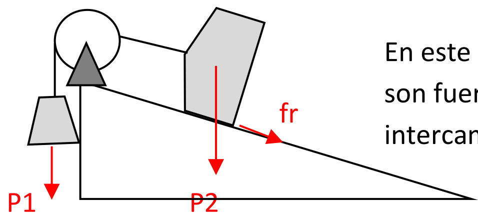
Trabajo y Energía

Trabajo

¿Cuando le aplicamos una fuerza a un cuerpo, que le pasa al cuerpo?

El cuerpo se mueve, o sea ante la presencia de una fuerza neta no nula se produce movimiento. Recordemos que hablamos de fuerzas netas externas, pues consideramos a los cuerpos en estudio como nuestro sistema en relación con el medio.



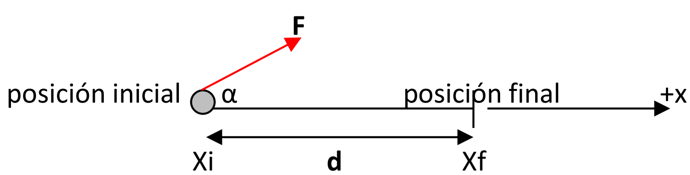
En este sistema formado por las dos masas y la polea P1, P2 y fr son fuerzas externas al sistema. El sistema y el medio intercambian fuerzas.

Supongamos que queremos mover muebles y lo hacemos mediante un fuerza. Si los muebles se mueven en el vocabulario habitual diríamos que estamos trabajando, haciendo un trabajo, igual decimos que estamos realizando un trabajo si llevamos un paquete de un lugar a otro de la habitación. Intuitivamente decimos que realizamos un trabajo si hacemos un esfuerzo al realizar cualquier actividad, o al estudiar, o al hacer un ejercicio. En estos casos si bien hay un esfuerzo físico no siempre se ha realizado un trabajo.

En física trabajo tiene una definición precisa y es la que se basa en la siguiente observación:

Se define trabajo como la capacidad de producir desplazamiento debido a una fuerza.

Supongamos que le aplicamos a una partícula una fuerza **F** constante que forma un ángulo α con el sentido de desplazamiento que supondremos horizontal y que debido a ello la partícula se desplaza una distancia d



El trabajo de la fuerza F denominado WF es el producto escalar entre el vector fuerza **F** y el vector desplazamiento **d =Δx**.

$$WF= \mathbf{F.d} = F.\ \Delta x.\ \cos\alpha$$

Puede decirse que el trabajo es el producto del desplazamiento y la proyección de la fuerza en el sentido del desplazamiento.

Queda claro que si la fuerza **F** forma un ángulo de $\pi/2$ respecto al vector desplazamiento la fuerza F NO realiza trabajo y si el ángulo entre la fuerza F y el vector desplazamiento es cero, el trabajo será máximo.

Si hubiese varias fuerzas Fi aplicadas a la partícula cada una de las fuerzas realizará su trabajo individual WFi y como el trabajo es un escalar dado que resulta del producto escalar entre dos vectores, entonces el trabajo total WF será la suma algebraica de los trabajos individuales de cada fuerza.

$$WF = Wf1 + WF2 + WF3 + \ldots = \sum WFi$$

La unidad de medida del trabajo W son el producto de la unidad de una fuerza (N) y la unidad de medida de longitud (m), es decir

$$(WF) = (N).\ (m) = kg.m/s^2 .\ m = (Joule)$$

De forma que 1 J = 1 N. 1 m

<u>Ejercicio guía 1</u>

Supongamos que tenemos que sacar un auto hasta la posición (14 i + 11 j) m aplicando una fuerza F= (160 i - 40 j) N. Cual es trabajo realizado para trasladarlo desde la posición (0 i + 0 j)?

Δx = (14 – 0) i + (11 – 0) j

F = (160 i – 40 j)

Recordando que **a.b = (ax + bx) + (ay + by)**

WF = (160 . 14 – 40 . 11) = 1800 J

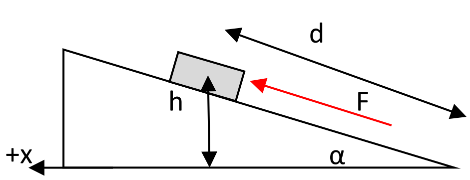
<u>Ejercicio guía 2</u>

Si tenemos que mover un auto que tiene el neumático pinchado y hay que hacer una fuerza de 210 N con un ángulo de 30 grados respecto de la horizontal para moverlo 18 metros , cual es el trabajo realizado por la fuerza aplicada?

WF = **F. d** = F . d . cos α = 210 N . 18 m . cos 30 = 3273,5 J

<u>Ejercicio guía 3</u>

Si deseo elevar mediante un plano inclinado de 38 grados un cuerpo a 2,8 metros de alto desde el piso, usando una fuerza en el sentido del plano de 70 N , que trabajo realizó esa fuerza?

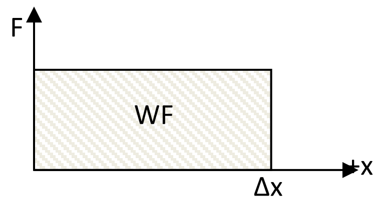


la distancia que recorre en el sentido de la fuerza es

d h /sen α =2,8 m / sen 38 = 4,54 m . El trabajo WF

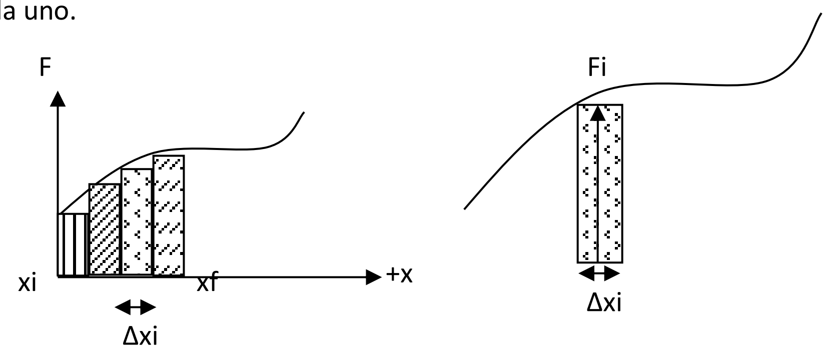
WF= = F. d = 70 . 4,54 m = 317,8 J

Hasta aca venimos hablando de fuerzas constantes, es decir que a lo largo del desplazamiento que producen no han cambiado su módulo , es decir que si graficamos F =f(x) se vería una gráfica de este tipo



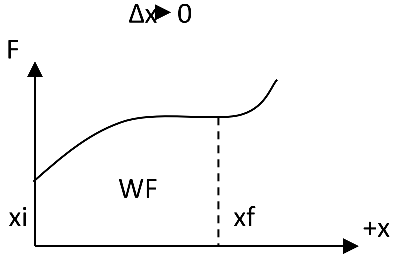
Como el trabajo es WF = F . Δx, el área bajo la curva de F=f(x) representa el trabajo e esa fuerza.

Pero supongamos ahora que la fuerza no es constante y que varia solo en una dirección F= f(x) que produce un desplazamiento en el eje x , como se muestra. Si queremos calcular el trabajo realizado por esa fuerza variable en x, podemos tomar pequeños desplazamientos Δx y calcular el trabajo en cada uno.

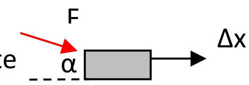


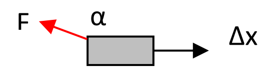
Para cada Δxi habrá un valor Fi que producirá un trabajo ΔWFi = Fi . Δxi, que podrían sumarse para hallar el trabajo total. Pero como se ve en la grafica ampliada hay un error al tomar ese valor Fi en el medio del desplazamiento Δxi pues no cae sobre la curva. Si achicamos Δxi tanto como se quiera, ese valor intermedio en que tomamos Fi será en una aproximación infinitesimal igual al valor sobre la curva. Es decir que podemos realizar la sumatoria en el límite en que Δxi tiende a cero. Así hemos encontrado el área bajo la gráfica F= f(x) y por lo tanto su trabajo desde xi a xf.

$$WF = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \mathbf{F}_i \,.\, \Delta xi = \int \mathbf{F}(x)\, dx$$



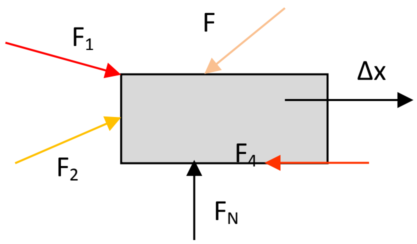
Como se deduce en la definición de trabajo de una fuerza, pueden darse los siguientes casos:

Trabajo positivo WF > 0 si $\alpha < 90$ pues $\cos \alpha > 0$ esquemáticamente 

Trabajo negativo WF< 0 si $90 < \alpha < 180$ pues $\cos \alpha < 0$ o sea 

Al trabajo positivo también se lo llama trabajo motor y al negativo trabajo resistente. Si el trabajo es motor (WF > 0) el sistema RECIBE el trabajo de F y si es resistente (WF < 0) el sistema PIERDE trabajo , se lo entrega al exterior del sistema

Por lo tanto si se tienen diferentes fuerzas actuantes sobre un cuerpo se puede analizar realizando la suma algebraica de los trabajos de cada una de las fuerzas, es decir respetando sus signos. Es decir en un esquema como el siguiente



$WF = WF_1 + WF_2 - WF_3 - WF_4 + WF_N$

$WF_N = 0$ pues $\alpha = \pi/2 = 90$

Potencia

Se denomina Potencia mecánica (P_M) a la velocidad con que el sistema puede realizar un trabajo, es decir el trabajo por unidad de tiempo.

$$\boxed{\mathbf{P_M = WF / \Delta t}}$$

Su unidad de medida será (**P_M**) = (WF) / (t) = Jouje / seg = Watt

Energía Cinética

Cuando se realiza trabajo se suele hablar también de energía. En física la energía es una medida de la capacidad de los cuerpos de realizar trabajo. La energía no se consume, sino que se transforma de una forma de energía en otras formas de energía.

Supongamos que aplicamos una fuerza neta **F** no nula a una partícula de masa m que debido a ello se desplaza de una posición inicial x_i a otra posición final x_f., cambiando su velocidad desde una velocidad inicial v_i a otra velocidad final v_f. Es decir que la partícula experimenta un movimiento MRUV.

El trabajo neto que habrá realizado la fuerza neta F_{Neta} será

$$W_{F\ Neta} = F_{neta} \, . \, (x_f - x_i)$$

Pero también cambió su velocidad, así que, si recordamos de cinemática en el movimiento MRUV

$$v_f^2 = v_i^2 + 2.a.(x_f - x_i)$$

Es decir que si despejamos de aquí a. $(x_f - x_i)$

$$a.\ (x_f - x_i) = \ (v_f^2 - v_i^2).\ ½$$

y recordamos de las ecuaciones de Newton de la Dinámica que F= m.a es decir a = F /m,

$$F/\ m\ (x_f - x_i) = (v_f^2 - v_i^2).\ ½$$

Es decir $$\boxed{\mathbf{W}_{\mathbf{FNeta}} = m\ (v_f^2 - v_i^2).\ ½ = \mathbf{½\ m\ v_f^2 - ½\ m\ v_i^2}}$$

Al término $½\ m\ v_f^2$ se lo denomina **Energía cinética final** y a $½\ m\ v_i^2$, **Energía cinética inicial** y en general al término **$½\ m\ v^2$ se lo denomina Energía Cinética,** es decir que podemos afirmar que el trabajo de una fuerza neta no nula será igual al cambio de energía cinética del cuerpo al que se le aplica dicha fuerza.

Escrito de manera matemática $\boxed{W_{FNeta} = \Delta\ E_c}$

Donde el símbolo Δ significa variación

Esta es la demostración del Teorema del trabajo y la energía cinética

Como vimos, el trabajo es una magnitud escalar, por lo tanto la energía cinética también será una magnitud escalar.

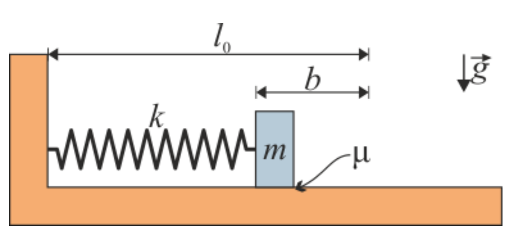
La unidad del trabajo es el Jouje (N.m) y por lo tanto la energía también tiene al Joule como unidad.

Si la fuerza no realiza trabajo o la suma de todos los trabajos realizados por las fuerzas da como resultado un trabajo cero , entonces la energía cinética se mantendrá constante, es decir que

si $W_{FNeta} = 0$ entonces $\Delta E_c = 0$ lo que implica que $E_{cf} = E_{Ci}$

Si el cuerpo entrega trabajo disminuye su energía y cuando recibe trabajo aumenta su energía, es decir que hay un intercambio energético entre el cuerpo y el medio, por lo tanto la energía cinética siempre es positiva, a lo sumo podrá ser cero, pero NO ES NEFGATIVA.

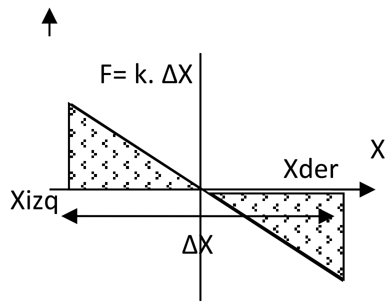
Supongamos ahora que la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo es variable, como la que hace un resorte al ser estirado. Si al resorte se lo estira o comprime desde su posición de reposo l_o una longitud *b,* el cuerpo de masa m experimentará una fuerza proporcional al estiramiento **F = - *k. b***



Donde *k* es una magnitud constante, propia del material del resorte y de su construcción llamada constante del resorte, y el signo negativo indica que la fuerza es restitutiva, es decir que siempre se opondrá al modo de deformación recibido, si se lo estira intentará cerrase y si se lo comprime intentará extenderse buscando su posición de equilibrio.

Si estamos analizando el movimiento en el eje x, entonces *b* será Δx. Esta ley de comportamiento se llama Ley de Hooke en honor a su descubridor el físico Ingles Robert Hooke.

Es decir que la representación de F=f(x) será una recta de pendiente negativa

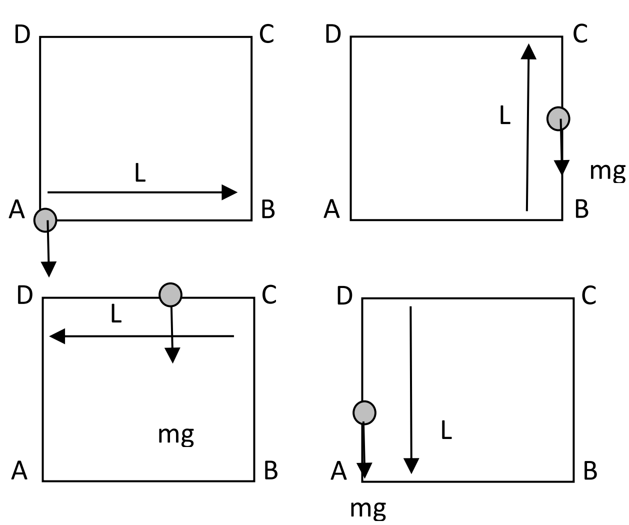


Como vimos el área bajo la curva representa el trabajo de la fuerza restitutiva , por lo tanto para el intervalo desde 0 hasta Xizq el trabajo tramo desde el reposo hasta el extremo negativo es WF = k. Xizq / 2 . y para el extremo opuesto WF = - k. Xder / 2. Por lo tanto el trabajo en ΔX será 0. Es decir que las fuerzas hacen trabajo neto nulo en un trayecto completo. Puede verse también desde el punto vista analítico como $WF = \int F(x)\, dx = \int - k.\, x.\, dx = - k.x^2/2$

Energía potencial

Existen dos tipos de fuerzas. Los fuerzas conservativas y las fuerzas no conservativos.

Supongamos una masa m que recorre un camino cerrado de lado L , supongamos que en ese recorrido no hay fricción y que la única fuerza presente es la fuerza peso (P= mg) . Iniciamos el recorrido en un punto A de dicho camino cerrado.



El trabajo e la fuerza peso entre A y B es

Wp (AB) = m.g. L. cos 90 = 0

El trabajo de la fuerza peso entre B y C

Wp (BC) = m.g. L . cos 180 = -m.g.L

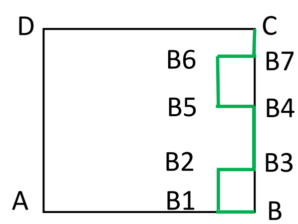
Como en AB el trabajo en CD es cero pues cos 270 = 0. Wp(CD) =0

Y Wp (DA) = m.g.L. cos 0 = m.g.L

Las fuerzas CONSERVATIVAS están asociadas a lo que se denomina ENERGÍA POTENCIAL. Como se vio la fuerza peso está asociada a una energía potencial gravitatoria pues cambió el estado de energía relacionada con un cambio en el sistema de referencia asociado, es decir debida a ella cambió su posición relativa.   También vimos que las fuerzas elásticas están relacionadas a una energía pues como se vio, debida a la fuerza elástica se cambió el estado energético relacionado con un sistema de referencia. La energía relacionada a un sistema de referencia y a una fuerza conservativa se llama ENERGIA POTENCIAL.

También se vio que si se suma el trabajo de una fuerza conservativa sobre un cuerpo en un camino cerrado dicha suma da cero, es decir hubo un trabajo neto nulo en ese camino cerrado. Debe quedar claro que no siempre un trabajo neto nulo en un camino cerrado se debe a una fuerza conservativa.

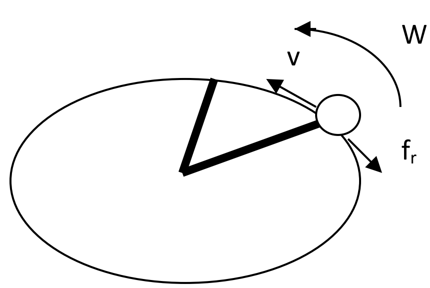
Puede demostrarse que el trabajo neto nulo debido a una fuerza conservativa es independiente del camino que se realice, es decir que es válido para todo camino cerrado. Si tomamos el mismo esquema de 4 puntos anterior pero cambiamos el camino elegido como el siguiente, puede verse que los tramos horizontales (B-B1, (B2-B3, B4-B5, B6-B7) la fuerza peso estará a 90 grados del desplazamiento y por lo tanto su trabajo será nulo y en los tramos verticales (B1-B2, B3-B4, B5-B6, B7- C) en ángulo será 180 grados y su valor será diferente de cero. De manera que al sumarlos el trabajo dará el mismo resultado que en el camino BC recto (notar que la suma de los tramos B1-B2, B3-B4, B5-B6, y B7- C) suman BC.



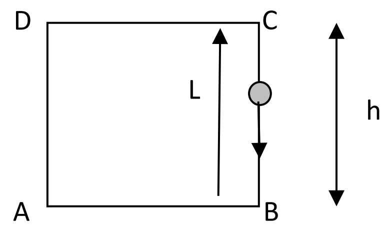
El resto de las fuerzas se llaman fuerzas NO CONSERVATIVAS.

Supongamos que un cuerpo gira alrededor de un punto fijo en un movimiento circular, friccionando en el piso mientras gira. Esa fuerza de rozamiento generará un trabajo en el camino cerrado de tipo negativo pues su sentido de acción estará a 180 grados (es decir en oposición) del sentido de avance, por lo tanto se entregará trabajo al sistema y el cuerpo lo perderá, y entonces el trabajo en el camino cerrado no será cero. Entonces la fuerza de rozamiento , y todas las que tengan esas características son fuerzas NO conservativas .

$$\mathbf{Wf_r = - f_r . S}$$



Por otra parte vimos en el análisis anterior con las fuerzas Conservativas, como la fuerza peso, que el trabajo de dicha fuerza en el sentido BC **(W_p (BC) = - mgL)** es igual al valor opuesto en signo a una magnitud que representa el cambio de posición de dicho cuerpo debido a dicha fuerza.



Se denomina **Energía Potencial** al trabajo que realiza una fuerza conservativa en un desplazamiento determinado , pero con el signo cambiado, y representa el valor que potencialmente tiene el cuerpo en ese sistema de referencia, es decir es la energía de la configuración del sistema. Es la energía almacenada en el sistema.

$$\boxed{\textbf{Energía Potencial } (E_p) = -\, WF \text{ conservativa}}$$

E_p = m.g.h donde h es la magnitud del cambio de posición en el sistema de referencia

Debe quedar claro que la energía potencial se asocia a las fuerzas conservativas. Las fuerzas elásticas como la que realiza un resorte también es una fuerza conservativa, pues como vimos en una trayectoria cerrada su trabajo es cero. Dicho trabajo en un sentido del movimiento es igual $Wfe = -\frac{1}{2} k x^2$. que no es otra cosa sino la energía potencial de la fuerza elástica cambiada de signo. Se ampliará este concepto en Movimiento Armónico Simple en el capítulo correspondiente.

Como vimos en el Teorema del trabajo y Energía cinética $W_{FNeta} = \Delta E_c$

Vimos también que hay dos tipos de fuerzas netas, las fuerzas conservativas y las No conservativas, por lo tanto y dado que el trabajo es una magnitud escalar, podemos escribir

$$W\,F_{\text{Conservativas netas}} + W\,F_{\text{No conservativas netas}} = \Delta E_c$$

Pero acabamos de deducir que el trabajo de las fuerzas conservativas es igual a la variación de la Energía potencial en el sistema de referencia elegido, con el signo cambiado, por lo tanto

$$-\ \Delta E_p + WF_{\text{NO conservativas}} = \Delta E_c$$

O escrito de otra manera

$$\boxed{WF_{\text{NO Conservativas}} = \Delta E_c + \Delta E_p}$$

A la suma de la Energía Cinética mas la Energía Potencial se la llama Energía mecánica con lo cual

$$\boxed{WF_{\text{NO Conservativas}} = \Delta E_M}$$

De aquí se desprenden algunas conclusiones

- Si el trabajo neto de las fuerzas no conservativas es cero, entonces $\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$ y por lo tanto la Energía mecánica se conserva, es decir es constante $E_M = E_c + E_p = \text{Constante}$

  Se dice que en estas condiciones se ha conservado la energía mecánica

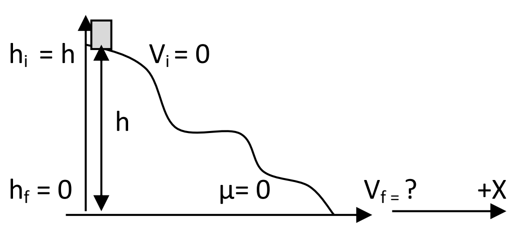
- Si el trabajo de una fuerza no conservativa es negativo, es decir el trabajo es resistente, el sistema pierde energía entregándolo al sistema exterior, o sea se pierde energía mecánica

  $\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p < 0$

- Si el trabajo es motor, es decir es positivo, el sistema gana energía a costa del exterior

  $\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p > 0$

La energía es una función de estado, es decir que no importa que sucede en los estados intermedios entre los estados inicial y final de nuestro estudio. Este análisis de estados es útil para estudiar situaciones en la que el estudio por medio de la dinámica no es simple de aplicar, como el cálculo de la velocidad al final de un camino sinuoso como el ejemplo siguiente.



Mientras que si aplicamos los conceptos de energía, podríamos plantear, en el supuesto que no hay rozamiento:

$WF_{\text{NO Conserv}} = 0 = \Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p = (E_c \text{ final} - E_c \text{ inicial}) + (E_p \text{ final} - E_p \text{ inicial})$

En el sistema de referencia planteado con 0 en el borde del piso para el eje y

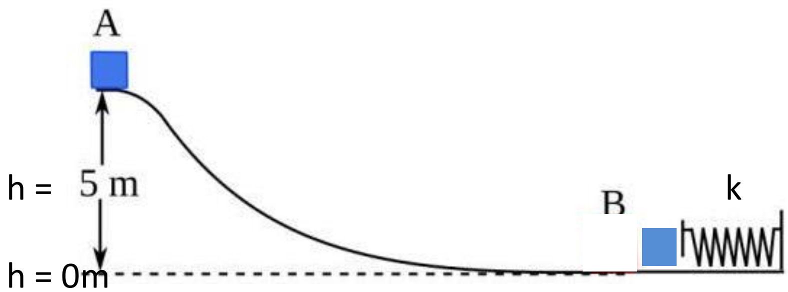
$0 = (½\, m \,.\, V_f^2 - 0) + (0 - m.g.h)$

Esto es así pues el cuerpo inicia con velocidad inicial cero (E_c inicial = 0) y porque en el trayecto al final del camino llega a h = 0 (E_p final = 0)

De donde $0 = \frac{1}{2} m . V_f^2 - m.g.h$ es decir $\frac{1}{2} m . V_f^2 = m.g.h$ y entonces $V_f = \sqrt{m.g.h}$

Ejercicio guía 4

Un resorte comprimido un valor X, de constante elástica k = 10000 N/m sostiene un bloque de masa m= 10 kg . Al liberar al resorte el bloque se desplaza por un plano inclinado y alcanza sobre el una altura de 5 metros hasta detenerse. Cuál es la compresión X del resorte?



Como vimos las fuerzas elásticas son fuerzas conservativas y si consideramos que no hay rozamiento en el trayecto A-B podemos decir que $WF_{N\ conserv} = 0$ y por lo tanto $\Delta E_M = 0$ es decir que la energía mecánica se conserva.

Por lo tanto $\Delta E_c + \Delta E_p = (E_c \text{ final} – E_c \text{ inicial}) + (E_p \text{ final} – E_p \text{ inicial})$

Como el problema dice que el bloque termina detenido en el plano inclinado en el punto A, su energía cinética final será cero (Vfinal =0)

En el sistema de referencia elegido desde donde se miden los 5 metros de altura alcanzada el cuerpo sale de una energía potencial inicial cero y alcanza una energía potencial final de m.g.h

Reemplazando los datos

$0= (0 – \frac{1}{2}.m.V_i^2) + (m.g.h – 0) = m.g.h – 1/2 .m. V_i^2)$ 1

Pero no tenemos la velocidad inicial en forma directa.

La podemos calcular recordando que las fuerzas elásticas son conservativas, y que el trabajo de la fuerza elástica desde que se libera hasta que se extiende totalmente (y libera al bloque), es decir en el camino cerrado, será cero, y por lo tanto la energía mecánica del resorte se conservará:

WF resorte $= 0 = \Delta E_{M,}$ con lo cual, $0 = (E_{elástica} \text{ final} - E_{elástica} \text{ inicial})+ (E_c \text{ final} - E_c \text{ final})$

$0 = \frac{1}{2}.k.\Delta x^2 + (0 - 1/2 .m. V_i^2)$ es decir $V_i^2 = k. \Delta x^2 / m$

Reemplazando en 1

$m.h.g = \frac{1}{2}.m. k. \Delta x^2 / m = \frac{1}{2}.k. \Delta x^2$, y en definitiva $\Delta x^2 = 2.m.g.h/ k$

$\Delta x = \sqrt{2. 10. 9,8. 5 / 10000} = 0,314$ m