Movimiento Armónico Simple

"Words can be meaningless. If they are used in such a way that no sharp conclusions can be drawn."[1]

-Richard Feynman.

Motivación:

En el estudio sistemático de la física uno nota que las ecuaciones que aparecen en diferentes campos (e incluso en otras ciencias) muchas veces son las mismas. De manera que el estudio de un cierto fenómeno en una determinada área puede permitir una extensión de nuestro conocimiento hacia otro campo. Reconocer que tales extensiones son posibles, es la base de la comprensión.
Muchos movimientos en la naturaleza son de carácter periódico, en particular pueden ser oscilatorios, vibratorios, armónicos, etc.
El oscilador armónico, que es lo que vamos a estudiar en este apunte, tiene análogos en muchos campos; aunque empecemos con el ejemplo mecánico tradicional del sistema masa-resorte, en realidad lo que vamos a estar estudiando es una cierta ecuación que caracteriza a los sistemas oscilantes. Esta ecuación aparece una y otra vez en física y otras ciencias. Tanto aparece que merece que le dediquemos un capítulo. Algunos de los fenómenos que involucran a esta ecuación son: las oscilaciones de una carga fluyendo hacia adelante y hacia atrás en un circuito eléctrico, las vibraciones de un diapasón que genera ondas de sonido, las vibraciones análogas de los electrones en un átomo, que generan ondas de luz, el crecimiento de una colonia de bacterias en interacción con el suplemento de comida y los venenos que la bacteria produce, etc. La lista se extiende desde el movimiento de un corcho en el mar hasta el de la Tierra durante un terremoto.
Todos estos fenómenos son descriptos mediante ecuaciones muy similares entre sí; esta es la razón por la que estudiamos el oscilador armónico simple en detalle.

Análisis Cinemático

El movimiento armónico es tal que la posición, la velocidad y la aceleración varían sinusoidalmente con el tiempo (de ahí el nombre). Para poder tener una idea visual de este movimiento, consideremos un disco de radio A que gira con velocidad angular constante y que tiene un clavo incrustado cerca del borde. El disco está ubicado entre un proyector y una pantalla, como se ve en la Fig. 1.

[1] "Las palabras pueden no tener sentido. Si se usan de tal manera que no se puedan sacar conclusiones claras ".

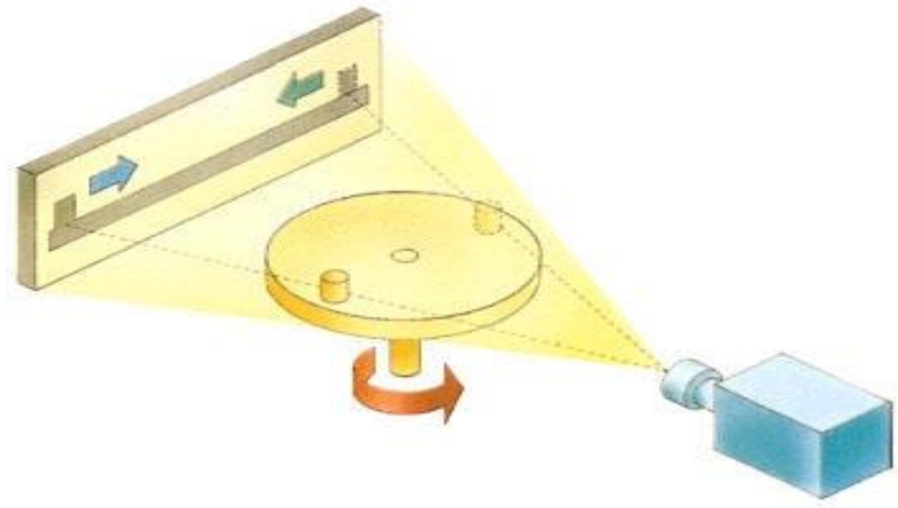

Fig.1. Movimiento de la sombra del clavo.

Describamos entonces el movimiento de la sombra del clavo en la pantalla. Si hacemos una descripción cualitativa vemos que la sombra del clavo se va moviendo alternativamente de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, en un movimiento periódico alrededor del punto *O*.

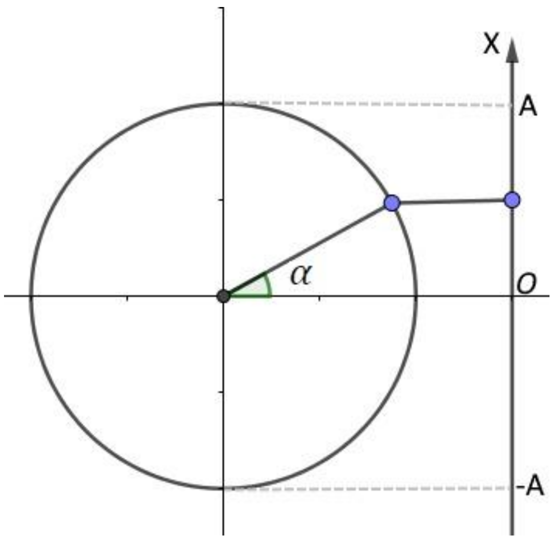

Fig.2. Vista desde arriba del clavo y de su sombra.

Como el disco gira con velocidad angular constante, entonces podemos escribir el ángulo que recorre en función del tiempo (t) como:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0) \quad (1)$$

Donde α es el ángulo barrido (en radianes) y ω es la velocidad angular (medida en radianes sobre unidad de tiempo)[2].

[2] En los apuntes de cinemática circular encontrarán un estudio detallado de este movimiento.

Podemos observar que, si en el momento en que el clavo está en la posición de la Fig. 2, donde el ángulo que subtiende con respecto al semieje positivo de las abscisas es α, entonces la separación de la sombra con respecto al punto *O* será

$$x = A\, sin(\alpha) \qquad (2)$$

De esta forma es posible obtener una ecuación horaria para la posición de la sombra en la pantalla en función del tiempo

$$x(t) = A\, sin(\omega t + \alpha_0) \qquad (3)$$

La expresión $\omega t + \alpha_0$ recibe el nombre de *fase,* con lo cual a α_0 se lo conoce como *fase inicial*.

Puede verse de esta expresión que el movimiento de la sombra va a quedar acotado entre dos posiciones; el máximo alejamiento del punto *O* se dará cuando

$$|sin(\alpha)| = 1$$

$$|x| = A$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Estas posiciones características, que marcan el máximo alejamiento de la posición central se ven reflejadas en el valor del parámetro A, que llamaremos *amplitud*.
En la Fig. 3 se muestra el gráfico de ecuación horaria (3); esto permite ver las distintas posiciones que ocupa la sombra del clavo en diferentes instantes.

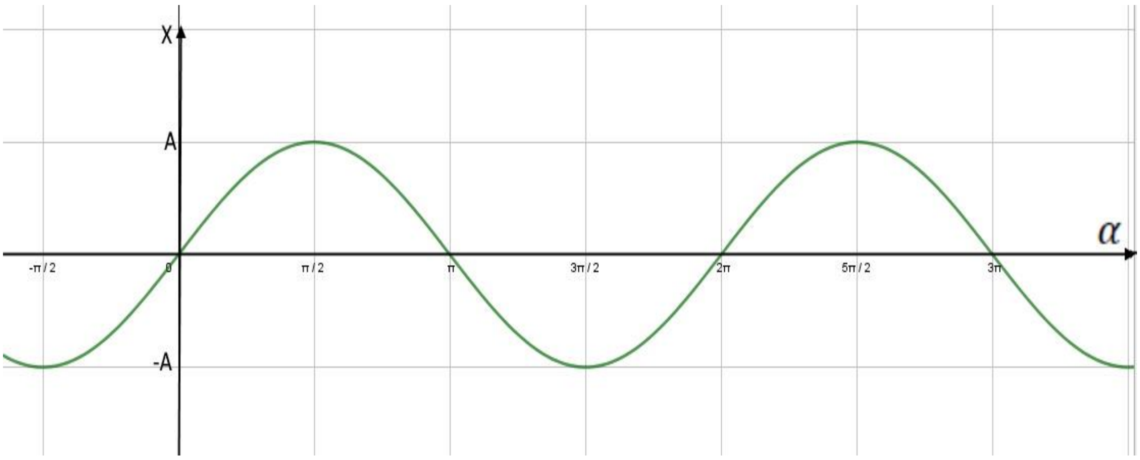

Figura 3. Posición de la sombra en función del ángulo recorrido por el clavo.

Veamos cómo encontrar la ecuación horaria para la velocidad de la sombra del clavo. Aquellos lectores que tengan buen manejo de herramientas de cálculo pueden encontrar en el apéndice una deducción alternativa haciendo uso de ellas.

El movimiento del clavo es circular y uniforme, de modo que la velocidad de éste es tangencial a la circunferencia y su módulo vale $v_C = \omega A$. Ahora bien, para hallar la velocidad de la sombra paralela a la pantalla (v_P), hay que hacer una proyección como hicimos en el caso de la posición. En la Fig. 4 se muestra la descomposición de la velocidad tangencial en dos componentes; una paralela a la pantalla y la otra perpendicular a ella.

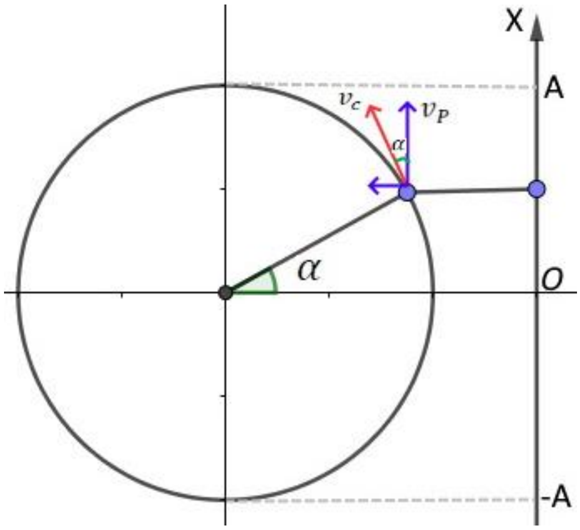

Figura 4. Descomposición de la velocidad del clavo.

En este caso, la componente paralela a la pantalla de la velocidad es

$$v_P = v_c\, cos(\alpha)$$

Reemplazando (1) en el argumento del coseno se obtiene

$$v(t) = A\omega\, cos(\omega t + \alpha_0) \tag{4}$$

El módulo de esta velocidad será máximo cuando

$$|cos(\omega t + \alpha_0)\,| = 1$$

esto es cuando

$$\omega t + \alpha_0 = n\pi \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}$$

Notemos que, si nos restringimos a una vuelta, entonces la velocidad máxima va a estar en $\alpha = 0rad$ y en $\alpha = \pi rad$, es decir, cuando la sombra pase por el punto *O*. Usando el mismo razonamiento podemos ver que la velocidad será nula cuando

$$cos(\omega t + \alpha_0) = 0$$

esto es cuando

$$\omega t + \alpha_0 = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}$$

Nuevamente, si nos restringimos a una vuelta, entonces la velocidad va a ser cero en $\alpha = \frac{1}{2}\pi rad$ y en $\alpha = \frac{3}{2}\pi rad$; es decir, cuando la sombra llega a los puntos x=A y x=-A. En otras palabras, cuando el alejamiento del centro sea máximo. Esto se ve en la Fig. 5.

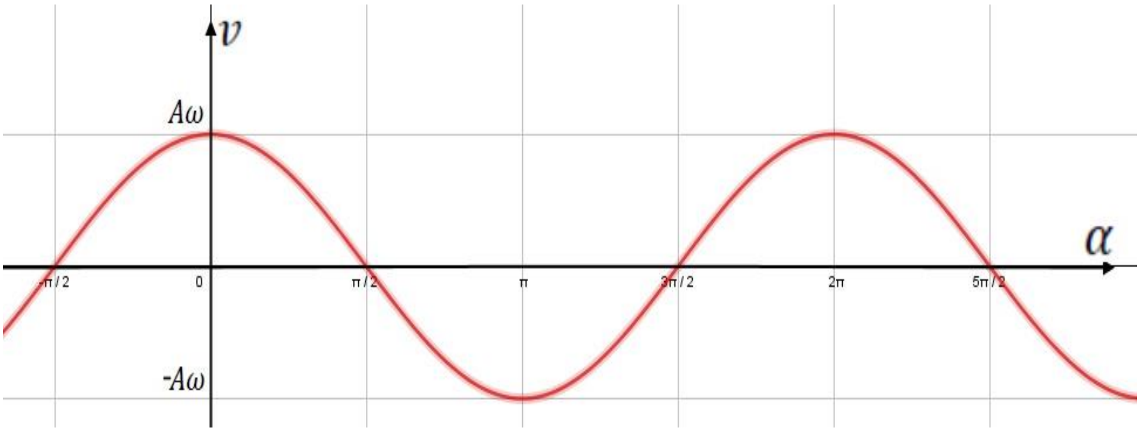

Figura 5. Velocidad de la sombra en función del ángulo recorrido por el clavo.

Por último, deduzcamos la ecuación horaria para la aceleración de la sombra del clavo en la pantalla. Cuando un objeto realiza un movimiento circular uniforme (Volver a leer el apunte de cinemática circular si esto no está claro), la aceleración tangencial es nula, mientras que la aceleración centrípeta es

$$a_C = -A\omega^2 \quad (5)$$

Una vez más, buscamos la proyección de este vector sobre componente paralela a la pantalla. Observando la Fig. 6, se ve que ésta es:

$$a_P = a_C \, sin(\alpha)$$

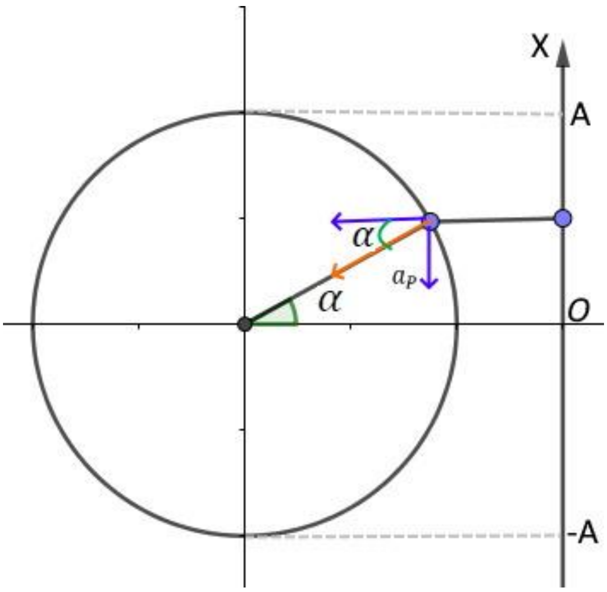

Fig.6. Descomposición de la aceleración del clavo.

Reemplazando la aceleración centrípeta del clavo por (5) y la fase α por su expresión en (1) se obtiene la ecuación horaria para la aceleración de la sombra:

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0) \qquad (6)$$

En la Fig. 7 se observa gráfico de esta función. Analicemos los puntos más salientes; por ejemplo, la aceleración va a ser máxima cuando $|\sin(\omega t + \alpha_0)|$=1 es decir, cuando

$$\omega t + \alpha_0 = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Una vez más, mirando en una vuelta, la aceleración va a ser máxima en módulo en $\alpha = \frac{1}{2}\pi rad$ y en $\alpha = \frac{3}{2}\pi rad$; esto es, cuando la sombra llega al máximo alejamiento del centro. Análogamente, va a ser mínima cuando $\sin(\omega t + \alpha_0) = 0$; o sea, cuando

$$\omega t + \alpha_0 = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Es decir que en una vuelta, la aceleración será mínima para $\alpha = 0 rad$ y $\alpha = \pi rad$, es decir, cuando la sombra pase por el punto *O*.

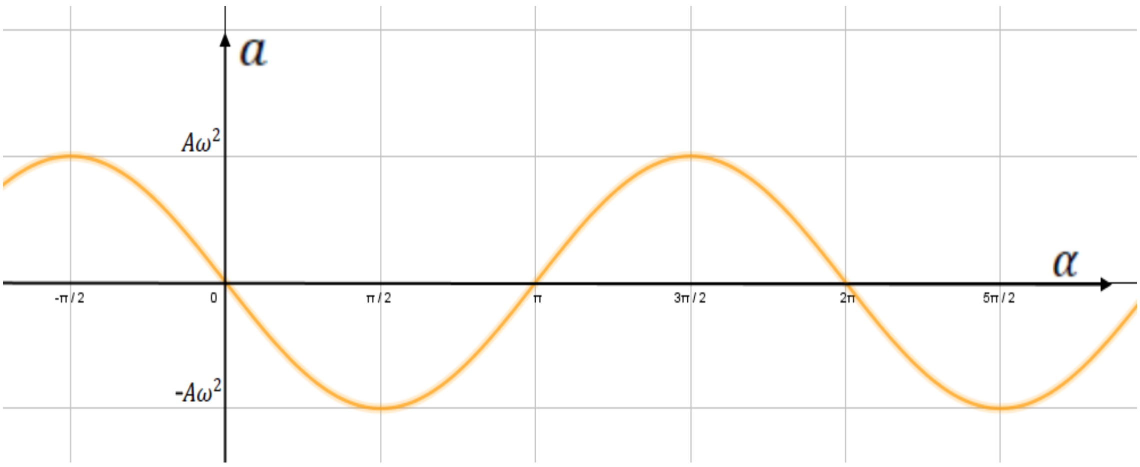

Figura 7. Aceleración de la sombra en función del ángulo recorrido por el clavo.

Inmediatamente se puede notar que hay una relación estrecha entre la aceleración y la posición; este hecho permite escribir la aceleración no sólo en función del tiempo, como indica la ecuación (6) sino también la aceleración en función de la posición

$$a(x) = -\omega^2 x \qquad (7)$$

Lo que indica esta ecuación es de suma importancia en lo que sigue y es que, como ω es constante, entonces la aceleración varía linealmente con la posición. Pero dice más aún, se lee de (7), que la aceleración en el movimiento armónico es proporcional y de signo contrario a la distancia a la posición central. El signo menos indica que el vector aceleración y el vector posición siempre apuntan en sentidos opuestos; esta característica será relevante cuando estudiemos la dinámica del movimiento.

En resumen: Partiendo de proyectar un movimiento circular en un eje horizontal se obtienen ecuaciones horarias para la posición, la velocidad y la aceleración que varían armónicamente con el tiempo y que tienen como característica destacable que la aceleración es proporcional (y de sentido inverso) a la distancia al punto medio.

Las ecuaciones que se obtienen son[3]:

$$x(t) = A\,sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$v(t) = A\omega\,cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2\,sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$a(x) = -\omega^2 x$$

Análisis Dinámico

Consideremos un objeto de masa m sobre el que actúa una fuerza $\vec{F}$, podemos escribir entonces la segunda ley de Newton como

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Si se quiere que el objeto se mueva con un movimiento armónico simple, entonces la aceleración debe estar dada por la ec. (7).

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{x}$$

Así, como ω y m son constantes, podemos definir la constante $k\ como\ \ k = m\omega^2$, de modo que la fuerza en términos de la posición sea

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Esto indica que en el movimiento armónico simple la fuerza es proporcional al desplazamiento y en sentido contrario; esto es, la fuerza está siempre dirigida hacia el punto *o* que en este caso, será el punto de equilibrio puesto que F(0)=0. Puede decirse también que la fuerza $\vec{F}$ es atractiva, siendo el centro de atracción, el punto *O*.

Vamos a ilustrar esto con lo que sea quizás el ejemplo por antonomasia. Uno de los sistemas más simples que presenta este comportamiento periódico es el sistema masa-resorte que se muestra en la Fig. 8. Este sistema consiste en un resorte ideal con uno de sus extremos fijo a una pared y el otro sujeto a un objeto puntual.

[3] El estudiante que maneje herramientas de cálculo podrá corroborar que la ecuación horaria de la velocidad se obtiene derivando con respecto al tiempo la de la posición, mientras que la ecuación horaria de la aceleración se obtiene derivando con respecto al tiempo la velocidad.

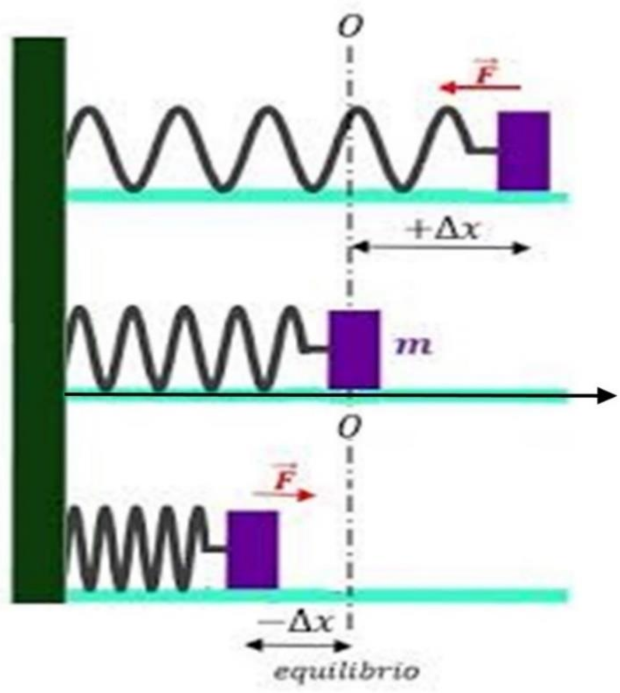

Figura 8. Ley de Hooke

Robert Hooke observó, en 1678, que a mayor elongación, mayor es la fuerza elástica y que además, ésta siempre apunta en sentido contrario al desplazamiento. Esto vale tanto para la elongación (estiramiento), como para la compresión.
Considerando, además, que cada resorte en particular se estiraba (o se comprimía) de modo diferente a los otros, sometidos a una misma fuerza deformante; resultaba obvio que el factor de proporcionalidad debía ser una constante que dependiera de cada resorte en particular. El resultado de esto es la Ley de Hooke[4]: $\vec{F}_e = -k\Delta\vec{x}$ (8).

Donde k recibe el nombre de constante elástica del resorte y se mide en unidades de fuerza sobre longitud, que en el sistema internacional sería N/m; mientras que $\Delta\vec{x}$ representa la elongación o compresión del resorte y se mide en unidades de longitud. Vale notar que si el punto *o* hubiese estado en la pared, el desplazamiento sería $\Delta x = x - l_0$, donde l_0 es la longitud natural del resorte (o longitud sin deformación) y tiene unidades de longitud. Finalmente, el signo menos de la ec. (8) refiere a que, como se observa en la Fig. 8, la elongación y la fuerza elástica apuntan siempre en sentido contrario. Las fuerzas de este tipo se llaman restitutivas (como habíamos dicho anteriormente).

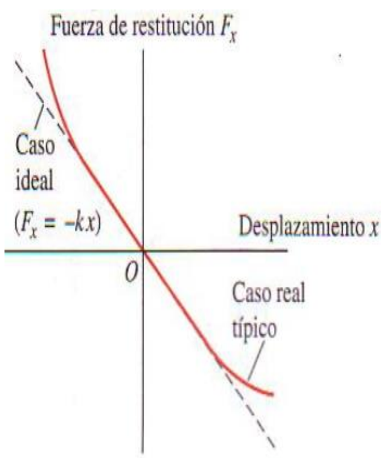

Figura 9. Período elástico para un resorte ideal y uno real.

Los resortes que estudiamos en este apunte son idealizaciones de situaciones reales. Esto es, se pueden estirar o comprimir tanto como se necesite, sin que se deformen En realidad, el rango de deformaciones en el que un resorte real se comporta como uno ideal se denomina período elástico, más allá del éste su comportamiento deja de ser ideal, como se observa en la Fig. 9. Algunos resortes, aún trabajando dentro de su período elástico, se desvían considerablemente de la Ley de Hooke: éstos se denominan no lineales.

[4] Aunque se la conoce con ese nombre, no debería llamarse Ley, pues refiere a un dispositivo específico y no a un principio fundamental de la naturaleza.

Observando la Fig.8 podemos notar que si se aparta el bloque de la posición de equilibrio, éste comenzará a oscilar alrededor de ella; y al no haber fuerzas disipativas, este movimiento se repetirá indefinidamente. Para ilustrar esto podemos suponer que se desplaza el objeto una distancia A, a la derecha de la posición de equilibrio y se lo deja libre. En ese instante el sentido de fuerza elástica y la aceleración sería hacia la izquierda. El módulo de la velocidad aumenta hasta alcanzar la posición de equilibrio, donde la fuerza neta es nula (de modo que la aceleración vale cero). Como el bloque alcanza este punto con cierta velocidad, entonces logra pasarlo; es decir, ahora el desplazamiento sería hacia la izquierda, con lo cual la fuerza y la aceleración estarían *apuntando* hacia la derecha. Una vez aquí, como la velocidad y la aceleración tienen distinto signo, el objeto se frenará eventualmente. Veremos en breve que lo hará en x=-A. Una vez alcanzado este punto el cuerpo acelera hacia la derecha, sobrepasa la posición de equilibrio y se detiene nuevamente en x=A y comienza una nueva oscilación. El sistema repetirá este movimiento una y otra vez.

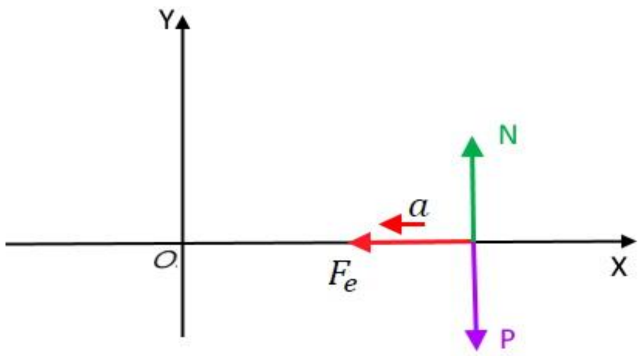

Figura 10. Diagrama de cuerpo libre.

Estudiemos entonces la dinámica de este sistema, suponiendo que el sistema de referencia está en la posición de la Fig. 10, con el correspondiente diagrama de cuerpo libre[5]; las ecuaciones de Newton se escriben:

$$\hat{\imath}: \quad F_e = ma$$

$$\hat{\jmath}: \quad N - P = 0$$

Sobre el eje vertical no hay aceleración, de modo que la normal iguala al peso del objeto. En el eje horizontal, en cambio, podemos escribir

$$-kx = ma \tag{9}$$

Rápidamente nos damos cuenta que la ecuación de movimiento (9) no es otra cosa que (7), una vez supuesta la relación $k = m\omega^2$. Esto es,

[5] El lector podrá visitar el apunte de leyes de Newton donde se detalla claramente este procedimiento.

$$-\frac{k}{m}x = a \quad \longleftrightarrow \quad a = -\omega^2 x \qquad \text{si } k = m\omega^2 \text{ ó bien si } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$

Esto demuestra que, si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento respecto al equilibrio, entonces la aceleración va a estar dada por (6); de modo que el bloque va a realizar un movimiento armónico simple en torno a la posición de equilibrio. Con esto podemos dar entonces, las ecuaciones horarias para la aceleración, la velocidad y la posición del objeto ya que son idénticas a las que encontramos en el análisis cinemático. Antes de hacer eso es necesario recalcar que, si bien las ecuaciones van a ser las mismas, la interpretación puede diferir. Es el caso de la posición; mientras que en la proyección en la pantalla representaba sólo el punto medio de las oscilaciones, en este caso representa el punto de equilibrio; es decir, el punto donde la fuerza se anula. Claro está que uno puede elegir el origen del sistema de referencia arbitrariamente, de modo que si se eligiese otro punto que no fuera el de equilibrio habría que tenerlo en cuenta al escribir la elongación. Dicho esto, pasemos a escribir las ecuaciones[6]:

$$x(t) = A\,sin(\omega t + \alpha_0) \; + \; x_{eq} \tag{11}$$

$$v(t) = A\omega\,cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2\,sin(\omega t + \alpha_0)$$

A esta altura no debe resultar sorprendente haber obtenido el mismo conjunto de ecuaciones horarias. Pasemos entonces a interpretarlas en términos de la dinámica del problema. Tanto la amplitud A, como la fase inicial α_0 van a quedar determinadas por las condiciones iniciales del problema.

En el contexto de este sistema, el parámetro ω recibe el nombre de pulsación (aunque también se encuentra en la literatura con el nombre de frecuencia angular). Este parámetro está determinado por los valores del sistema masa-resorte (m, k) y podemos relacionarlo con la frecuencia (f), y el período (T) de las oscilaciones a través de

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13}$$

Recordemos que la frecuencia es el número de ciclos por unidad de tiempo, mientras que el período es el tiempo que se tarda en recorrer un ciclo completo.

De la ecuación (13) se observa que a mayor masa (menor aceleración) mayor va a ser el período, es decir, ciclos más largos. En cambio, un resorte más duro

[6] El lector que esté familiarizado con la resolución de ecuaciones diferenciales encontrará en el Apéndice, un tratamiento formal de este problema.

(mayor constante elástica) menor va a ser el período, esto es, los ciclos van a ser más cortos.

Las ecuaciones (12) y (13) muestran que la frecuencia y el período del movimiento armónico simple están determinadas únicamente por la masa y la constante elástica y no depende de la amplitud. Para valores dados de m y $k,$ el tiempo de una oscilación completa es el mismo, independientemente de cuánto se aleje de la posición de equilibrio. La dependencia de la fuerza elástica con la posición (8), da cuenta de esto; una mayor amplitud indica que el objeto alcanza elongaciones mayores y se somete a fuerzas de restauración mayores. Esto aumenta la rapidez media del cuerpo durante un ciclo completo, lo que compensa exactamente la necesidad de recorrer una distancia mayor, de manera que el tiempo total sea el mismo.

La importancia de la ecuación (8) reside en que muchos movimientos periódicos pueden aproximarse en algunos regímenes por movimientos armónicos simples. Esto permite aplicar lo aprendido en este apartado a una cantidad enorme de diversos problemas tales como la vibración de átomos y moléculas en sólidos, el movimiento de la Tierra durante un terremoto, la vibración de una cuerda de guitarra, la corriente eléctrica en un circuito y muchos más.

Existen distintas formas de escribir la ecuación (11). Si bien en este apunte se eligió usar la función seno se podría también haber usado el coseno o una combinación lineal de ambos.

Análisis de Energía

Estudiemos ahora la energía en el movimiento armónico simple. Para eso sigamos considerando el sistema masa-resorte del apartado de dinámica. En este problema actúa sólo una fuerza no-conservativa: La normal, que como se observa en la Fig. 8, es perpendicular al desplazamiento. Es decir, no realiza trabajo. Las demás fuerzas, el peso y la fuerza elástica son fuerzas conservativas. Con lo cual el sistema masa-resorte[7] suele considerarse conservativo, es decir, la energía mecánica se mantendrá constante durante todo el movimiento. En el apunte de trabajo y energía habíamos visto que el potencial asociado a la fuerza elástica era de la forma

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 \tag{14}$$

Además, sabemos que la energía cinética está dada por

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \tag{15}$$

De modo que la energía mecánica es

[7] Esto es siempre que se desprecie la acción de las fuerzas de fricción.

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Podemos reemplazar la posición y la velocidad por las expresiones en función del tiempo que obtuvimos anteriormente

$$E_M = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha_0) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha_0)$$

Usando la identidad pitagórica $(sin^2(\delta) + cos^2(\delta) = 1)$ y las relaciones (10) se obtiene

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (16)$$

Que, como habíamos predicho, es contante. O sea, durante una oscilación hay un intercambio continuo entre energía cinética y potencial. Al alejarse de la posición de equilibrio la energía potencial aumenta a costa de la energía cinética; en cambio, cuando el bloque se acerca a la posición de equilibrio, disminuye su energía potencial, aumentando la energía cinética. Esto está en concordancia con los resultados que obtuvimos en los apartados anteriores.

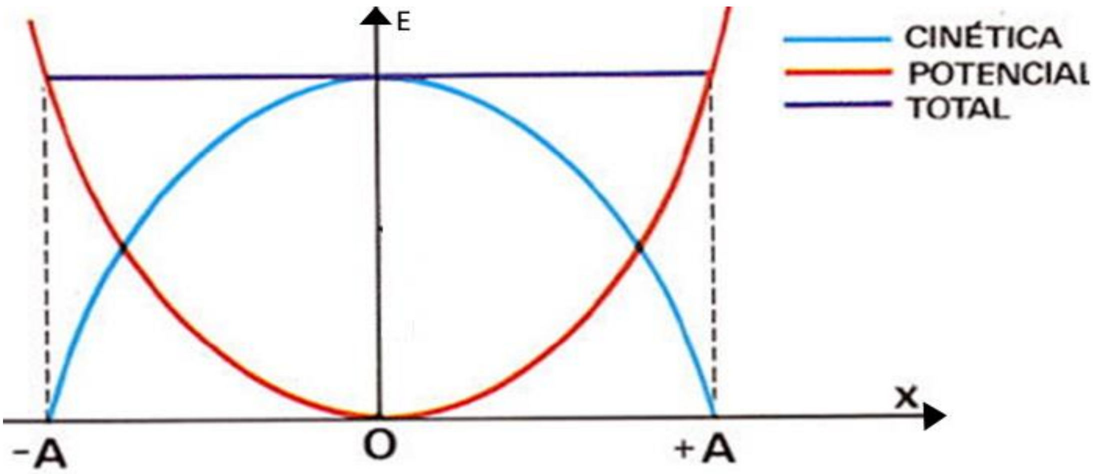

Figura11. Relaciones de energía en el MAS.

Podemos usar la ecuación (16) para calcular la velocidad del objeto en función del desplazamiento

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

Donde el signo $\pm$ indica que el bloque puede estar yendo en un sentido o en el otro. Esta ecuación muestra también que la velocidad máxima se da en x=0 y su módulo está dado por:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A$$

Para comprender esto en más detalle, veamos la Fig. 11. Ésta es una representación gráfica de la ecuación (16). Recordemos que la energía cinética es la diferencia entre la mecánica y la potencial. La energía se grafica en el eje de las ordenadas y la posición en el de las abscisas. La energía mecánica, es la recta horizontal, dado que es constante, y está graficada en violeta. La energía potencial es la parábola que corresponde a la ecuación (14) y está graficada en rojo. Finalmente, la energía cinética es el gráfico celeste y se obtiene de restar las energías mecánica y potencial. Notemos que el gráfico de la energía potencial interseca al de la energía mecánica en x=A y en x=-A. En estos puntos, como la energía potencial y la mecánica valen lo mismo, la energía cinética no puede tomar otro valor más que cero. Esto significa que, en estos puntos, la velocidad del bloque es cero. En general, estos puntos reciben el nombre de *puntos de retorno*[8]*.* Asimismo, vemos que el gráfico del potencial tiene un mínimo en x=0. Esto significa dos cosas, la primera es que, en ese punto, la energía cinética (y en consecuencia la velocidad) va a ser máxima, como ya habíamos discutido. Pero además indica que x=0 es la posición de equilibrio del sistema. En el caso de las fuerzas restitutivas, como es la ley de Hooke, el equilibrio es estable.

Apéndice

Ecuación de movimiento

En esta sección daremos un tratamiento más formal a la deducción de las ecuaciones de movimiento a partir del uso de herramientas de cálculo.

Para ello volvamos a la ecuación de movimiento

$$-k\Delta x = ma$$

Recordemos que en este caso $\Delta x = x - x_{eq}$, donde x_{eq} es la posición de equlibrio del sistema.

Teniendo en cuenta que la velocidad es la derivada primera de la posición con respecto al tiempo y la aceleración es la segunda, podemos reescribir esta ecuación en la forma

$$-k\Delta x = m\frac{d^2x}{dx^2}$$

Reordenando

[8] En el apunte de energía gravitatoria encontrará una disquisición más que interesante sobre el tema.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{eq}$$

Usando la relación con la pulsación queda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 x_{eq}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea. Es un caso particular de un tipo de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones responden a un sinfín de situaciones en la física y la ingeniería (entre otras ciencias). Las ecuaciones de este tipo se denominan Ecuaciones de Euler. Si bien la solución formal escapa a este curso, es posible usar los resultados que fueron obtenidos en las secciones anteriores para estudiarla.

Para resolver este tipo de ecuaciones es necesario separar su parte homogénea de su solución particular, en este caso, la parte homogénea es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (17)$$

Que, como puede observarse, no es otra cosa que poner el origen de coordenadas en la posición de equilibrio. Como se dijo antes, no podemos mostrar cuál es la solución de esta ecuación, pero sí podemos ver que la solución que se propuso es correcta en sentido que satisface esta ecuación. Podemos ver que si $x(t) = A\, sin(\omega t + \alpha_0)$, entonces la derivada temporal de esta ecuación es

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\, cos(\omega t + \alpha_0)$$

Y si volvemos a derivar se obtiene para la aceleración

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\, sin(\omega t + \alpha_0)$$

Entonces, reemplazando estas expresiones en la ecuación (17) se tiene

$$-A\omega^2\, sin(\omega t + \alpha_0) + A\omega^2\, sin(\omega t + \alpha_0) = 0$$

Que se anula idénticamente, como era de esperar. Por supuesto de esta forma no podemos mostrar que la solución sea única, pero sí mostramos que las ecuaciones que usamos son solución de esta ecuación de movimiento.

Esto fue para la ecuación homogénea; veamos la solución particular. Para esto debemos proponer como solución una función del mismo tipo de la que aparece en la ecuación; que en este caso es una constante. Propongamos entonces C, como una solución particular. De este modo se obtiene

$$\frac{d^2C}{dt^2} + \omega^2 C = \omega^2 x_{eq}$$

Pero la derivada de una constante es cero, con lo cual obtenemos la solución esperada: $C = x_{eq}$. Así, la ecuación horaria para la posición queda

$$x(t) = A\,sin(\omega t + \alpha_0) \ + \ x_{eq}$$

Que, obviamente, coincide con la ecuación (11). Para resolver enteramente una ecuación diferencial hace falta establecer condiciones iniciales, una por cada orden de derivadas. En este caso, se necesitan dos condiciones iniciales. Éstas son justamente, las que determinan los valores de A y de α_0.

Trabajar con este tipo de herramientas matemáticas presenta una innumerable cantidad de ventajas. Sin embargo, el análisis que realizamos en los apartados anteriores permite conocer el problema desde distintos ángulos y así comprenderlo en su totalidad.

A modo de comentario final diremos que la Ecuación de Euler completa

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(x)$$

Permite resolver problemas más complejos asociados a oscilaciones, como por ejemplo las oscilaciones amortiguadas y las oscilaciones forzadas.