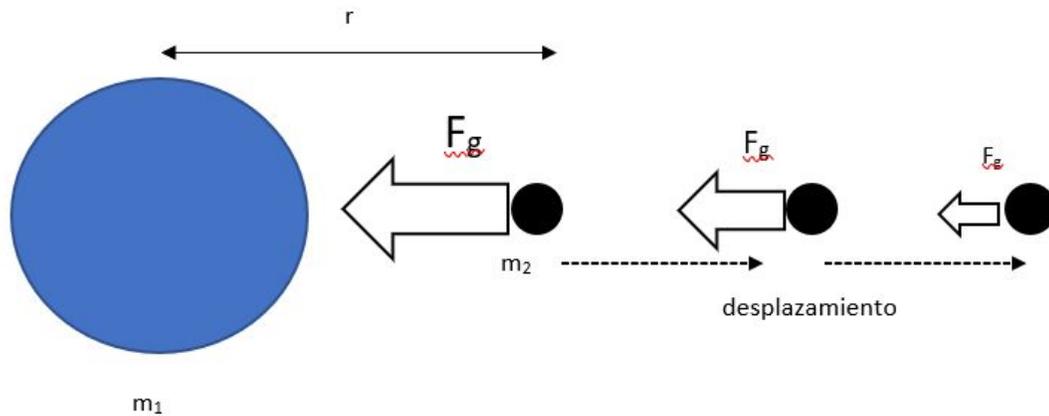


Gravitación: Energía potencial gravitatoria

Como toda fuerza fundamental de la naturaleza, la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa y, por lo tanto, deriva de una energía potencial asociada. La energía potencial gravitatoria U_g , al igual que toda energía potencial, se calcula evaluando el trabajo de la fuerza gravitatoria al mover un cuerpo masivo de una posición a otra (ver figura). Este trabajo verifica que: $W_{F_g} = -\Delta U_g$.



Al igual que la fuerza elástica, la fuerza gravitatoria no es constante, sino que depende de la posición, y por lo tanto para calcular el trabajo no se puede hacer, como en el caso de una fuerza constante, fuerza por distancia, sino que se requieren de ciertos conceptos de análisis matemático para calcular este trabajo. Lo que se debe resolver es una integral, tema que verán más adelante en análisis. El resultado es que la energía potencial asociada al campo gravitatorio es

$$U_g = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

Como toda energía potencial queda definida a menos de una constante, pero por convención se suele elegir que esa constante valga 0 en infinito.

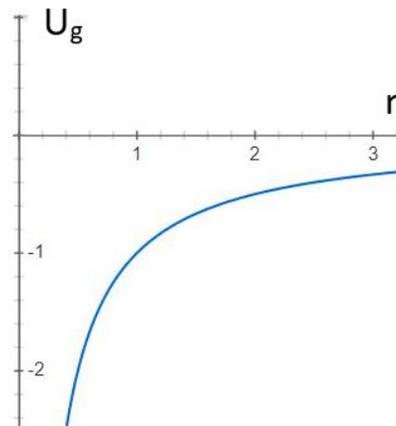
La energía mecánica para un cuerpo de masa m_1 en un campo gravitatorio generado por otro cuerpo de masa m_2 , queda expresada

$$E = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

El gráfico de la energía potencial gravitatoria en función de la distancia r es una hipérbola.

Al aumentar r disminuye la energía cinética y por lo tanto la velocidad. Un cuerpo que se va alejando de otro lo hace cada vez más lentamente.

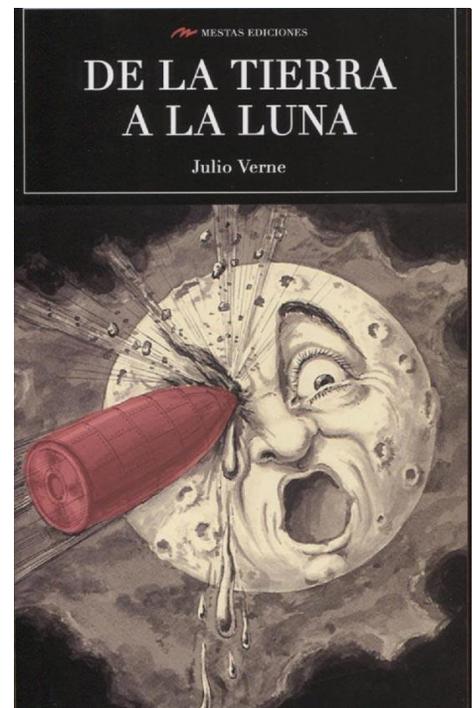
Como un ejemplo, veremos a continuación como usando el concepto de energía podemos calcular la velocidad inicial para escapar de un planeta.



De la tierra a la luna con Julio Verne

En el año 1865 Julio Verne publicó su libro de ficción *De la tierra a la Luna*. En esta novela los personajes pretenden lanzar una nave que salga de la tierra y llegue hasta la luna. La idea que tienen es darle una velocidad inicial suficiente (con una catapulta, por ejemplo) para que pueda escapar de la gravedad terrestre. ¿Será esto posible?

Sabemos que llegamos a la luna, y también más allá, pero fue usando motores de propulsión en los cohetes, la idea ahora es simplemente darle una patada inicial al cuerpo y que la energía se encargue de sacarlo de la tierra, es decir que en nuestro ejemplo la energía del cuerpo se conserva. En el caso del cohete, la energía mecánica no se conserva debido al trabajo de fuerzas no conservativas actuando durante el quemado del combustible y la propulsión.



Velocidad de Escape

La velocidad inicial que le damos al cuerpo para que pueda escapar de la gravedad de un planeta y no volver a caer, sino alejarse indefinidamente, o caer en la luna, se llama la velocidad de escape v_e .

El cuerpo comienza su movimiento en la superficie de la tierra por lo que su energía inicial, cinética y gravitatoria, vale:

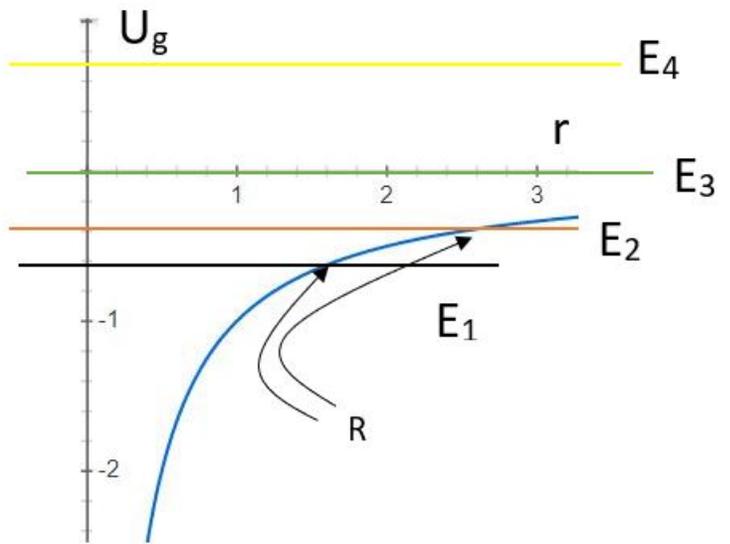
$$E = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G m M_T}{R_T}$$

Por otro lado, debemos analizar un poco el gráfico de la energía potencial para calcular la velocidad de escape.

En la figura de la derecha podemos ver el gráfico de la energía potencial gravitatoria (es la hipérbola en azul) y varios valores arbitrarios de la energía mecánica que se mantiene constante (las rectas horizontales). En el punto indicado con R, se cumple que la energía mecánica es igual a la energía gravitatoria (es el punto de intersección), y como $E = \frac{1}{2} m v^2 + U_g$, entonces en ese punto la energía cinética es 0, y por lo tanto también la velocidad. A esos puntos se los llaman puntos de retorno.

Con una energía con valor E_1 , el objeto comienza a subir, llega tener velocidad 0 en el punto de retorno y cae a la tierra. Lo mismo con una energía E_2 , solo que llega más alto.

Para que no vuelva a caer, es fundamental que no exista tal punto de retorno, y esto se da si la energía vale 0 (E_3) o más (E_4), ya que en ese caso no hay intersección entre la curva y la recta (ver figura siguiente).



Por lo tanto, la condición física para que el cuerpo escape es que la energía sea $E \geq 0$, es decir $E = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G m M_T}{R_T} \geq 0$. De acá despejando v_e se obtiene el valor mínimo para que el cuerpo no retorne:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

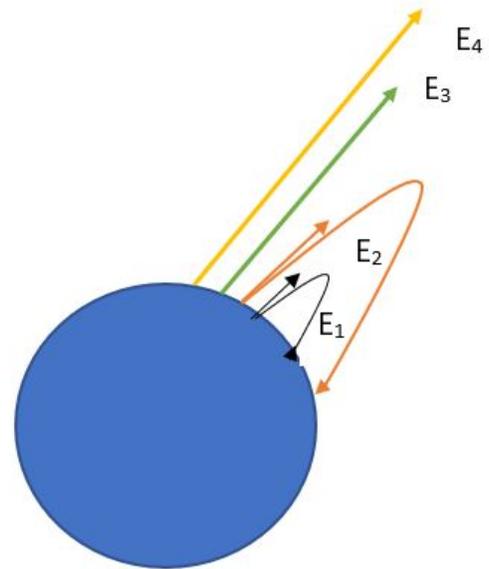
Para el caso de la tierra pueden verificar que ese valor es de 40249 km/h. Todo esto es despreciando el efecto de la fricción de la atmósfera, que no es menor. Si Julio Verne quisiera realmente hacer este experimento, la velocidad inicial de escape debería ser mayor para poder compensar la desaceleración que produce la fricción con las diferentes capas de la atmósfera. En este caso la energía mecánica no se mantiene constante.

Un dato curioso es que, si se pide que la velocidad de escape sea la velocidad de la luz, y se despeja el radio del planeta, se obtiene el llamado radio de Schwarzschild, que es la posición del horizonte de eventos de un agujero negro del que ni siquiera la luz se puede escapar $R = \frac{2G M}{c^2}$. Para que nuestro planeta tuviera esta característica su radio debería ser del orden de 1 milímetro.

Yo pensaría que es casual llegar al mismo resultado, dado que, como comentaremos al final del apunte, la teoría en la cual existen los agujeros negros, es totalmente diferente al modelo de Newton y los cálculos son bien diferentes. ¡Sin embargo...ahí está, el mismo resultado!

Trayectorias más generales

Como mencionamos anteriormente, las posibles trayectorias de los cuerpos celestes no son solo elípticas. Sus órbitas dependen de la energía que tenga cada cuerpo.

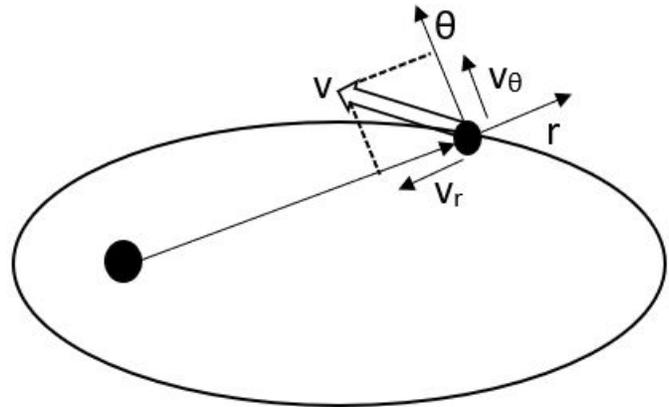


La expresión para la energía cinética es un poco más complicada que para un movimiento de traslación, ya que hay que agregarle la energía cinética de rotación.

Como se ve en el dibujo, la velocidad ahora tiene dos componentes, una radial (r) y otra perpendicular (θ). El módulo de la velocidad al cuadrado es: $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$ y $v_\theta = \omega r$, siendo ω la velocidad angular, que según la primera ley de Kepler cumple que

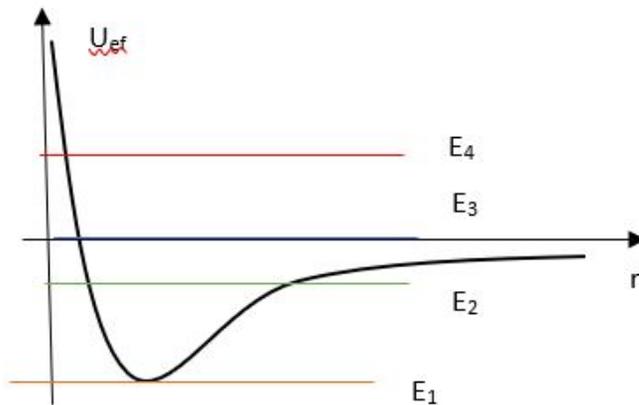
$$\omega = \frac{cte}{r^2}.$$

Con todo esto la energía de un cuerpo de masa m orbitando alrededor de otro cuerpo de masa m_1 queda:



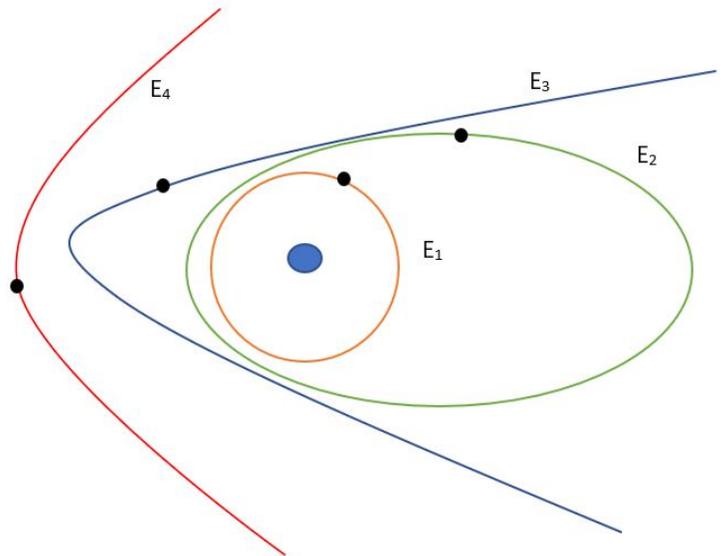
$$E = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{cte}{r^2} - \frac{G m m_1}{r}$$

Es decir que se agrega un término que también depende de la posición r . A esa función se la llama potencial efectivo $U_{ef} = \frac{cte}{r^2} - \frac{G m m_1}{r}$ y su gráfico se muestra en la siguiente figura.



Vemos en este gráfico que nuevamente, dependiendo del valor de la energía, existe un punto de retorno o dos. No vamos a entrar en los detalles matemáticos, pero se puede demostrar que para una energía E_1 la trayectoria es circular, para E_2 es elíptica, para E_3 es parabólica y para E_4 resulta hiperbólica.

Claro que en la naturaleza existen movimientos más complejos, ya que los que acabamos de mencionar, presuponen que uno de los cuerpos es mucho más masivo y prácticamente no se mueve. Existen sistemas como estrellas binarias que giran una sobre otra alrededor del centro de masa, y ni que hablar, de sistemas de 3 cuerpos que interactúan gravitatoriamente.

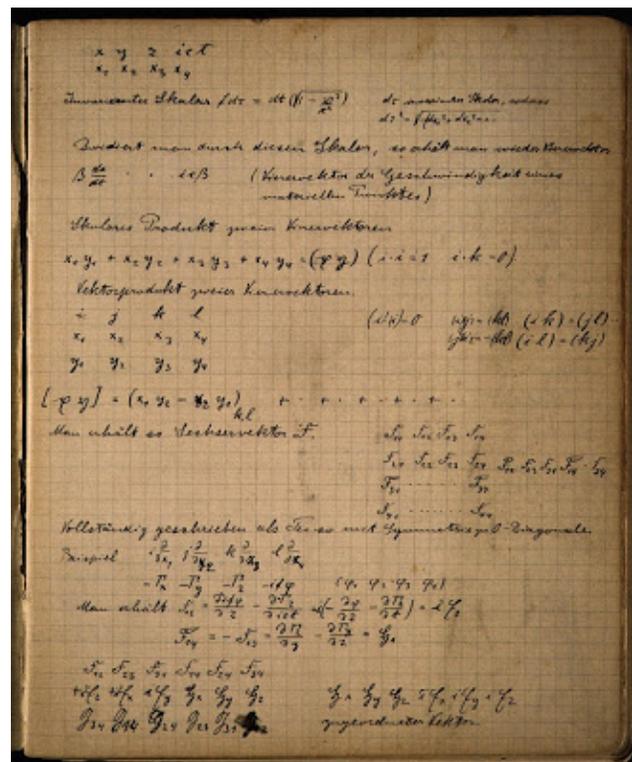


Teorías actuales

La ciencia es dinámica y muchas teorías son reemplazadas por otras, mas generales y que se ajustan mejor a los nuevos datos experimentales que se van obteniendo. Un problema que tiene el modelo gravitatorio de Newton es que no consigue explicar bien la precesión del perihelio de mercurio. Comparado con datos observacionales, existe una discrepancia de 43 segundos de arco en la precesión del perihelio. Y esta discrepancia se da en un lugar donde la fuerza gravitatoria del sol es más grande si la comparamos con otros planetas.

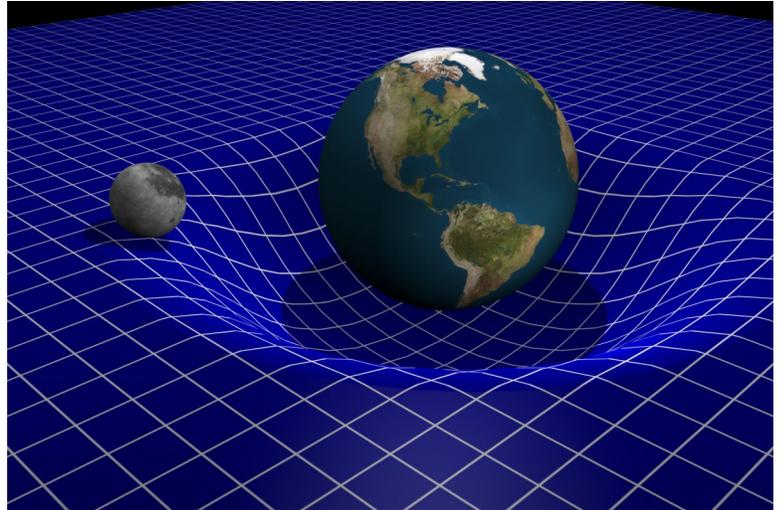
Una nueva teoría surgió en el año 1916, llamada Relatividad General, y como todos sabemos la publicó Albert Einstein.

En la imagen de la derecha podemos ver una de las hojas del manuscrito original de Einstein.



La teoría de la relatividad abandona el concepto de fuerza a distancia, y la reemplaza por la curvatura del espacio y del tiempo. Este concepto de fuerza a distancia es incompatible con la relatividad especial, que afirma que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema inercial y es la máxima. En el modelo de Newton, la fuerza se produce de forma instantánea entre los dos cuerpos.

En la relatividad general los cuerpos masivos deforman el espacio-tiempo, generando curvas donde naturalmente se mueven otros cuerpos. Incluso la luz es desviada, ya que el espacio obliga a los rayos de luz a curvarse. Esto se midió experimentalmente en un eclipse total de sol, y se midió el ángulo de desviación, coincidiendo con el predicho por la teoría.



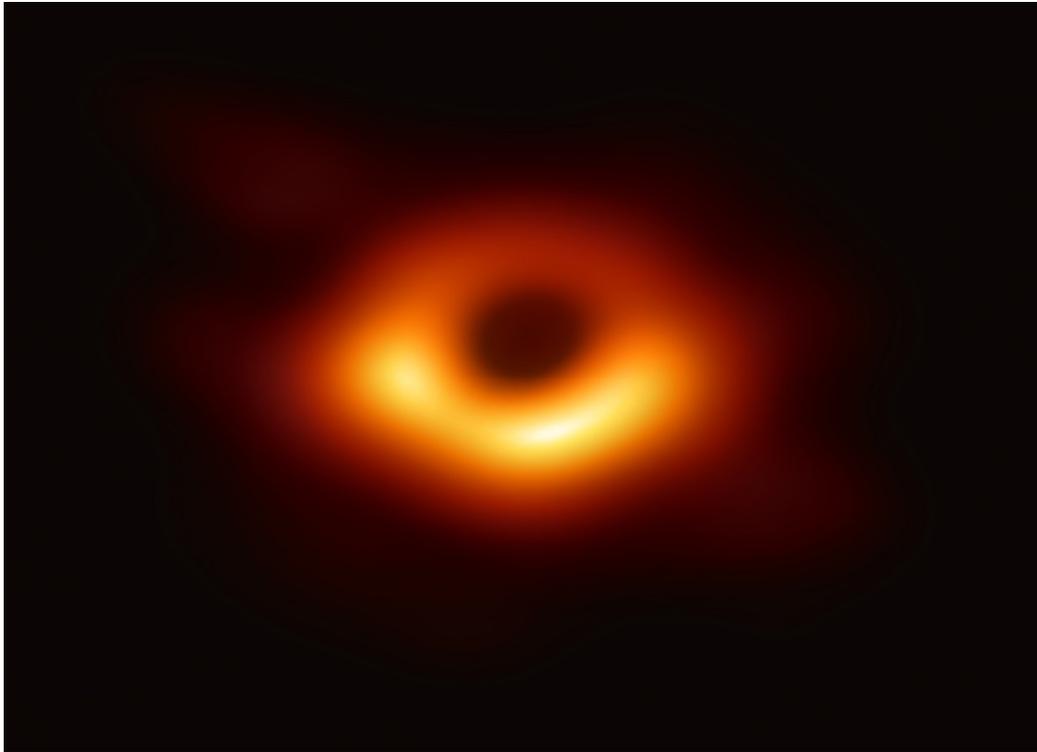
Otra gran diferencia es que el tiempo no juega un rol diferente a las coordenadas espaciales, están en pie de igualdad

ante las transformaciones de coordenadas. Una consecuencia de esto es que el campo gravitatorio afecta también a la variación temporal. Esto se tiene en cuenta, por ejemplo, en la sincronización temporal de satélites desde la tierra, ya que como los satélites están más lejos de la superficie terrestre, la gravedad allí es menor (la curvatura es menor), y la variación temporal se modifica con respecto a lo medido aquí en la tierra.

También aparecen nuevas soluciones de las ecuaciones de campo, que predicen objetos como los agujeros negros, de los cuales ya muy pocos dudan de su existencia. Estos objetos están rodeados por un horizonte del cual no es posible escapar por mas propulsión que uno pueda producir. Clásicamente los agujeros negros no emiten nada, la luz tampoco puede escapar. El horizonte de eventos rodea al agujero negro, y encierra una singularidad, un punto del espacio tiempo en el que no valen las ecuaciones de la relatividad. Se espera que cuantizando la gravedad sea posible explicar esta singularidad y que las ecuaciones no diverjan en ese punto.

Hace poco tiempo se pudo "fotografiar" un agujero negro. En realidad, lo que se observó es la luz que al ser desviada, crea una zona negra en el espacio.

Es la primera imagen real en la historia de un agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la galaxia M87, y fue presentada el 10 de abril de 2019 por el consorcio internacional Event Horizon Telescope.



Otra solución nueva que surge es la de onda gravitatoria. Hace poco se pudieron medir estas ondas gravitatorias, en las cuales viaja la información de los cambios que se producen entre los cuerpos masivos, como la colisión de estrellas y de agujeros negros. Como toda teoría que viene a reemplazar a otra, la nueva incluye a la vieja en algún límite: en este caso el límite es que cuando el campo gravitatorio no es tan fuerte, sigue valiendo la teoría de Newton en buena aproximación. La curvatura espacio-temporal se va reduciendo hasta obtener un espacio-tiempo plano (llamado espacio-tiempo de Minkowski) cuando la masa va tendiendo a cero.

Claro que aquí no acaba todo. Otro de los problemas que trae la gravitación, lo mencionamos al principio de este apunte, es que al ser tan pequeño el valor de la fuerza gravitatoria, es incompatible con otra teoría aceptada hoy en día: la mecánica cuántica. Y por este motivo es que no se puede unificar, como si se unificó la mecánica cuántica con el electromagnetismo y fuerzas nucleares. Diversas teorías andan dando vueltas por ahí, pero la más aceptada hasta hoy es la llamada teoría de cuerdas. Hay avances, pero está en proceso de desarrollo.

Espero este apunte sirva para comprender en parte los fenómenos gravitatorios que nos rodean.

Y que la fuerza nos acompañe.