MOMENTO ANGULAR

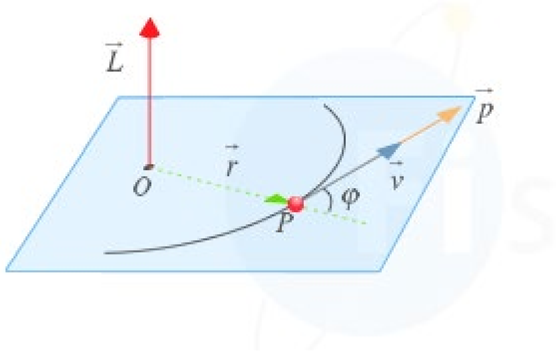
MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTICULA

Consideremos una partícula de masa m que se mueve con respecto a O con una velocidad $\vec{v}$. Definimos una nueva magnitud vectorial, llamada momento angular de la partícula con respecto a O ($\vec{\boldsymbol{L}}$)

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

MODULO: $\left|\vec{L}\right| = r\,m\,v\,sen\varphi$

DIRECCION Y SENTIDO: El vector $\vec{\boldsymbol{L}}$ es en cada instante perpendicular al plano formado por el vector posición y el vector velocidad; cuando la trayectoria es plana y el origen está contenido en el plano de esta, $\vec{L}$ es perpendicular a dicho plano.



Sus unidades en SIU son: m^2kg/s.

El momento angular de una partícula se define a partir de un vector posición y una partícula puntual en movimiento, esto es, con cierta velocidad instantánea. No es una magnitud propia del cuerpo, sino que depende del punto de referencia que se elija. Su **significado físico** tiene que ver con la rotación: El momento angular caracteriza el estado de rotación de una partícula, del mismo modo que el momento lineal caracteriza el estado de traslación lineal.

CASOS PARTICULARES:

- $\vec{L}$=0 cuando $\vec{r}$ es paralelo a $\vec{p}$. Es decir, cuando la partícula se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por el origen tiene un momento angular nulo con respecto a ese origen.
- $\vec{L}$ es máximo cuando $\vec{r}$ es perpendicular a $\vec{p}$. En ese momento la partícula se mueve exactamente igual que si estuviera en el borde de una rueda que gira alrededor del origen en el plano definido por r y p (movimiento circular).

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Módulo}: & \boldsymbol{L = mrv = mwr^2} \\ \boldsymbol{Dirección}: & \vec{\boldsymbol{L}} \parallel \vec{\boldsymbol{w}} \end{array}\right\} \vec{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{mr^2}.\vec{\boldsymbol{w}}$$

EJEMPLO: Determina el momento angular de un satélite que se encuentra a 1000 km sobre la superficie de la Tierra respecto al centro de esta sabiendo que su masa es de 1200 kg y describe una órbita completa cada 87 minutos. El radio de la Tierra es de $6.37 \cdot 10^6$ m.

Datos

- Radio de la Tierra: $R_t = 6.37 \cdot 10^6$ m
- Altura sobre la Tierra: h = 1000 km = 10^6 m
- Masa del satélite: m = 1200 kg
- Si describe 1 revolución cada 87 minutos = 1/87 r.p.m,

entonces $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{87} \, rad/min = \frac{2 \cdot \pi}{87.60} rad/s = \frac{\pi}{2610} rad/s$

Resolución

Podemos considerar el satélite como una partícula puntual para resolver este problema, pues la trayectoria que describe es mucho mayor que su tamaño. La expresión del momento angular es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Por otro lado, podemos calcular el valor de dicho momento angular teniendo en cuenta que en el movimiento circular, el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$ es de 90º.

Aplicamos la expresión:

$$L = mrv = m \cdot \omega . r^2 = m.w.(R_t + h)^2 = \frac{78.45 \cdot 10^{12} \; kg \cdot m^2}{seg}$$

Donde hemos tenido en cuenta que r, la distancia del satélite al centro de la Tierra, es la suma del radio de la Tierra más la altura a la que se encuentra el satélite sobre la superficie de esta. La dirección de, $\vec{L}$ será perpendicular al plano en el que gira el satélite y para determinar el sentido aplicaríamos la regla de la mano derecha si nos diesen el sentido de giro del satélite.

TEOREMA DE CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

Para determinar bajo qué condiciones $\vec{\boldsymbol{L}}$ se mantiene constante, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

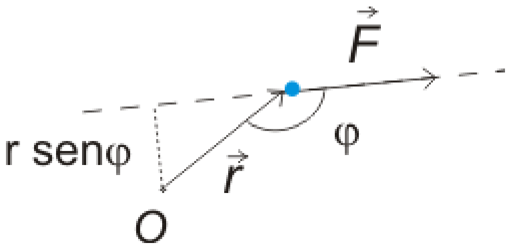
El primer término es nulo por tratarse del producto vectorial de dos vectores paralelos, con lo que aplicando la definición de fuerza dada en la segunda ley de Newton queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Este producto vectorial se denomina momento o torque de una fuerza (τ) con respecto al origen *O*:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{\tau}| = r\ F\ sen\varphi$$

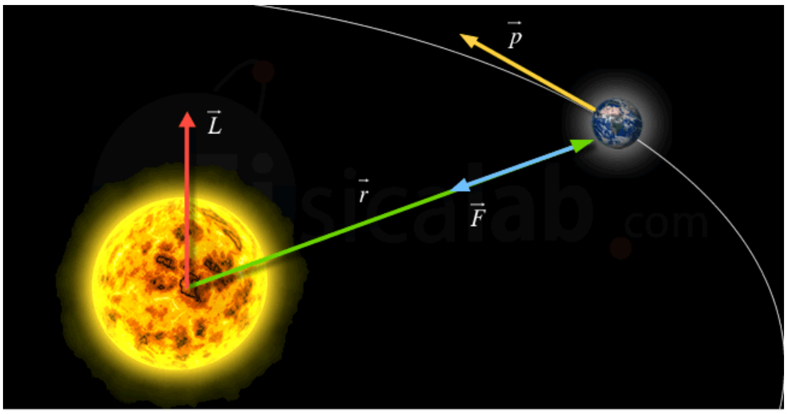


El vector, $\vec{L}$ será constante cuando su derivada sea nula. Esto constituye el Teorema de Conservación del Momento Angular:

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = cte$$

Esta condición se cumple en dos casos:

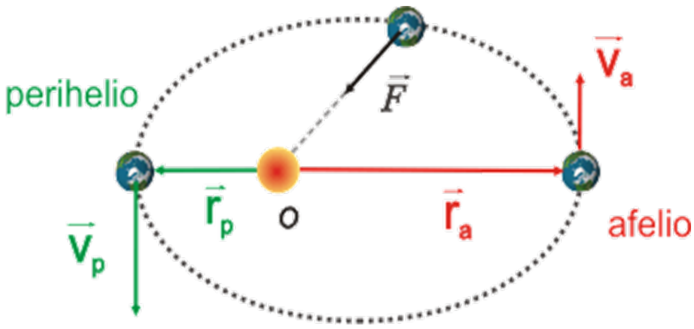
- en el caso de una partícula libre, la fuerza a la que está sometida es nula por lo que no ejerce momento y por tanto se mueve con L constante, además de con momento lineal constante
- cuando el vector posición es paralelo a la fuerza, el producto vectorial es nulo por lo que L también es constante. Esto sucede en el caso de una fuerza central, es decir, que pasa siempre por un punto fijo: el momento angular de una partícula sometida exclusivamente a una fuerza central es constante. La fuerza gravitatoria es una fuerza central por lo que, por ejemplo, la Tierra se mueve con respecto al Sol con L constante.



La fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre la Tierra es una fuerza central y por tanto paralela al vector de posición. Por eso, el momento de esta fuerza es nulo y el momento angular de la Tierra respecto al Sol permanece constante.

Veamos las consecuencias que tiene este hecho:

La Tierra está sometida a la acción de una fuerza gravitatoria ejercida por el Sol. Esta fuerza es la causante de que la trayectoria de la Tierra se curve, puesto que origina una aceleración normal o centrípeta. La trayectoria que describe la Tierra es una elipse, estando el Sol en uno de los focos, pero su excentricidad es de sólo 0.0167, es decir, es prácticamente circular. La posición más alejada del Sol recibe el nombre de afelio y la más cercana perihelio: en el afelio la distancia entre el Sol y la Tierra es aproximadamente de 152.6 millones de km y en el perihelio de 147.5 millones de km.



La fuerza gravitatoria que sufre la Tierra es una fuerza central, ya que a lo largo de toda la trayectoria su línea de acción pasa siempre por el Sol. Entonces si tomamos como origen el Sol, la fuerza gravitatoria no hace momento con respecto al origen por lo que, según el teorema de conservación del momento angular y suponiendo que es la única fuerza externa que actúa, **la Tierra se mueve alrededor del Sol con momento angular constante**.

$$\vec{\tau}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ cte}$$

Calculamos el módulo del momento angular en el afelio y en el perihelio:

$$\left|\vec{L}_a\right| = r_a M_T v_a \qquad \left|\vec{L}_p\right| = r_p M_T v_p$$

Igualando ambas expresiones y teniendo en cuenta que la distancia en el afelio r_a es mayor que la distancia en el perihelio r_p se deduce que **la velocidad de la Tierra en el afelio debe de ser menor que la velocidad en el perihelio**: en el perihelio la velocidad de traslación de la Tierra es 30,75 km/s y en el afelio de 28,76 km/s.

$$r_a M_T v_a = r_p M_T v_p$$
$$r_a > r_p \Rightarrow v_a < v_p$$

La segunda Ley de Kepler es una consecuencia de este hecho:

"Cada planeta se mueve de tal manera que el radio vector (recta que une el centro del Sol con el planeta) barre áreas iguales en tiempos iguales"

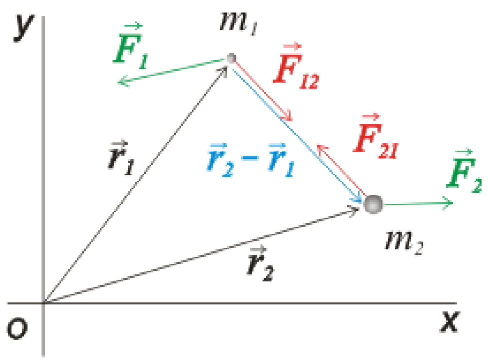
Traslaciones	Rotaciones
$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Una fuerza neta sobre una partícula produce un cambio en el momento lineal de la misma	**Un torque neto sobre una partícula produce un cambio en el momento angular de la misma**
Una fuerza neta actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento lineal de la partícula	**Un torque neto actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento angular de la partícula**
La *fuerza* neta es la responsable de modificar la traslación de los cuerpos, es decir, son el *agente dinámico de traslación*	**El torque neto es responsable de modificar la rotación de los cuerpos, es decir, el *agente dinámico de rotación***

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

El momento angular de un sistema de partículas se define como la suma vectorial del momento angular de cada una de ellas:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Supongamos un sistema formado por dos partículas sobre las que actúan fuerzas internas (en rojo) y fuerzas externas (en verde):



Para saber bajo qué condiciones se conserva **L**, expresamos su derivada aplicando los conceptos vistos en conservación del momento angular de una partícula:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right)}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

Calculamos los momentos de las fuerzas que actúan sobre cada partícula, recordando que las fuerzas internas tienen igual módulo y sentido opuesto:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

Al sumar ambos, se anula el término correspondiente a las fuerzas internas ya que resulta un producto vectorial de vectores paralelos, como se puede ver en el dibujo anterior:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cancel{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{21}}$$

Generalizando este caso para un sistema de más partículas, se puede afirmar que:

Las fuerzas internas no hacen variar el momento angular de un sistema

Entonces expresamos la derivada de **L** como:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

donde: $\vec{\tau}_{ext}$ Es la suma de los momentos de las fuerzas externas

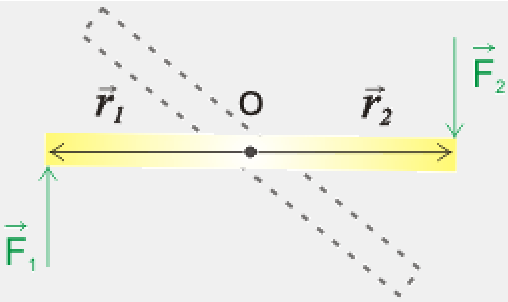
El torque neto (con respecto a un eje que pase por un origen en un sistema de referencia inercial) debido a las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual al ritmo de variación del momento angular total del sistema con respecto a dicho origen

El **Teorema de Conservación del Momento Angular para sistemas** queda finalmente:

$$\vec{\tau}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ cte}$$

Es importante destacar que para calcular la suma de los momentos de las fuerzas externas **es necesario calcular el momento de cada una de las fuerzas y luego sumarlos todos vectorialmente**, es decir, no es válido sumar primero las fuerzas externas y luego calcular el momento de la resultante.

En el siguiente ejemplo se observa que la suma de las fuerzas externas es nula, pero los momentos ejercidos por ambas fuerzas con respecto a *O* van en el mismo sentido, por lo que no se cancelan y por tanto el momento angular del sistema no se conserva.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \Sigma\vec{F}_{ext} = 0$$

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \neq 0$$

$$\vec{\tau}_{ext} \neq 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$$

Las fuerzas externas se anulan, pero no la suma de los momentos. No se conserva el momento angular del sistema.

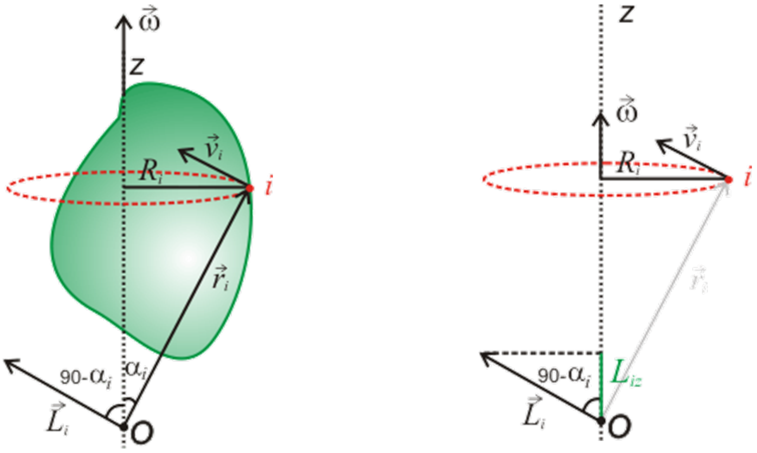
Si el sistema está **aislado** (no sometido a fuerzas externas) es evidente que no hay momento de dichas fuerzas luego:

En un sistema aislado se conserva el momento angular

Esto quiere decir que si en un sistema aislado parte del sistema varía su momento angular debido a fuerzas internas, el resto del sistema sufrirá una variación de momento que cancele la anterior, del mismo modo que la conservación del momento lineal en sistemas aislados es la causante del retroceso de un arma al disparar, por ejemplo.

MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RIGIDO

Consideremos un sólido de forma arbitraria que rota con velocidad angular ω con respecto a un eje *Z* que, para simplificar, consideraremos fijo con respecto a un sistema de referencia inercial, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Cada partícula del sólido describe un movimiento circular con velocidad angular ω y su momento angular calculado con respecto al origen *O* viene dado por:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

El momento angular del sólido con respecto a *O* es simplemente el momento angular de un sistema de partículas, es decir, la suma de los momentos angulares de todas las partículas del sistema.

Como veremos a continuación, es más interesante calcular la **proyección del momento angular de la partícula sobre el eje de giro**, que viene dada por:

$$L_{iz} = L_i \cos(90 - \alpha_i) = L_i \operatorname{sen}\alpha_i = r_i m_i v_i \operatorname{sen}\alpha_i$$

De las figuras anteriores se deduce que el **radio de giro** (R_i) de la partícula i-ésima del sólido y la velocidad lineal de dicha partícula son respectivamente:

$$R_i = r_i \operatorname{sen}\alpha_i$$

$$v_i = \omega R_i$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, la proyección del momento angular de la partícula i-ésima sobre el eje de giro queda:

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$$

La **proyección del momento angular del sólido rígido sobre el eje de giro $\mathbf{L_z}$** será la suma de las proyecciones de todas las partículas del sólido sobre dicho eje:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega$$

La sumatoria que aparece en la ecuación anterior es el momento de inercia I del sólido con respecto al eje de giro.[1] Veremos su significado físico cuando obtengamos la ecuación del movimiento de rotación de un sólido. Sus unidades en el Sistema Internacional son kg m^2, y se define:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

Finalmente, la proyección del vector momento angular del sólido es:

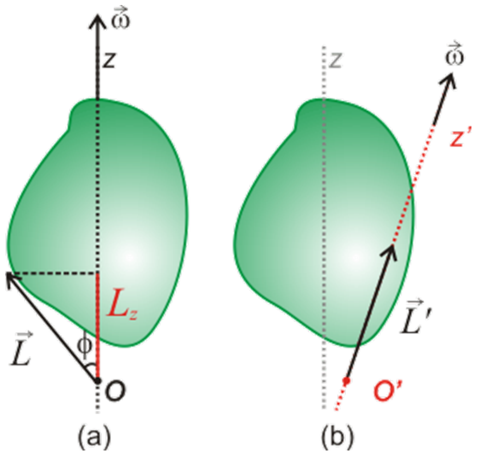
$$L_z = I\omega$$

En general, el vector momento angular de un sólido con respecto a un determinado eje de giro no tiene por qué ser paralelo a este último, por lo que la proyección de **L** sobre el eje no coincide con su módulo.

[1] En realidad, esa fórmula corresponde al momento de inercia de un sólido discreto, para una distribución continua de masa la sumatoria se transforma en una integral

$$I = \int dm\, R^2$$

donde *dm* es un elemento de masa del sólido y R^2 su distancia al eje de giro de este.
Algunos valores se presentan en el apéndice 1.



A la izquierda se ha representado el momento angular total de un sólido con respecto a un eje de giro Z. La dirección del momento angular no coincide con la del eje. A la derecha, se ha representado una situación hipotética en la que el vector ***L*** *estaría alineado con el eje de giro Z'.*

Sin embargo, para cualquier sólido existen al menos tres ejes (denominados ejes principales de inercia) tales que, si el sólido rota con respecto a alguno de ellos, el vector momento angular es paralelo al eje y, por tanto la proyección de L sobre el eje coincide con su módulo (ver figura anterior). Cuando el sólido tiene algún eje de simetría, los ejes principales de inercia coinciden con estos últimos.

Cuando un sólido rota con respecto a uno de sus ejes principales de inercia, el **vector momento angular** del sólido viene dado por:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

A partir de esta ecuación deduciremos la **ecuación del movimiento de rotación de un sólido rígido** con respecto a uno de sus ejes principales de inercia.

ECUACION DE MOVIMIENTO PARA LA ROTACION DE UN CUERPO SOLIDO

El momento angular de un sólido rígido que rota con respecto a uno de sus ejes principales de inercia (que por el momento supondremos fijo con respecto a un sistema de referencia inercial) viene dado por:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

donde *I* es el momento de inercia del sólido y $\vec{w}$ es su velocidad angular.

La variación del *estado de rotación* de un sólido viene determinada por la variación de su velocidad angular por lo que, si queremos describir el movimiento de rotación debemos encontrar una ecuación que nos permita calcular la **aceleración angular** del mismo.

Puesto que en la expresión del momento angular aparece la velocidad angular, derivándola obtendremos la aceleración angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

La variación del momento angular de un sistema de partículas (y, por tanto, de un sólido) es igual al momento de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum\vec{\tau}_{ext} = \sum\vec{r}\times\vec{F}_{ext}$$

Igualando ambas expresiones,

$$\sum\vec{r}\times\vec{F}_{ext} = I\vec{\alpha}$$

Ésta es la **ecuación del movimiento de rotación de un sólido rígido** que, como puede observarse, es análoga a la segunda ley de Newton.

El torque externo neto que actúa sobre un sólido rígido que rota alrededor de un eje fijo es igual al momento de inercia con respecto al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto con respecto a ese eje

La segunda ley de Newton nos proporciona un modo de calcular la aceleración de una partícula (o del centro de masas de un sistema de partículas) conociendo las fuerzas que actúan sobre ella. La ecuación del movimiento de rotación de un sólido nos permite determinar su aceleración angular calculando el **momento de las fuerzas externas** que actúan sobre él.
Para que un cuerpo rote (para que tenga aceleración angular) no basta con que actúen fuerzas externas sobre él, sino que **estas fuerzas han de tener momento resultante no nulo**.

El papel que juega la masa de una partícula en la segunda ley de Newton (su *inercia*, es decir, la resistencia que opone a cambiar su estado de movimiento), lo desempeña ahora el momento de inercia.

Despejando **α**, se obtiene:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{I}\sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext}$$

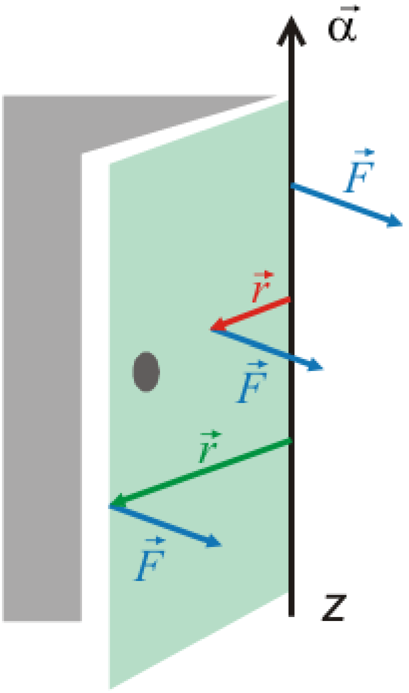
Es decir, para un momento de fuerzas dado, cuanto mayor sea el momento de inercia del sólido menor será su aceleración angular, por lo que la velocidad angular del mismo variará más lentamente.

El momento de inercia mide la resistencia que opone un cuerpo a variar su estado de movimiento de rotación.

De la ecuación anterior se deduce que **el vector aceleración angular es paralelo a la resultante de los momentos de las fuerzas externas**, del mismo modo que la aceleración de una partícula es paralela a la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella.

Cuanto mayor sea el módulo de esta resultante, mayor será el módulo de la aceleración angular.

En el siguiente ejemplo se analiza el movimiento de rotación de una puerta utilizando la ecuación del movimiento de rotación.



Si para abrirla aplicamos la fuerza directamente sobre la bisagra, la puerta no se abrirá, ya que en este caso:

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = 0$$

Para que la puerta se abra es necesario aplicar la fuerza a una cierta distancia de la bisagra, puesto que de este modo:

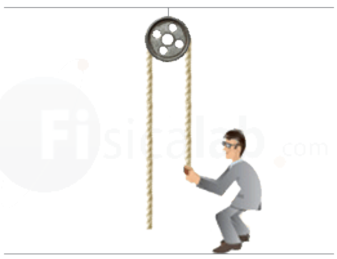
$$\vec{r} \times \vec{F} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \neq 0$$

Cuanto mayor sea el módulo de **r** mayor será el momento de la fuerza **F** y por tanto mayor será la aceleración angular. Por eso es más fácil abrir una puerta cuanto más lejos de la bisagra aplicamos la fuerza.

Si la fuerza se aplica en una dirección paralela al vector **r** la puerta no se abrirá, ya que en este caso el momento de la fuerza será nulo y no habrá aceleración angular.

Cuando el momento de una fuerza que actúa sobre un cuerpo en un punto es distinto de cero, los puntos del sólido realizarán una rotación sobre el eje de giro. La velocidad de todos los puntos es la misma, $\vec{w}$. Mientras actúe la fuerza el movimiento será acelerado, con aceleración angular $\vec{\alpha}$

EJEMPLO: El señor de la figura aplica una fuerza constante sobre la polea de 40 N. Determina su velocidad angular al cabo de 10 segundos sabiendo que el radio de la polea es de 12 cm, la masa es de 2 kg y el momento de inercia de una polea se puede aproximar por la expresión $I = m \cdot r^2 /2$



La fuerza que ejercemos se traslada a la polea a través de la cuerda con lo cual es responsable, a través de un momento de fuerza, de su giro. El valor de dicho momento viene dado por:
$\vec{\tau} = \vec{r}x\vec{F} \Rightarrow \tau = r.R = 0.12m.40N = 4.8\ N.m$ (dirección y sentido: entrante de la hoja, la polea gira en sentido horario)

Debemos determinar, en primer lugar, la aceleración angular de la polea, a partir de la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = I\vec{\alpha}$$

Entonces: $4.8N.m = \left(\frac{1}{2}.2.0.12^2 kg.m^2\right).\alpha$

$$333.3\frac{rad}{s^2} = \alpha$$

Por tanto, la velocidad angular al cabo de 10 segundos será:
$w(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t = 333.3 \cdot 10$ rad/s = 3333 rad/s

CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

El momento angular total de un sistema es constante, tanto en dirección como en módulo si el torque neto debido a las fuerzas externas se anula

$$\sum \boldsymbol{\tau_{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{L_{tot}} = \boldsymbol{constante\ o}\ \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Si la masa de un sistema aislado que rota sufre una redistribución, el momento de inercia cambia.

Como la magnitud del momento angular del sistema es $\vec{L} = I\vec{\omega}$

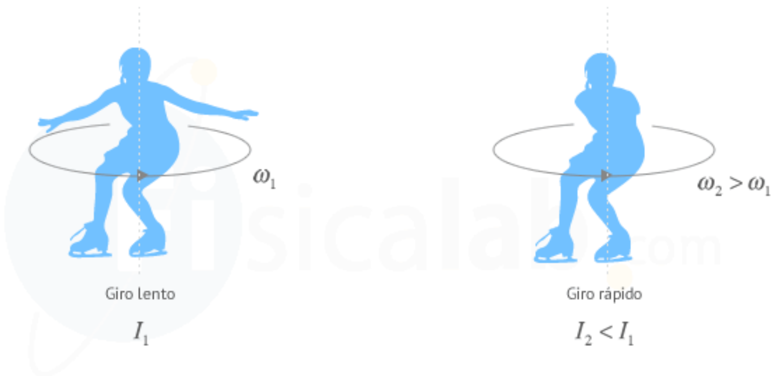
La ley de conservación del momento angular requiere que el producto de *I* por ω permanezca constante

Es decir, para un sistema aislado, un cambio en I requiere un cambio en ω

Una ***patinadora*** que mientras gira recoge sus brazos es un ejemplo interesante. Al recoger sus brazos la distribución de masas respecto al eje varía: toda la masa se concentra más cerca del mismo por lo que el momento de inercia disminuye. En el movimiento de plegar los brazos no son necesarios momentos de fuerza, por lo que el momento angular permanece constante. Observa qué ocurre entonces:

$$(I_1 . w_1)_{ANTES} = (I_2 . w_2)_{DESPUES}$$

Esto significa que, dado que I_2 es menor que I_1, la velocidad angular ω2 debe ser mayor que ω1. Es decir, cuando el patinador pliega sus brazos, su velocidad angular aumenta.



La patinadora puede aumentar su velocidad de giro recogiendo sus brazos: Al situarse las partículas de la misma más próximas al eje de giro, disminuye el momento de inercia I por lo que la velocidad debe aumentar para mantener el momento angular constante

ROTACION CON RESPECTO AL CENTRO DE MASAS

Cuando el eje de rotación de un sólido no está fijo, su movimiento será una combinación de rotación y traslación, como está descrito en la introducción. En este caso, para describir el movimiento son necesarias dos ecuaciones: una que nos permita calcular la aceleración de su centro de masas y otra que nos dé su aceleración angular con respecto a un eje que pasa por el centro de masas.

La primera de ellas es la segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M\, \vec{a}_{CM}$$

Y la segunda es la ecuación del movimiento de rotación pero referida al centro de masas del sólido.

En el siguiente cuadro se resume el modo de analizar el movimiento de un sólido rígido:

Traslación	$\Sigma \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM}$
+	
Rotación	$\Sigma \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = I\vec{\alpha}$

EQUILIBRIO ESTATICO

Una aplicación directa de las ecuaciones anteriores es la **estática**, cuyo objetivo es determinar en qué condiciones un sistema se encuentra en reposo. Su aplicación más importante es al cálculo de estructuras, donde se emplea para determinar las fuerzas soportadas por un puente, un edificio, una viga, un rascacielos, etc.

Para que un cuerpo esté en equilibrio estático deben cumplirse simultáneamente dos condiciones:

- **Que el sólido no se traslade**: la aceleración de su centro de masas debe ser cero.
- **Que el sólido no rote**: la aceleración angular del sólido debe ser también nula.

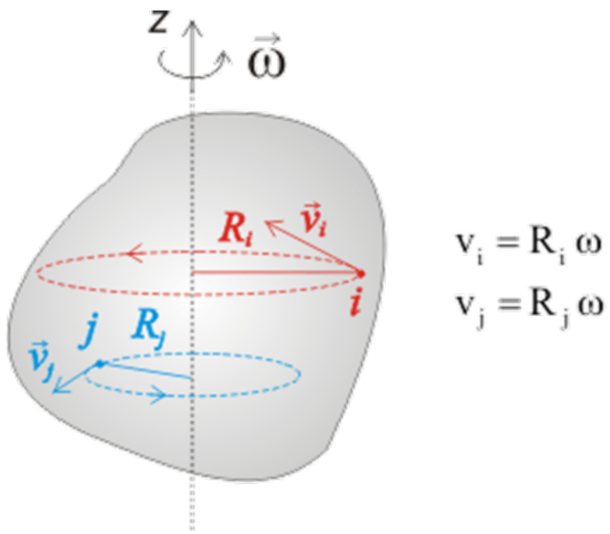
Estas dos condiciones se imponen respectivamente a la ecuación del movimiento de traslación del centro de masas (segunda ley de Newton) y a la ecuación de la rotación:

No hay traslación:	$\Sigma \vec{F}_{ext} = 0$
No hay rotación:	$\Sigma \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = 0$

La segunda condición se cumple con independencia del origen que se elija para calcular los momentos de las fuerzas externas. Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se calculan las fuerzas que actúan sobre el sistema en equilibrio.

ENERGIA DE ROTACION DE UN SOLIDO RIGIDO

La energía cinética de un sistema es la suma de las energía cinética de las partículas que lo forman. Cuando un sólido rígido gira en torno a un eje que pasa por su centro de masas las partículas describen un movimiento circular en torno a dicho eje con una velocidad lineal distinta según sea la distancia de la partícula al eje de giro pero todas giran con la misma velocidad angular ω, ya que en caso contrario el sólido se deformaría. La relación entre ambas velocidades aparece en la figura siguiente:



La energía cinética del sólido causada por el movimiento de rotación será entonces:

$$E_{c(rot)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

La sumatoria es el momento de inercia del sólido con respecto al eje de rotación, luego:

$$E_{c(rot)} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Esta energía corresponde a la energía cinética interna, ya que tiene está referida al centro de masas. Si éste a su vez se está moviendo con respecto a un origen, la energía cinética total del sólido se calculará sumando la energía cinética de rotación y la de traslación del centro de masas (energía cinética orbital):

$$E_c = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

A la hora de aplicar el Teorema de Conservación de la Energía habrá que tener en cuenta estos nuevos términos.

EJEMPLO:

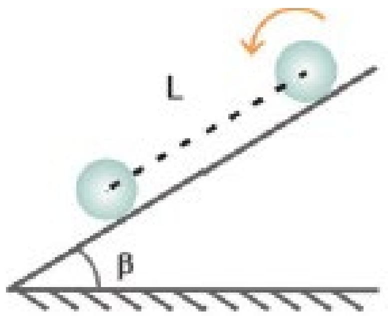
Una esfera homogénea de masa m y radio R rueda sin deslizar por un plano inclinado con un ángulo β.

Datos: $\beta = 30^0$; m = 0.5 kg; R = 15 cm; L = 2.5 m; ICM =(2/5) mR^2. Tomar $g = 10\ m/s^2$

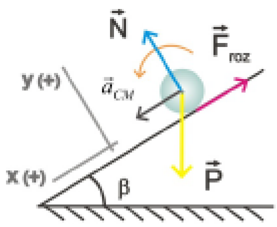
a) Dibujar las fuerzas que actúan sobre la esfera y expresar las ecuaciones de la dinámica de rotación y de traslación.

b) Calcular la aceleración del centro de masas, la aceleración angular con respecto al centro de masas y la fuerza de rozamiento.

c) Si inicialmente se encontraba en reposo, calcular la velocidad del CM y la velocidad angular de rotación cuando ha rodado por el plano una longitud L.



a)



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_{CM} \qquad \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{roz} = m\,\vec{a}_{CM}$$

$$x: \quad m\,g\,sen\,\beta - F_{roz} = m\,a_{CM} \qquad (1)$$

$$y: \quad m\,g\cos\beta - N = 0$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I_{CM}\,\vec{\alpha} \quad \text{con respecto al CM}$$

$$F_{roz}\,R = I_{CM}\,\alpha = I_{CM}\,\frac{a_{CM}}{R} \qquad (2)$$

$$\text{Condición de rodadura:} \quad a_{CM} = R\alpha$$

b)

Sustituyendo datos en (2):

$$F_{roz}\,R = \frac{2}{5} m R^2 \frac{a_{CM}}{R} \quad ; \quad F_{roz} = \frac{2}{5} m\,a_{CM}$$

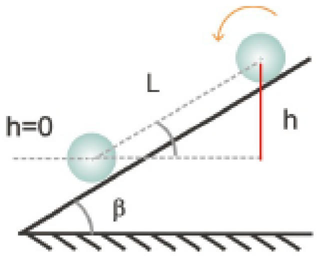
$$\text{de (1):} \quad m\,g\,sen\,\beta - \frac{2}{5} m\,a_{CM} = m\,a_{CM}$$

Despejando:

$$a_{CM} = \frac{5}{7} g\,sen\,\beta = 3.57\, m\,s^{-2}\ ; \quad \alpha = \frac{a_{CM}}{R} = \frac{3.57}{0.15} = 23.8$$

$$F_{roz} = \frac{2}{5} 0.5\ (3.57) = 0.71\ N$$

c)



en rodadura $W_{roz} = 0 \quad E_f = E_i$

$$\frac{1}{2} m\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = m\, g\, h = m\, g\, L\, sen\, \beta$$

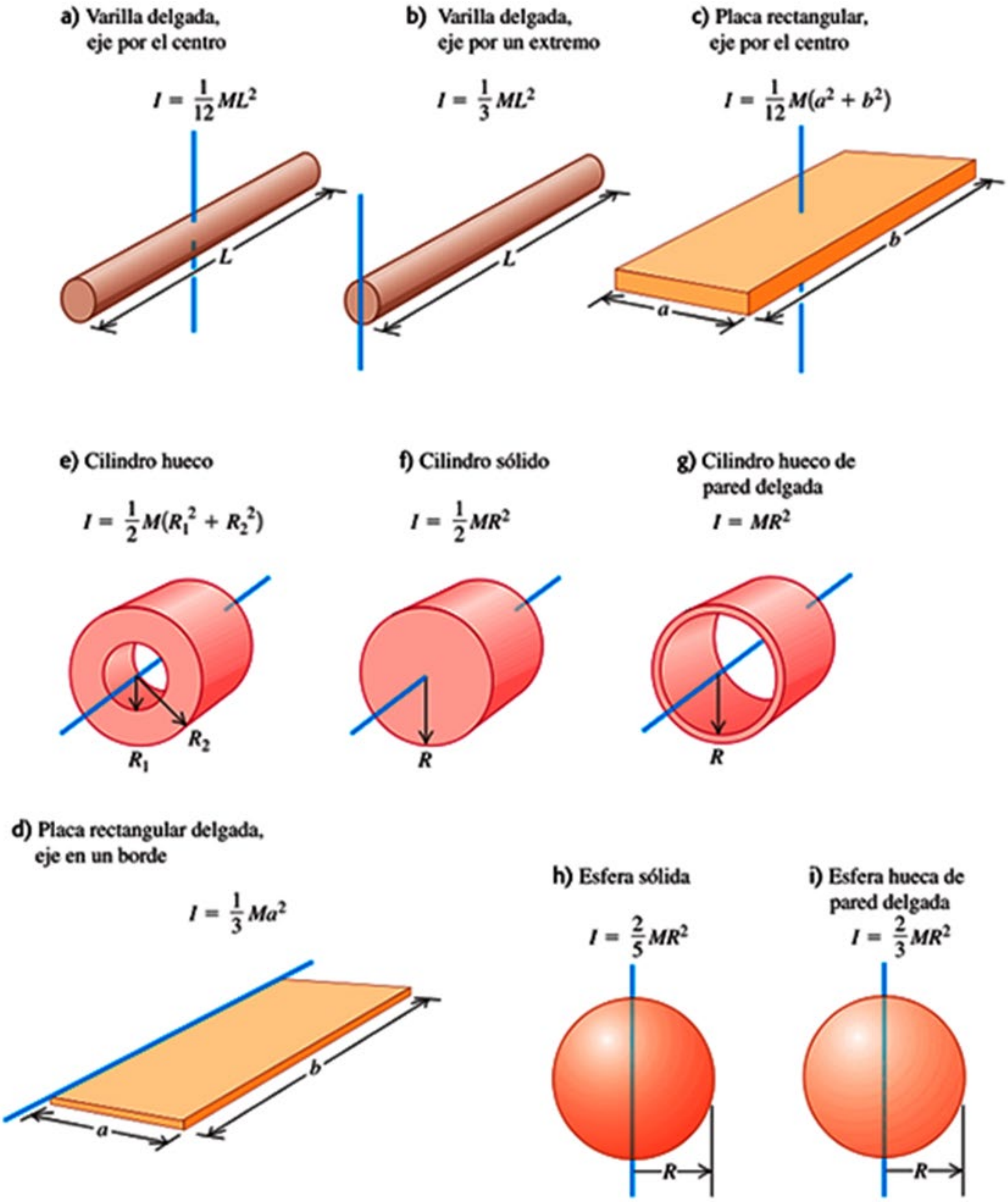
condición de rodadura: $v_{CM} = R\,\omega$

$$\frac{1}{2} m\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5} m\, R^2 \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 = m\, g\, L\, sen \beta$$

$$v_{CM} = \left(\frac{10}{7} g\, L\, sen \beta\right)^{\frac{1}{2}} = 4.22\, m\, s^{-1} \qquad \omega = \frac{v_{CM}}{R} = 28.13\, rad\, s^{-1}$$

APENDICE 1

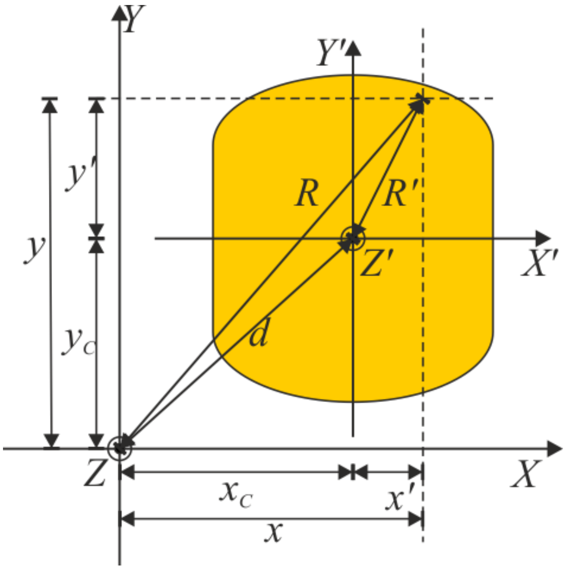
MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE MASA (Homogéneas)



APENDICE 2

Teorema de Steiner (o de los ejes paralelos)

El momento de inercia puede definirse respecto a un eje arbitrario, que no necesariamente debe pasar por el centro de masas del sólido. No obstante, los ejes que pasan por el CM tienen propiedades particulares.
Consideremos dos ejes paralelos: uno que pasa por el CM y uno situado a una distancia *d* del primero. Sea I_G el momento de inercia respecto al eje que pasa por el CM e *I* el momento de inercia respecto al eje paralelo. Buscamos una relación entre estas dos cantidades.



Si consideramos el eje Z como el paralelo al que pasa por el CM el momento de inercia se puede escribir

$$I = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + \cdots$$

Introduciendo las posiciones relativas al CM

$$x_1 = x_G + x_1' \qquad y_1 = y_G + y_1' \qquad \cdots$$

queda

$$\begin{aligned} I &= m_1(x_G^2 + y_G^2) + 2(m_1 x_G x_1' + m_1 y_G y_1') + m_1({x_1'}^2 + {y_1'}^2) + \cdots = \\ &= m_1(x_G^2 + y_G^2) + 2x_G(m_1 x_1' + m_2 x_2' + \cdots) + 2y_c(m_1 y_1' + \cdots) + m_1({x_1'}^2 + {y_1'}^2) + \cdots \end{aligned}$$

Ahora bien, la posición del centro de masas relativa a sí mismo es nula, por lo que

$$m_1 x_1' + m_2 x_2' + \ldots = 0 \qquad m_1 y_1' + m_2 y_2' + \ldots = 0$$

Además se cumple

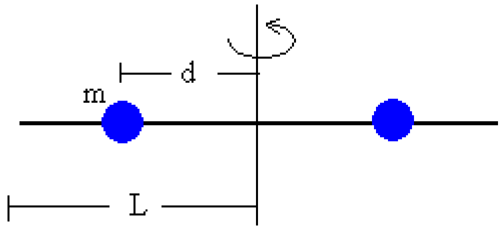
$$x_G^2 + y_G^2 = d^2$$

con *d* la distancia entre los ejes. Llevando esto a la expresión del momento de inercia queda

$$I = (m_1 + m_2 + \cdots)d^2 + 0 + \left(m_1({x_1'}^2 + {y_1'}^2) + m_2({x_2'}^2 + {y_2'}^2) + \cdots\right) = Md^2 + I_G$$

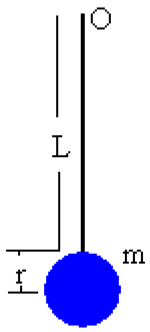
Este es el teorema de Steiner o de los ejes paralelos. Nos permite calcular el momento de inercia respecto a un eje arbitrario si conocemos el valor respecto a un eje paralelo que pase por el CM.
Este teorema nos dice que el momento de inercia en ejes paralelos es mínimo en el eje que pasa por el CM (lo cual sirve también como definición del centro de masas).

Ejemplos



1) Sea una varilla de masa *M* y longitud *L*, que tiene dos esferas de masa *m* y radio *r* simétricamente dispuestas a una distancia *d* del eje de rotación que es perpendicular a la varilla y pasa por el punto medio de la misma.

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + 2\left(\frac{2}{5}mr^2 + md^2\right)$$



2) Un péndulo consiste en una varilla de masa *M* y longitud *L*, y una lenteja de forma cilíndrica de masa *m* y radio *r*. El péndulo puede oscilar alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por su extremo O

$$I = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}mr^2 + m(L+r)^2\right)$$