η
0	1,78	2,8	4220
20	1,00	14	1390
100	O,28	27	490

Velocidades del fluido.



En un líquido viscoso que circula dentro de un tubo, la rapidez es distinta en distintos lugares de la sección. Junto a las paredes del tubo la capa de fluido se adhiere y su velocidad es nula. La velocidad máxima se alcanza en el eje del tubo. Si el flujo es laminar, el perfil de velocidades es parabólico.

La figura muestra un tubo en corte, por el cual circula un fluido hacia la derecha y se muestra la forma del perfil de velocidades en una sección. Llamando con p_1 y p_2 a las presiones sobre el líquido que circula por la cañería de radio R, en dos secciones A_1 y A_2, separadas por una distancia L, se puede deducir una expresión que permite calcular la velocidad v del líquido, a una distancia r del eje de la cañería. La fórmula es:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot (R^2 - r^2)$$

que es la ecuación de una parábola del tipo $x = k \bullet y^2$ como la representada por el perfil de velocidades de la figura.

<u>VELOCIDAD MÁXIMA</u>.

La velocidad máxima en un líquido circulando dentro de un tubo se encuentra en el eje, donde r = 0. Si en la fórmula de la velocidad [v = f(r)] hacemos este reemplazo, nos queda:

$$v_{máx} = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2$$

<u>VELOCIDAD MEDIA</u>.

La velocidad media (v_m) puede ser tomada como un promedio de velocidades:

$$v_m = \frac{v_{máx} + 0}{2} \qquad \rightarrow \qquad v_m = \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2$$

Ley de Poiseuille.

Poiseuille dedujo la ecuación que permite calcular el valor del caudal (Q) de líquido en la tubería. De acuerdo con la ecuación de la continuidad, $Q = v_m \bullet A$ donde v es la que habría en todos los puntos de la sección, como si el perfil de velocidades fuera rectangular y A representa al área de la sección; si ella es circular, $A = \pi \bullet R^2$. Reemplazando se obtiene la ecuación de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4$$

El número de Reynolds.

Cuando la rapidez de un líquido en un tubo supera cierto valor (*velocidad crítica*) el flujo deja de ser laminar (con perfil de velocidades parabólico como se estudió) y se convierte en turbulento, (un movimiento irregular con vórtices y torbellinos).

Se define el número de Reynolds (Re) como la relación: $Re = \frac{d \cdot v \cdot \rho}{\eta}$
donde d = diámetro del tubo; v = velocidad media del líquido; ρ = densidad; η = viscosidad.

Independientemente del sistema de unidades que se utilice, el número de Reynolds es siempre adimensional.

Experimentalmente se comprueba que mientras sea Re < 2000, el flujo es laminar y que si Re > 3000, el flujo es turbulento. Para Re comprendidos entre 2000 y 3000 el flujo es inestable y pasa erráticamente de una forma a otra.

El valor de la velocidad crítica se obtiene despejando v de la expresión del número de Reynolds y tomando como valor de Re, el de 2000:

$2.000 = \frac{d \cdot v_{cr} \cdot \rho}{\eta}$ siendo d = 2r y despejando $v_{crítica}$ queda:

$$v_{CRÍTICA} = \frac{1.000 \cdot \eta}{\rho \cdot r}$$

Problemas.

1- Una tubería por la que circula un líquido de ρ = 800 kg/m³ y η = 1 poise, tiene un radio de 10 cm. ¿Cuál será el caudal al alcanzarse la velocidad crítica?

Solución:

Reducciones al MKS: $\eta = 0{,}1\ \frac{N \cdot s}{m^2}$ r = 0,1 m

-Cálculo de la velocidad crítica:

$$v_{crítica} = \frac{1000 \cdot \eta \cdot g}{\rho \cdot r} = \frac{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8}{800 \cdot 0{,}1} = 12{,}25\ \frac{m}{s}$$

-Cálculo del caudal:

$$Q = v_{cr} \bullet A = 12{,}25 \bullet [\pi \bullet (0{,}1)^2] = 0{,}38\ \frac{m^3}{s} = 380 \text{ litros/s}$$

2- Por una tubería de 0,40 m de diámetro y 10 m de longitud circula un líquido de viscosidad η = 1 poise. Si el gasto es Q = 6,28 litros/s ¿cuál es la diferencia de presión entre los extremos de la tubería?

Solución:

Reducciones al MKS: r = 0,20 m l = 10 m $\eta = 0{,}1\ \frac{N \cdot s}{m^2}$ $Q = 0{,}00628\ \frac{m^3}{s}$

De $Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4$ → $p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot \eta \cdot l \cdot Q}{\pi \cdot R^4} = 10$ Pa

Movimiento de sólidos dentro de fluidos.

Cuando existe un movimiento relativo entre un sólido y el fluido que lo circunda, actúan sobre el sólido fuerzas, las cuales tienen por resultante a R, en la figura 1.

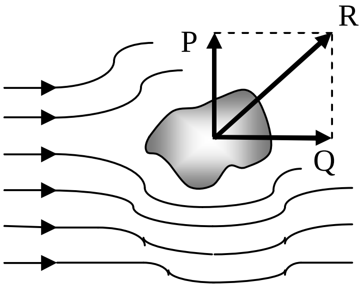


Figura 1

La fuerza R siempre puede considerarse descompuesta en dos: Q (con la dirección del movimiento del sólido, o bien del fluido) y P (perpendicular a la anterior). De modo que P y Q son las componentes de R. Ellas reciben los siguientes nombres:

P = Fuerza de sustentación o fuerza ascensional.

Q = Resistencia frontal.

En la figura 1, el cuerpo tiene una forma cualquiera, y nótese además que el sentido de la fuerza Q es opuesta al del movimiento del sólido.

Si el sólido fuera simétrico respecto de la dirección del movimiento (eje x), sólo existiría la resistencia frontal Q, y la fuerza de sustentación P sería nula.

Para que un sólido se pueda mover sin resistencia frontal (Q = 0) se necesita que el medio sea un fluido perfecto, es decir que carezca de viscosidad, en tal caso el fluido deslizará libremente junto a la superficie del sólido, rodeándolo por completo. Este es el caso que se ilustra en la figura 2. En ella se muestran las líneas de corriente de un líquido perfecto alrededor de un cilindro de longitud infinita; se aprecia una perfecta simetría de las líneas de corriente, tanto respecto de un eje horizontal como de un eje vertical.

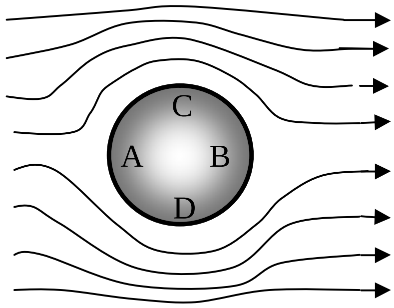


Figura 2

Como consecuencia de esta simetría, las presiones en puntos tales como A y B son iguales (y mayores que en un flujo no perturbado, ya que las velocidades junto a dichos puntos es menor). En cambio en puntos tales como C y D, las presiones son también iguales, (pero menores que en el flujo no perturbado, ya que las velocidades junto a dichos puntos es mayor). En consecuencia, la resultante de las fuerzas de presión en la superficie del cilindro, es igual a cero. Para sólidos de otras formas obtendremos también el mismo resultado. Este resultado es debido exclusivamente al hecho de tratarse de un fluido perfecto.

Consideraremos ahora el caso del movimiento de un sólido dentro de un líquido viscoso; los fenómenos ocurrirán ahora de manera completamente diferente. Ahora una capa muy delgada del líquido se adhiere a la superficie del cuerpo y se mueve junto con él como un todo único, llevándose tras de sí las siguientes capas. A medida que se alejan de la superficie del cuerpo, la velocidad de las capas disminuye y, por fin, a cierta distancia de la superficie, el líquido resulta estar prácticamente no perturbado por el movimiento del sólido. Puede decirse que el sólido se encuentra rodeado por una capa de líquido en la que hay un gradiente de velocidad; esta capa se denomina *capa límite*. En ella actúan las fuerzas de rozamiento que, al fin de cuentas, resultan aplicadas al sólido y provocan el surgimiento de la resistencia frontal. Pero la cosa no termina aquí; la presencia de la capa límite varía radicalmente las corrientes de líquido alrededor del sólido. El rodeo completo se hace imposible. La acción de la fuerza de rozamiento sobre la capa límite provoca la separación de ésta de la superficie del sólido, en la parte posterior. Se crean allí torbellinos o vórtices (ver figura 3). Los torbellinos son arrastrados por el flujo y se extinguen gradualmente a consecuencia del rozamiento; así la energía cinética de los torbellinos se convierte en calor cedido al líquido.

La presión en la zona de torbellinos es menor, por lo que la resultante de las fuerzas de presión no será nula y será una de las causantes de la fuerza Q (resistencia frontal). Así pues, resumiendo, la resistencia frontal Q es el resultado de dos causas: la resistencia de rozamiento y la fuerza de presión. El valor de esta última depende en alto grado de la forma del sólido; por este motivo a las fuerzas de presión, también se las llama *resistencia de la forma*. Así fuerza o resistencia de presión es mínima en cuerpos con forma de gota (ver figura 4). Al fuselaje de los aviones, a sus alas, a la carrocería de los automóviles, etc se procura darles la forma de "gota" por este motivo.

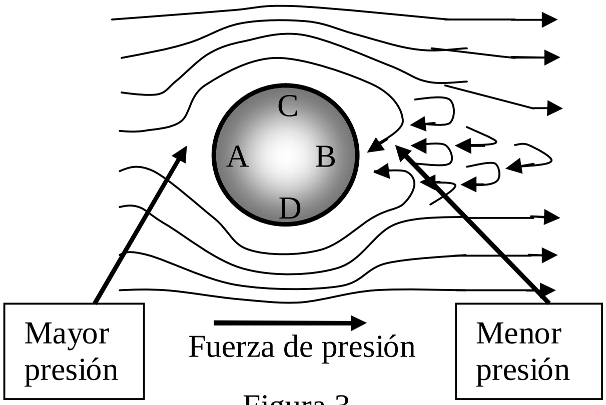


Figura 3

El número de Reynolds (Re) es un buen indicador de la relación de magnitud que hay entre las resistencias de rozamiento y las resistencias de forma. Con Re pequeños el papel fundamental lo desempeña la resistencia de rozamiento y la otra puede ser ignorada. Al aumentar Re la importancia de la resistencia de forma crece más rápido que la otra. Con Re grandes predomina la resistencia de forma.

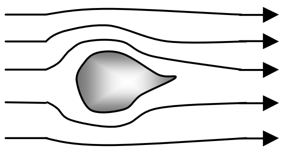


Figura 4

Fuerza de sustentación.

Para el valor de esta fuerza, la viscosidad del líquido no tiene gran importancia. La figura 5 muestra las líneas de corriente de un líquido perfecto rodeando un semicilindro. Como el rodeo es completo, las líneas de corriente serán simétricas con respecto del eje vertical CD; pero son asimétricas respecto del eje horizontal AB. Arriba de C la densidad de líneas es mayor, por lo que la presión en C es menor que la presión en D, con lo que surge la fuerza de sustentación.

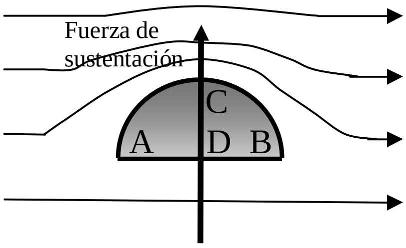


Figura 5

Ahora podemos explicar por qué vuela un avión; la sección de corte del ala de un avión se asemeja en forma al semicilindro de la figura 5. Las líneas de corriente por arriba del ala tienen mayor longitud que las que pasan por abajo, lo que obliga a que la velocidad del aire sea mayor arriba del ala que abajo. Como a mayor velocidad corresponde menor presión, surge la fuerza de sustentación. Se cumple que:

$$P = A \bullet \Delta p$$

Donde P es la fuerza de sustentación; A es el área del ala y Δp es la diferencia de presiones. Por el teorema de Bernoulli, $\Delta p = p_D - p_C = \frac{1}{2}\rho \cdot (v_C^2 - v_D^2)$

El efecto Magnus.

Se conoce con el nombre de efecto Magnus, al fenómeno por el cual una pelota en rotación describe una trayectoria curva al desplazarse por el aire.

Para analizar este fenómeno, consideraremos las figuras 6. La 6-a muestra una pelota que gira alrededor de un eje vertical; como consecuencia del rozamiento de la pelota con el aire que la rodea, la pelota arrastra en su rotación a una delgada capa de aire. La figura 6-b muestra la misma pelota quieta (sin rotar), inmersa en una corriente

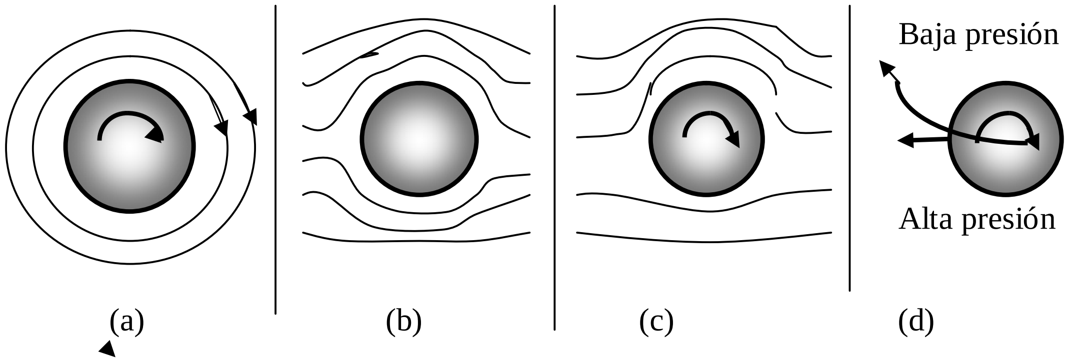


Figura 6

de aire que va de izquierda a derecha. Como lo que cuenta es el movimiento relativo, lo mismo da suponer al aire en reposo y la pelota moviéndose con traslación pura de derecha a izquierda. La figura 6-c muestra el efecto resultante en el caso en que ocurrieran simultáneamente los dos movimientos anteriores, o sea que la pelota tuviera rotación y traslación. La velocidad real del aire que la rodea, en cada punto del espacio, se obtendrá componiendo las velocidades de las figuras 6-a y 6-b. Así, en la parte superior del diagrama (por arriba de la pelota) ambas velocidades tienen el mismo sentido, se suman y resulta una región de alta velocidad y de acuerdo con Bernoulli, una región de baja presión. En la parte inferior del diagrama (por debajo de la pelota) las velocidades de 6-a y 6-b son opuestas; se restan y resulta una región de baja velocidad, pero de alta presión. Finalmente, las diferencias de presión por arriba y debajo de la pelota que rota, obligan a que ésta siga la trayectoria curva mostrada en la figura 6-d.