Cátedra de Física 1 - FRH - UTN

Sistema de Partículas

Índice

1) Definición de Sistema de Partículas - Centro de masa - Fórmulas

Un sistema de partículas es un conjunto de masas que interactúan entre sí. Las partículas que forman parte del sistema pueden hacerse fuerza entre sí, a estas fuerzas las llamaremos *fuerzas internas*. Un sistema de partículas podría ser una piedra, por ejemplo; en cuyo caso podríamos identificar a las partículas como los átomos que la componen y a las fuerzas internas como aquellas que mantienen unidos a los átomos (fuerzas electromagnéticas). Pero no es necesario que las partículas estén unidas rígidamente para conformar un sistema de partículas, pueden estar en movimiento también. Podemos pensar que los planetas del sistema solar junto con el Sol conforman un sistema de partículas, en el cual cada cuerpo celeste sería una partícula y las fuerzas gravitatorias que se ejercen entre ellos serían las fuerzas internas al sistema. Por supuesto que puede haber un agente externo al sistema que ejerza fuerza sobre una o más partículas del sistema, a estas fuerza las llamaremos *fuerzas externas*. En el ejemplo de la piedra como sistema de partículas, si alguien levanta la piedra con la mano estaría ejerciendo una fuerza externa sobre el sistema piedra; el propio peso de la piedra también sería un ejemplo de fuerza externa. En el caso del sistema solar, podría considerarse que la atracción gravitatoria del centro de la galaxia es una fuerza externa. Cabe aclarar que las fuerzas externas pueden pasar a ser internas si se cambia la definición del sistema de partículas. Por ejemplo, si defino ahora el sistema de partículas como toda la galaxia, entonces la fuerza que ejerce el centro de la galaxia sobre el sistema solar sería una fuerza interna.

En la figura 1 se observa un sistema de N partículas en un sistema de coordenadas tridimensional. Los puntos negros representan las partículas cuyas masas valen m_i, donde *i* es un subíndice que identifica la partícula, desde 1 hasta N. Se puede definir que el sistema de partículas tiene un centro, que llamaremos *centro de masa*. El vector $\bar{r}_{CM}$ indica la posición del centro de masa respecto al origen de coordenadas; este vector tiene tres coordenadas:

$$\bar{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) \quad (1)$$

Cada una de estas tres coordenadas se definen de la siguiente manera:

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \dots\dots\dots\dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad (2)$$

$$y_{CM} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + \dots\dots\dots\dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad (3)$$

$$z_{CM} = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3 + \dots\dots\dots\dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad (4)$$

Estas definiciones pueden parecer algo complicadas, pero no son más que un simple promedio. Para mostrar esto, supongamos que queremos calcular la nota promedio de un curso. Sabemos que 12 alumnos se sacaron un 7 y 11 alumnos se sacaron un 5. La nota promedio puede calcularse con la siguiente expresión:

$$nota\ promedio = \frac{7\ x\ 12 + 5\ x\ 11}{12 + 11} = 6,04\ ,$$

Notar que esta expresión tiene la misma forma matemática que las ecuaciones que permiten calcular la posición del centro de masa.

FIGURA 1

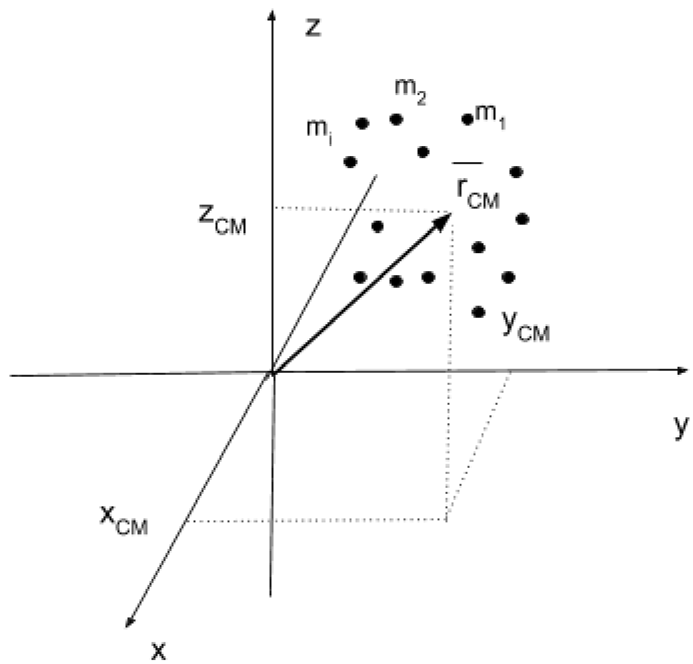


Figura 1. Sistema de N partículas en un sistema de ejes tridimensional. El vector $\bar{r}_{CM}$ indica la posición del centro de masa.

Ahora bien, el centro de masa puede estar moviéndose también. Si mi sistema de partículas es un conjunto de pájaros, por ejemplo, naturalmente podemos imaginar que el centro de masa de la bandada se mueve con una velocidad que llamaremos $\bar{v}_{CM}$, y que puede calcularse como

$$\bar{v}_{CM} = \frac{\bar{v}_1 m_1 + \bar{v}_2 m_2 + \bar{v}_3 m_3 + \text{..........}}{m_1 + m_2 + m_3 + \text{.......}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{v}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad (5)\,,$$

donde $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_N$ son las velocidades de las partículas (pájaros). Notar que en este caso, se usó una notación vectorial. Es posible también, desplegar esta fórmula (5) en sus tres coordenadas $v_{CM\,x}, v_{CM\,y}, v_{CM\,z}$. No escribiremos las expresiones para estas tres magnitudes porque son análogas a las ecuaciones (2), (3) y (4), respectivamente. Solo que para escribirlas hay que sustituir la posición en cada eje por la velocidad en ese eje. ¿Te animás a escribir las fórmulas para $v_{CM\,x}, v_{CM\,y}, v_{CM\,z}$?

Finalmente, el centro de masa también puede estar acelerado. Si defino mi sistema de partículas como un conjunto de paracaidistas en caída libre, claramente el centro de masa puede estar acelerado. La definición de la *aceleración del centro de masa* es análoga a las de la posición y de la velocidad, solo que considera la aceleración de cada partícula $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_N)$:

$$\overline{a}_{CM} = \frac{\overline{a}_1 m_1 + \overline{a}_2 m_2 + \overline{a}_3 m_3 + \dots\dots\dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad (6)\,.$$

Esta expresión se puede elaborar un poco para llegar a otra expresión que va a ser de nuestro interés. Para empezar, recordemos que por la segunda ley de Newton $\overline{a}_1 m_1$ es la fuerza sobre la partícula 1; $\overline{a}_2 m_2$ es la fuerza sobre la partícula 2, etc. De tal manera que podemos escribir:

$$\overline{a}_1 m_1 = \overline{F}_1$$
$$\overline{a}_2 m_2 = \overline{F}_2$$
$$\overline{a}_3 m_3 = \overline{F}_3\,.$$

etc.

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación (6) queda

$$\overline{a}_{CM} = \frac{\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \dots\dots\dots}{M_T} \quad (7)\,,$$

donde también reemplazamos $m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots = M_T$, la masa total. Cada partícula puede interactuar con otra partícula y al mismo tiempo, con un agente externo al sistema. Entonces, la fuerza sobre cada una de las partículas puede dividirse en fuerzas internas y fuerzas externas sobre esa partícula. Por ejemplo, la fuerza sobre la partícula 1 puede escribirse como $\overline{F}_1 = \overline{F}_{1\,int} + \overline{F}_{1\,ext}$. Aplicando esta idea para todas las partículas, la ecuación (7) queda

$$\overline{a}_{CM} = \frac{\overline{F}_{1\,int} + \overline{F}_{1\,ext} + \overline{F}_{2\,int} + \overline{F}_{2\,ext} + \overline{F}_{3\,int} + \overline{F}_{3\,ext} + \dots\dots\dots}{M_T} \quad (8).$$

Ahora bien, por tercera ley de Newton, las fuerzas internas se anulan entre sí. Para entender esto pensemos que las fuerzas que las partículas 1 y 2 se ejercen entre sí son de igual módulo, igual dirección, pero de sentido opuesto, de tal manera que $\overline{F}_{12} + \overline{F}_{21} = 0$. Considerando que esto sucede para todos los pares de partículas concluímos que todas las fuerza internas se anulan, en expresión matemática:

$$\sum_{i}^{N} \overline{F}_{i\,int} = 0\,.$$

Por lo tanto, de la expresión (8) solo sobreviven las fuerzas externas al sistema y puede escribirse así:

$$\overline{a}_{CM} = \frac{\sum_{i}^{N} \overline{F}_{i\,ext}}{M_T} = \frac{\overline{F}_{ext}}{M_T} \qquad (9)\,,$$

donde hemos llamado $\overline{F}_{ext}$ a la suma de todas las fuerzas externas que hubiere. Por último, si realizamos un sencillo pasaje de términos nos queda la ecuación:

$$\overline{F}_{ext} = M_T \overline{a}_{CM} \qquad (10)\,,$$

que es la ecuación a la que queríamos llegar y que vamos a analizar a continuación.

2) Propiedades del centro de masa

Fíjense que esta ecuación (10) tiene la forma de la segunda ley de Newton para el centro de masa del sistema de partículas. Donde la fuerza es la fuerza externa total, la masa es la masa total del sistema de partículas y la aceleración es la del centro de masa. Lo importante de esta ecuación, es que el centro de masa del sistema de partículas se comporta como una partícula de masa M_T sobre la que está aplicada una fuerza ($\overline{F}_{ext}$). Esto permite deducir algunas propiedades. Por ejemplo, si la única fuerza externa aplicada sobre un sistema de partículas es el peso, la ecuación (10) queda $P = M_T a_{CM}$, lo que dice que el centro de masa se moverá como una partícula de masa M_T sobre la cual está aplicada el peso del sistema de partículas. Una regla práctica que se deduce de acá es que la fuerza peso de un sistema de partículas se aplica sobre su centro de masa.

FIGURA 2

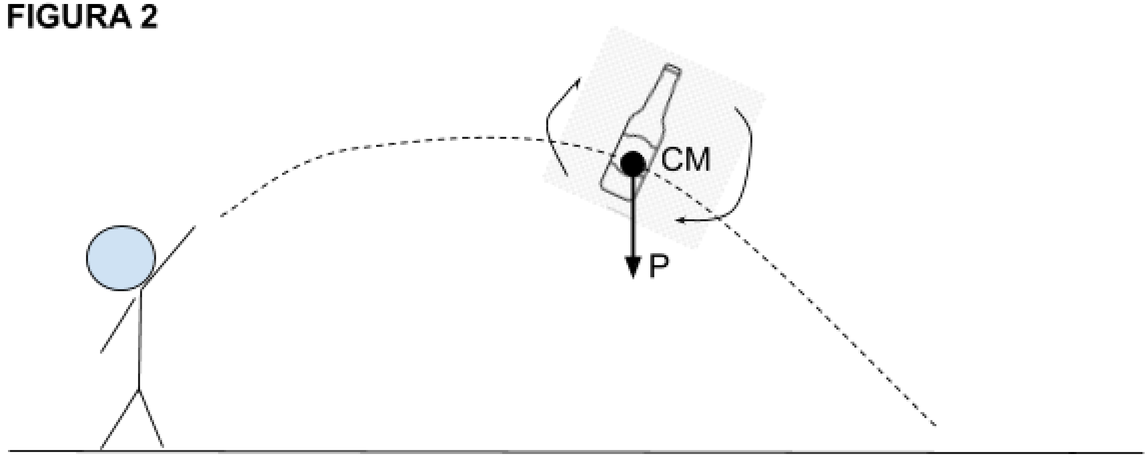


Figura 2. Niñe arrojando una botella. El centro de masa describe una trayectoria parabólica mientras el resto de la botella rota alrededor del centro de masa. Lo mismo pasaría si la botella tuviera líquido en movimiento en su interior. La fuerza peso se ubica sobre el centro de masa de la botella.

En la figura 2 se observa una botella arrojada al aire. La botella no es un cuerpo de forma regular, pero aún así tiene un centro de masa, que podemos imaginar que se ubica más cerca de la parte pesada de la botella. El centro de masa de la botella se mueve como una partícula de masa $M_{botella}$, es decir, el centro de masa describe una trayectoria parabólica (tiro oblicuo). Y la botella rota alrededor del centro de masa. Lo curioso es que esto ocurriría también si la botella tuviera líquido y el líquido se moviera en su interior. ¿Podés encontrar una explicación para esta última afirmación? Si es muy difícil, quizás el siguiente ejemplo ayude a entender.

Consideremos el avión de la figura 3 como un sistema de partículas. En el instante a) nuestro avión viene viajando con una velocidad *v* y actúan sobre él una fuerza de sustentación F y su peso, P. En el instante b) se produce una explosión. Lógicamente la fuerza de sustentación desaparece, pero el peso persiste. Una explosión es un evento donde solo actúan fuerzas internas al avión: las fragmentos del avión se hacen fuerza entre sí. Por lo tanto la única fuerza externa durante y después de la explosión, es el peso. Pero si la única fuerza externa es el peso, el centro de masa del avión debe moverse como se movería una partícula de masa $M_{avión}$ sobre la cual estuviera aplicado el peso del avión. A partir del instante b) estamos en un ejemplo igual al de la botella. En otras palabras, el centro de masa del avión “no se entera” de la explosión y cae como caería una piedra: describiendo una trayectoria parabólica (instante c). Las piezas pueden moverse y separarse a gran velocidad, pero en todo instante el centro de masa de todos los fragmentos del avión está sobre la parábola. Este fenómeno puede usarse para rastrear las partes del avión una vez caídas a tierra. A través de la información de la caja negra pueden conocerse la velocidad y la altitud del avión en el momento de la explosión. Con estos datos puede reconstruirse la trayectoria del centro de masa y se puede calcular dónde cayó el centro de masa. Supongamos que se encontró en tierra un gran fragmento perteneciente al avión a una distancia D del centro de masa. Con esta información se puede calcular dónde se haya algún fragmento grande del avión que todavía no ha sido hallado. Para esto se puede usar la ecuación (2), como veremos a continuación.

FIGURA 3

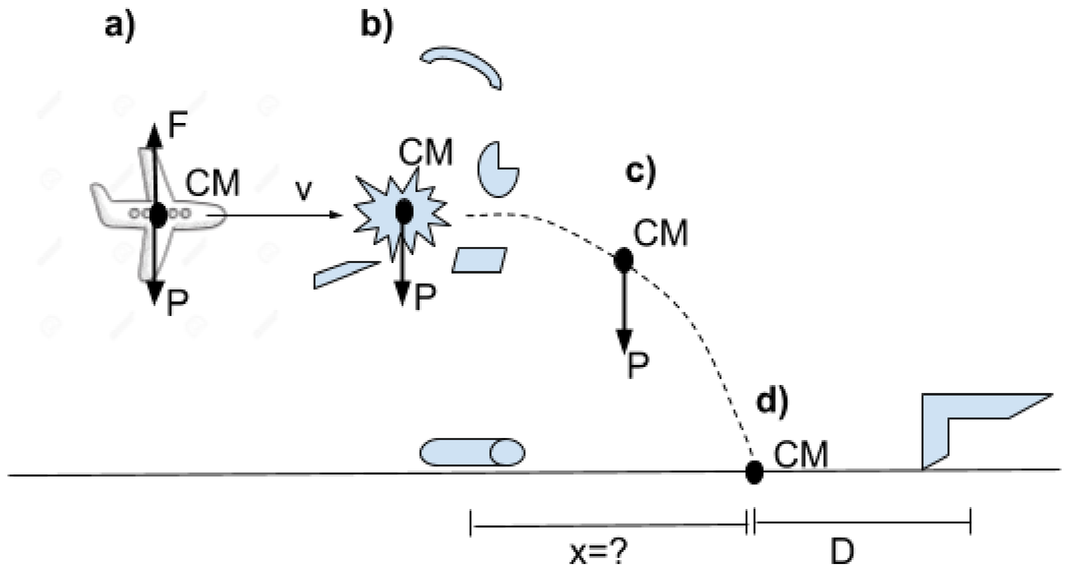


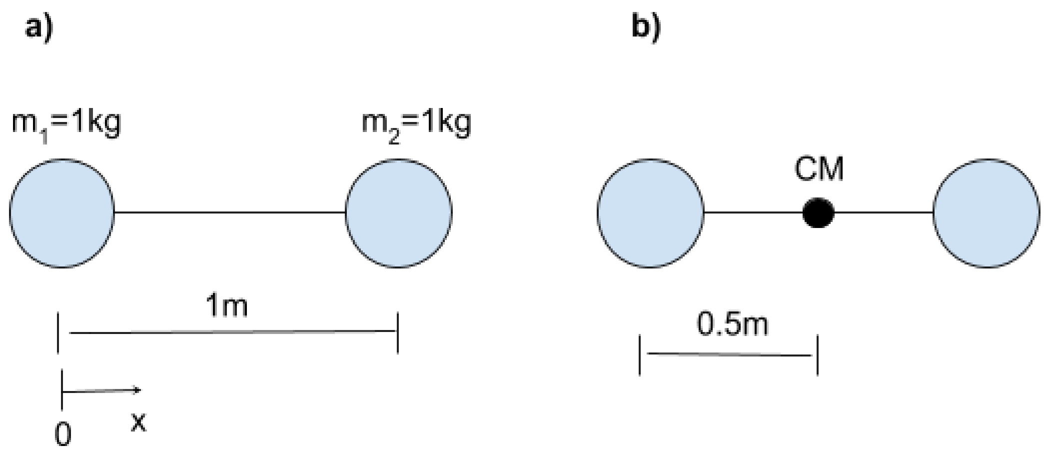
Figura 3. Un avión que viaja con velocidad *v* (instante a) explota en el aire (instante b). El centro de masa del avión describe una trayectoria parabólica (instante c), aunque los fragmentos salgan disparados en direcciones diversas y con distintas velocidades. Esta información se puede usar luego, durante el peritaje, para rastrear partes grandes del avión que aún no han sido halladas en tierra (instante d).

3) Cálculo de la posición del centro de masa

En el ejemplo 1 a) se observa un sistema de partículas formado por dos masas puntuales de 1 kg cada una, separadas una distancia de 1 m. Las masas están unidas por una varilla rígida sin masa. Calculemos la posición del centro de masa del sistema en la dirección *x*; la única dirección relevante en este ejemplo. Para esto, primero hay que elegir un sistema de referencia respecto al cual mediremos la posición de cada una de las masas y del centro de masa. En este caso el origen de coordenadas se eligió coincidente con la masa 1, como se muestra en el panel a). Respecto a este sistema de referencia, calculemos la posición del centro de masa (2):

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \text{.........}}{m_1 + m_2 + m_3 + \text{.......}} = \frac{0m\ 1kg + 1m\ 1kg}{1kg + 1kg} = 0,5\ m$$

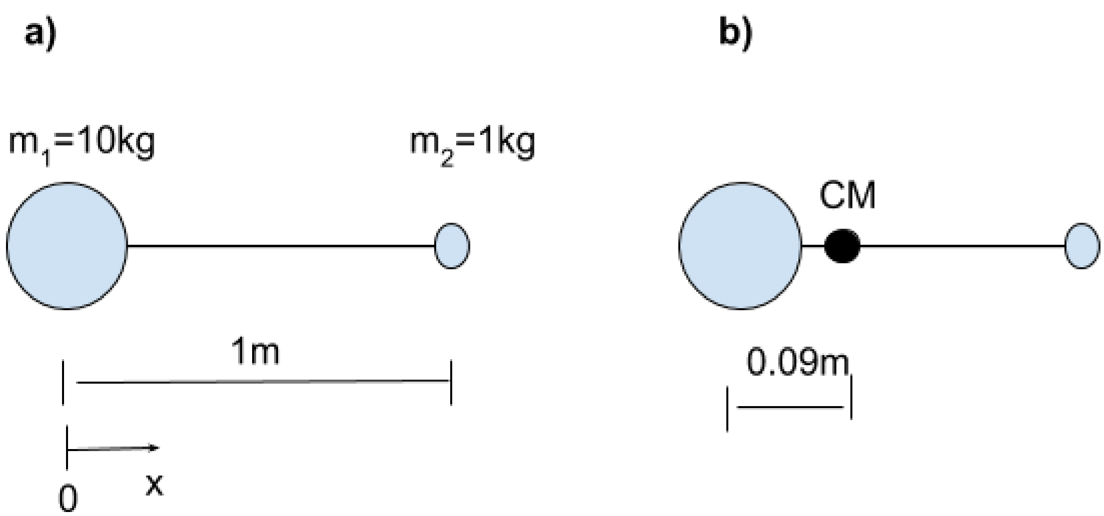
EJEMPLO 1



Ejemplo 1. Pesa simétrica. Sistema de partículas formado por dos masas iguales separadas una distancia de 1 m (panel a). El centro de masa del sistema se encuentra en la mitad del segmento que une las masas (panel b).

Pasemos ahora a un ejemplo en el que las masas no son iguales y, al igual que en el ejemplo anterior, la varilla que une las masas no tiene masa. En el ejemplo 2 se observa un sistema de partículas formado por dos masas diferentes. Calculemos la ubicación del centro de masa según los datos que proporciona la figura:

EJEMPLO 2



Ejemplo 2. Pesa asimétrica. El centro de masa de la pesa asimétrica se encuentra mucho más próximo a la masa grande que a la masa chica.

$$x_{CM} = \frac{0m\ 10kg + 1m\ 1kg}{10kg + 1kg} = 0,09\ m$$

Preguntas

1) Si alguien quiere sostener la pesa del ejemplo 2 haciendo equilibrio con el dedo, deberá ubicar el dedo justo debajo del centro de masa. ¿Cómo podés explicar, en términos de fuerzas, que ése es el único punto en el cual la pesa se mantiene en equilibrio?

2) Si se apoya sobre el piso la pesa asimétrica del ejemplo 2 y se la hace rotar. ¿Siempre va a rotar alrededor del centro de masa, o si se la impulsa de una manera particular se puede conseguir que rote alrededor de otro punto? Para contestar esto podés probar con una lapicera con capuchón arriba de la mesa.

3) La pesa asimétrica sin la varilla podría representar el sistema Sol-Tierra. ¿Dónde estará el centro de masa del sistema Sol-Tierra? ¿Puede estar exactamente en el centro del Sol? Si no es así, ¿es correcto decir que estrictamente la Tierra no gira alrededor del Sol, sino que ambos cuerpos giran alrededor del centro de masa?

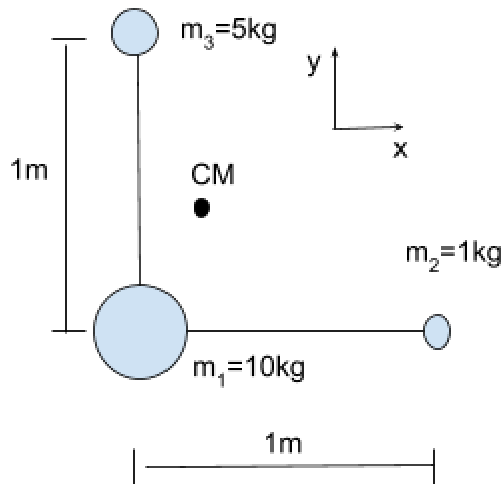
4) Conseguite alguien que sea mucho más grande (en masa) o mucho más chico que vos y tómense de las manos. ¿Dónde está el centro de masa? Ahora, comiencen a girar. ¿Cómo se mueve cada uno? Este juego se llama fideo fino y podemos practicarlo en el aula al regreso de la cuarentena.

Pasemos ahora a un ejemplo en dos dimensiones. En el ejemplo 3 el sistema de partículas está formado por 3 masas. Consideremos el origen de coordenadas coincidente con la masa 1 y calculemos la posición del centro de masa respecto al sistema de referencia que se indica en la figura. Este ejemplo no es más difícil que los anteriores, solo es un poco más largo. Hay que usar las ecuaciones para la posición del centro de masa en *x* y en *y*, ecuaciones (2) y (3), respectivamente. A continuación, va la respuesta, vos podés verificar si está bien:

$x_{CM} = 0,09\ m$

$y_{CM} = 0,33\ m$

EJEMPLO 3



Ejemplo 3. Centro de masa de un sistema de partículas bidimensional.

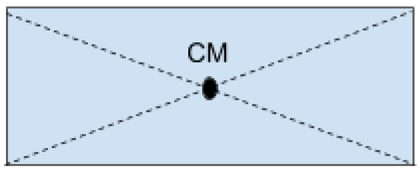
A continuación, calculemos el centro de masa de otro tipo de cuerpos como los que se muestran en la figura. En el panel a) se observa una plancha rectangular de masa M, cuya distribución de masa es uniforme. Esto último significa que la densidad es constante en todos sus puntos, es decir, que no hay más acumulación de masa de un lado que del otro. Se puede pensar que es una plancha metálica o de cartón, a efectos de encontrar el centro de masa es indiferente el material si su distribución de masa es uniforme. En el límite ideal, esta plancha puede pensarse como una *distribución continua de masa*, lo que quiere decir que tenemos que imaginar que la plancha está compuesta por infinitas partículas ubicadas a distancia infinitesimal una de la otra. Si intentamos calcular el centro de masa de esta plancha usando las ecuaciones de los ejemplos anteriores tendríamos que sumar infinitos términos (dijimos que la plancha está compuesta por infinitas masas). No podemos hacerlo sumando de a una partícula, pero sí es posible obtener el resultado de la suma a través del cálculo integral; una herramienta matemática que no veremos por ahora en este curso. Entonces debemos buscar otro método. En el caso de la plancha rectangular podemos usar un argumento de simetría y decir que el centro de masa estará en la intersección de las dos diagonales.

Para el triángulo equilátero de masa M del panel b), la cosa se complica. Se puede demostrar que si el triángulo es homogéneo el centro de masa está ubicado en la intersección de las medianas (una mediana es una recta que pasa por un ángulo y corta el lado opuesto en dos segmentos iguales). Pero este método es bastante engorroso. Hay una forma más fácil de calcular la posición del centro de masa que consiste en pensar que en cada vértice hay una partícula de un tercio de la masa del triángulo. Luego, se procede como en el ejemplo 3 de más arriba. ¿Será válido el método para cualquier triángulo?

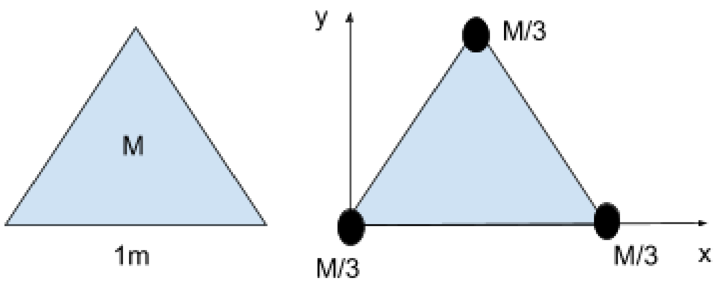
¿Es posible que el centro de masa esté fuera del cuerpo? Sí, el centro de masa de un anillo está en su centro geométrico, lugar que no coincide con ningún punto material del anillo. El centro de masa de un boomerang también puede considerarse fuera del cuerpo, panel c).

FIGURA 4

a)



b)



c)

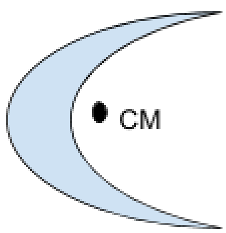


Figura 4. a) El centro de masa de una placa rectangular homogénea se encuentra en la intersección de las diagonales. b) Método para calcular el centro de masa de un triángulo. Se sustituye el triángulo por tres masas, cada una de masa igual a un tercio de la masa del triángulo, colocadas en sendos vértices. Luego se calcula el centro de masa de este sistema de partículas. c) El centro de masa de un boomerang está fuera del cuerpo.

4) Estabilidad

Una aplicación interesante del concepto de centro de masa puede ayudar a entender la estabilidad de ciertas estructuras. Supongamos que apoyamos un vaso sobre la mesa. Si inclinamos levemente el vaso y lo soltamos, veremos que el vaso vuelve a su a su posición de equilibrio. Si lo inclinamos mucho y lo soltamos, veremos que el vaso se cae de costado. ¿Cuál es ángulo máximo que podemos inclinar el vaso de tal manera que al soltarlo no se caiga de costado? En la figura 5 se representa una situación similar a la descripta. Se apoya un objeto sobre la mesa y conociendo el ángulo de inclinación se quiere saber si se caerá o no. En el panel a), la vertical que pasa por el centro de masa del objeto cae dentro del área delimitada por la base del objeto, por lo tanto el objeto no se cae. En el panel b), la vertical que pasa por el centro de masa cae fuera de la base del cuerpo; por lo tanto, el objeto se cae. Para entender esto, basta considerar el momento (torque) del peso respecto al punto “o”. En el panel b) el momento del peso hace rotar al cuerpo en sentido horario, y no hay ningún otro momento que pueda compensar al del peso, por lo tanto el cuerpo se cae. ¿Cómo explicarías en términos de momentos de las fuerzas que el cuerpo en a) no se cae?

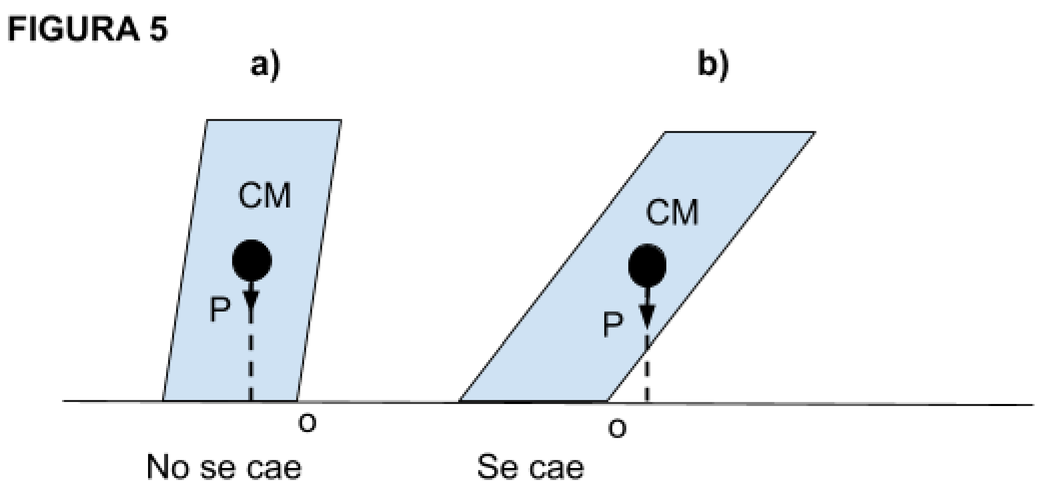


Figura 5. Un cuerpo apoyado sobre una mesa. a) Si la vertical que pasa por el centro de masa cae dentro de la base del cuerpo, éste está estable. b) Si la vertical que pasa por el centro de masa cae fuera de la base del cuerpo, el cuerpo se cae. ¿Explica esto por qué la torre de Pisa no se cae? ¿Está apoyada la torre de pisa?

Problema

Pensando en términos de estabilidad y de centro de masa, ¿cómo podría Jackson hacer este truco si no tuviera clavos en los zapatos?

5) Centro de masa del cuerpo humano

A grandes rasgos, se considera que el centro de masa del cuerpo humano está cerca del ombligo y unos centímetros hacia adentro. La ubicación del centro de masa tiene consecuencias en nuestros movimientos. Por ejemplo, desde el punto de vista físico, la técnica para caminar consiste en inclinarse levemente hacia adelante (como Jackson, pero menos) de tal manera que la vertical que pasa por el centro de masa del cuerpo caiga fuera de la base que delimitan nuestros pies. Esta es una situación inestable y por lo tanto el cuerpo comienza a caerse hacia adelante. Para no caernos, ponemos un pie adelante, es decir, damos un paso.

Un estudiante de ingeniería de Estados Unidos llamado Dick Fosbury inventó una nueva técnica de salto en alto que le permitió ganar la medalla de oro en los juegos olímpicos de 1968. Hasta antes de Fosbury el salto en alto se practicaba “boca abajo”, es decir cuando se estaba en el aire los ojos miraban el piso. Esta técnica imposibilitaba romper las marcas. Fosbury pensó que saltando boca arriba (como se salta actualmente), le permitiría saltar más alto, ya que podría arquearse como un boomerang de tal manera que el centro de masa quedara fuera de su cuerpo. Si lograba arquearse en el momento justo podría conseguir que el centro de masa de su cuerpo pasara por debajo de la barra mientras que él pasaría por encima. Al principio, todos se re burlaron de Fosbury y le hicieron alto bullying, pero después, cuando ganó el oro, les cerró la boca a todos y quedó como un re ídolo. A partir de ahí, los atletas comenzaron a copiar y desarrollar su técnica.

FIGURA 6

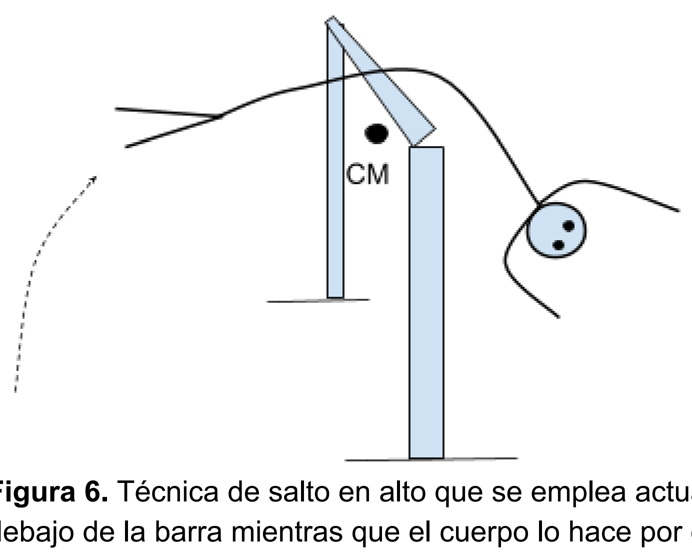


Figura 6. Técnica de salto en alto que se emplea actualmente. El centro de masa pasa por debajo de la barra mientras que el cuerpo lo hace por encima.

Preguntas

1) ¿Por qué te parece que la policía le pide que haga “el cuatro” a un sospechoso de estar borracho? Explicalo en términos del centro de masa y estabilidad.

2) Desafío imposible 1: Ponete de costado contra una pared. El lateral del pie derecho tiene que estar tocando la pared y el hombro derecho también. En esa posición tratá de levantar el pie izquierdo, ¿por qué no se puede?

3) Desafío imposible 2: Ponete de espaldas contra una pared. Los talones y la cola deben estar tocando la pared. Sin flexionar las rodillas tratá de tocar el piso con un dedo, ¿por qué no se puede?