Gravitación: Fuerza Gravitatoria

Introducción

Cuando se habla de fuerza gravitatoria todos tenemos cierta noción acerca del tema, por propias experiencias como habitantes masivos viviendo en un planeta masivo.

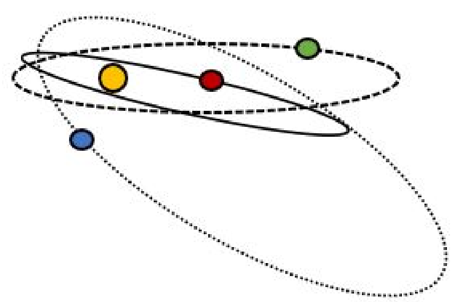
Todos hemos visto la luna sobre nosotros y sabemos que gira alrededor de la tierra, y que la tierra gira alrededor del sol, y que las cosas caen aquí en nuestro planeta. Y tenemos cierta idea de que estos fenómenos están conectados por la misma causa. Sin embargo, esto no fue siempre así. Establecer que es el mismo, el motivo que hace que la luna gire alrededor nuestro y que las cosas caigan en la tierra, llevó mucho tiempo e investigación, aunque hoy nos parezca casi obvio.

El estudio de los movimientos planetarios y estrellas se remonta a la época de los griegos, con Platón y Aristarco, que propusieron un modelo en el cual el sol estaba en el centro del universo. Otros astrónomos y filósofos como Ptolomeo, Copérnico, Galileo y Brahe, continuaron abordando estos temas de manera rigurosa.

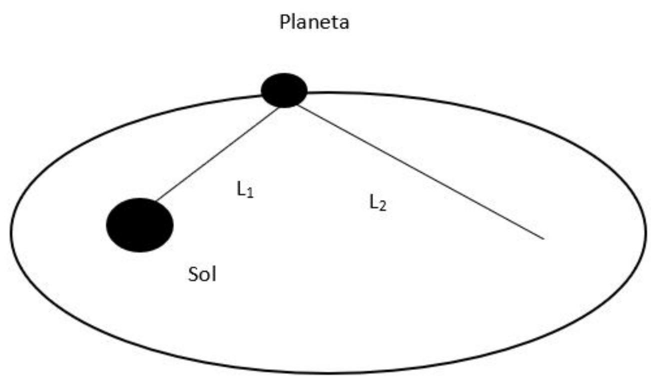
En este apunte partiremos de la ideas y observaciones del astrónomo Johannes Kepler, quien por el año 1609 publicó sus observaciones ordenadas en tres leyes fundamentales.

Las 3 Leyes de Kepler

Primera LEY. La primera de ellas se refiere al tipo de trayectoria que realizan los planetas alrededor del sol en nuestro sistema solar. Con observaciones astronómicas, Kepler se dio cuenta de que las trayectorias de los planetas eran elípticas, con el sol ubicado en uno de los focos de la elipse. Los planos orbitales donde se inscriben estas elipses no son los mismos, sino que forman el llamado ángulo orbital: por ejemplo, si consideramos que la tierra está en un plano a 0 grados, marte tiene una inclinación de 1.85 grados, venus 3.3 grados, y mercurio 7 grados.



Recordemos o, aprendamos, que la elipse es una curva formada por puntos que verifican que la suma de las distancias a cada uno de los focos es constante L_1+L_2 = constante.



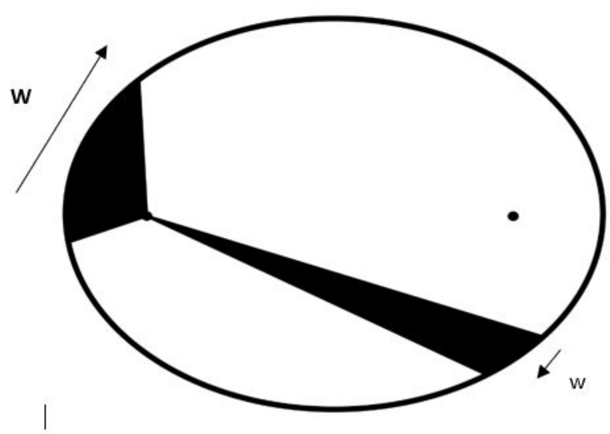
Es decir que el movimiento de los planetas no es rectilíneo, y por lo que ya aprendimos al estudiar dinámica, esto nos indica que debe existir alguna fuerza para desviar al planeta de una trayectoria recta, y si, muy astutamente habrán pensado en la fuerza gravitatoria.

En este curso no estamos en condiciones de demostrar matemáticamente que las trayectorias son elípticas, pero sepan que a partir del modelo de Newton y de las ecuaciones de movimiento se demuestra que es así. Del modelo teórico se deduce que ciertas soluciones de las ecuaciones son elipses y se corresponden con ciertos cuerpos celestes como son los planetas. Claro que no son los únicos, ciertos cometas que visitan la tierra cada tanto también tienen este tipo de trayectorias (uno muy conocido es el cometa Halley) y también algunos satélites artificiales que giran alrededor de la tierra.

Si bien las observaciones de Kepler estaban realizadas en nuestro sistema solar, la validez de la primera ley es universal. Es decir, en otro sistema solar los planetas también siguen estas mismas órbitas. Claro que es más difícil de observarlos, ya que solo reflejan la luz de su estrella y están a mucha mayor distancia que los planetas de nuestro sistema solar.

Por otro lado, veremos más adelante, que las órbitas elípticas no son las únicas. Los diferentes tipos de trayectorias dependen de la energía que posea cada cuerpo celeste.

<u>Segunda LEY.</u> Definamos el vector posición del planeta medido desde el sol, es decir con el origen del sistema de coordenadas en el foco de la elipse. La segunda ley dice que este vector posición recorre áreas iguales en tiempos iguales. En el dibujo se observa a que área se refiere.



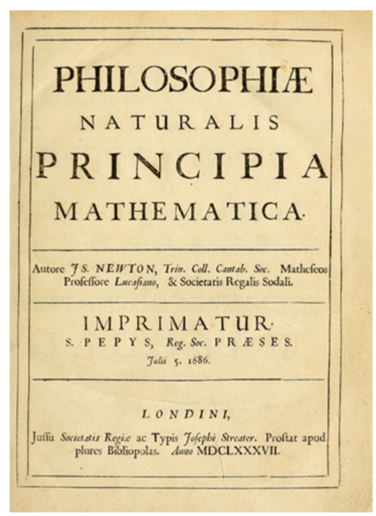
Para darle rigurosidad matemática veamos con calcular esta área. Si consideremos un ángulo pequeño el área se aproxima por el área de un triángulo:

$$\frac{base\ .altura}{2}.$$

La base mide r θ (es la longitud de ese arco de elipse), siendo r la distancia entre el planeta y el sol y θ el ángulo recorrido. La altura es directamente r. El área es $A = \frac{r^2\theta}{2}$. La variación de esta área con respecto al tiempo es la llamada velocidad aerolar v_a, y según la segunda ley es lo que se mantiene constante: $v_a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r^2}{2}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{r^2}{2}w = constante$, donde w es la velocidad angular del planeta. Por lo tanto, según la expresión para la velocidad aerolar, si la distancia r al planeta aumenta, la velocidad angular disminuye, o dicho de otra forma cuando el planeta está más cerca del sol, gira más rápido que cuando está más lejos. El movimiento no es ni circular, es elíptico, y tampoco uniforme, ya que la velocidad angular varía. Cuando más adelante se vea el concepto de impulso angular, se podrá verificar que esta ley es consecuencia directa de la conservación de tal magnitud.

Tercera LEY. Esta ley se refiere al período T de la órbita y al tamaño de la elipse a (en realidad este tamaño es el semieje mayor de la elipse). La tercera ley afirma que para todos los planetas el cociente $\frac{T^2}{a^3}$ es constante. Nuevamente esta ley se puede deducir del modelo Newtoniano, en nuestro caso lo haremos más adelante para el caso particular de un cuerpo en una órbita circular.

Gravedad de Newton


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore JS. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

La ley de gravitación de Newton fue publicada en el año 1687 en el libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, y con esto Isaac Newton completa sus investigaciones sobre la dinámica de los cuerpos, ya que da sentido a su segunda ley F = m.a , al definir claramente a una de las fuerzas de la naturaleza. Para esto, Newton y Leibniz, de forma separada, ya habían desarrollado el cálculo infinitesimal que le permitiría expresar su ley de gravitación y sus ecuaciones de movimiento de un modo formal desde el punto de vista matemático.

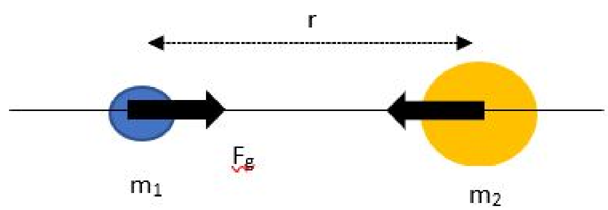
Lo primero que es relevante hacer notar, es el pequeño valor de la fuerza gravitatoria. Claro, ¿valor pequeño con respecto a qué?

Si comparamos la fuerza gravitatoria entre dos masas de 1 Kg con, por ejemplo, una fuerza elástica entre ellas, veremos que la fuerza gravitatoria es muchos, pero muchos, órdenes de magnitud menor. A modo de ejemplo, el valor de la fuerza gravitatoria que hace por ejemplo el planeta marte a un bebé recién nacido de 4 kg ubicado aquí en la tierra vale 0.003 N. Con esto le quitamos el trabajo a los astrólogos que hacen cartas natales, ya que comparado con el peso de ese bebe de 40N, el efecto gravitatorio de marte es 10000 veces menor que el de la tierra.

Este valor pequeño se verá reflejado en la constante que define a esta fuerza. Aún hoy en día no se entiende del todo bien porque el valor de esta fuerza es de una escala mucho menor que todas las demás fuerzas fundamentales, como las fuerzas electromagnéticas y las nucleares.

Fuerza gravitatoria

El modelo Newtoniano define a la fuerza gravitatoria con 3 características fundamentales:



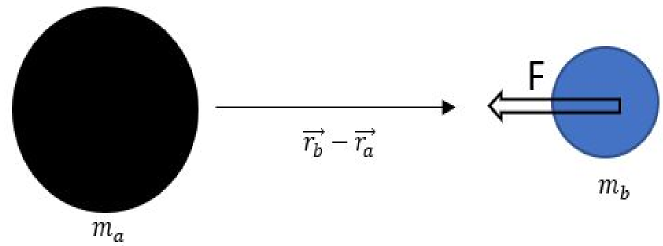
1- Dirección de la fuerza: la dirección es la misma que la de la recta que une ambos cuerpos que interactúan gravitatoriamente.
2- El sentido de esta fuerza es siempre atractivo en cada cuerpo.
3- El módulo de esta fuerza está dado por la expresión: $F_g = \frac{G.m_1\, m_2}{r^2}$, es decir que esta fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre los centros de masa de ambos cuerpos.

Las masas que aparecen en la expresión de la fuerza m_1 y m_2, son las llamadas masas gravitatorias de los cuerpos, y son la causa de que dicha fuerza exista. Por ejemplo, una partícula no masiva como lo es un fotón no interactúa gravitatoriamente en el modelo de Newton.
Conceptualmente la masa gravitatoria es diferente a la masa inercial de la segunda ley de Newton: la segunda se mide comparando aceleraciones, cuando el cuerpo es puesto en una interacción de cualquier tipo y es una medida de la resistencia que tiene un cuerpo a ser acelerado, y la primera es exclusiva de la interacción gravitatoria. Sin embargo, se comprueba que la masa gravitatoria solo depende de su masa inercial, y que no depende de la composición del cuerpo y demás condiciones físicas. Por lo tanto, se adopta la convención que el valor de ambas masas es el mismo.
El otro ingrediente que aparece en la fuerza es G, la constante de gravitación universal, su valor es $G = 6.67.10^{-11}\ \frac{N\, m^2}{kg^2}$. Newton no pudo establecer el valor de esta constante, solo pudo mostrar que tenía un valor pequeño y que efectivamente era constante, sin depender del tiempo ni del lugar en donde se esté. El primer experimento para medirla fue realizado por Cavendish en el año 1798.

La fuerza gravitatoria escrita en forma vectorial queda como:

$$\vec{F} = \frac{-G\ m_a m_b(\overline{r_b} - \overline{r_a})}{|\overline{r_b} - \overline{r_a}|^3}$$

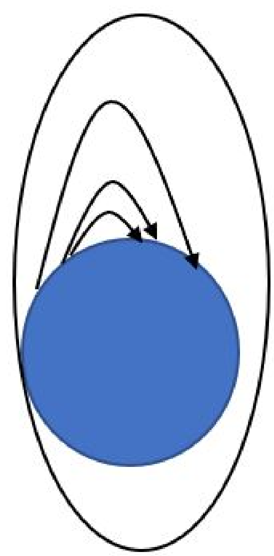
Está expresión da la fuerza gravitatoria que ejerce un cuerpo de masa m_a sobre otro cuerpo de masa m_b. La expresión es útil, ya que, habiendo elegido un sistema de coordenadas, no hay que andar pensando en el sentido que tiene: el mismo lo da naturalmente el vector $\overline{r_b} - \overline{r_a}$. Lo veremos con un ejercicio al calcular la superposición de dos fuerzas en los ejemplos.



Fuerza Peso

Cuenta la anécdota que estando Newton sentado debajo de un árbol del Trinity College vio caer una manzana, y como el eureka de Arquímedes, se le ocurrió que la fuerza con que caen las cosas en la tierra es de la misma naturaleza que la fuerza que hace que los planetas giren. No puedo confirmar la veracidad de esta anécdota, pero si del descubrimiento de Isaac.

Imagínense que tiran algo en la tierra. Se va a mover en un tiro oblicuo. Ahora bien, si van aumentando la velocidad inicial, el cuerpo en algún momento no volverá a caer en la tierra y quedará orbitando alrededor de ella. Es decir que la fuerza que hace girar a los planetas es la misma que la que sienten los cuerpos aquí en la tierra, la llamada fuerza peso.



El valor de la fuerza peso es una aproximación del valor de la fuerza gravitatoria, pero a una distancia r igual al radio de la tierra (6371 km), ya que estamos a esa distancia del centro de la tierra. Digo aproximación porque esto vale para alturas con respecto a la superficie que sean mucho menores que el radio de la tierra. Por lo tanto, el peso de un cuerpo de masa m es: $P = F_g(r = R_T) = \frac{G\ m\ M_T}{{R_T}^2} = mg$, donde la masa de la tierra es $M_T = 5.97.\ 10^{24}$ kg y $g = \frac{G\ M_T}{{R_T}^2} = 9.81\ \frac{m}{s^2}$ es la aceleración de la gravedad. La dirección y sentido es en la recta que une al cuerpo con el centro de la tierra y apuntando hacia el centro.

Ejemplos

Disminución de g con la distancia

Acabamos de ver que el valor de la aceleración de la gravedad es $g = \frac{G\ M_T}{{R_T}^2}$, este valor, como dijimos, es sobre la superficie terrestre. A medida que nos alejamos de la superficie de la tierra, esta aceleración disminuye como una función $g(r) = \frac{G\ M_T}{r^2}$

Por ejemplo, ¿a que distancia el valor de g se reduce a la mitad?

La ecuación que nos queda es $\frac{G\ M_T}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{G\ M_T}{{R_T}^2}$

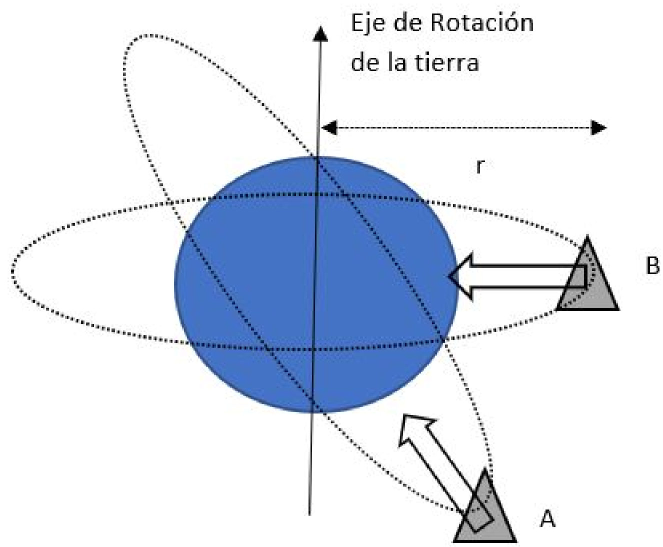
Y despejando r, obtenemos $r = \sqrt{2}\ R_T$, unos 9010 km medidos desde el centro de la tierra , o 2639 km medido desde la superficie terrestre.

Período de un cuerpo que orbita en trayectoria circular

Imaginen un cuerpo de masa m en trayectoria circular alrededor de otro de masa M, podría ser aproximadamente la luna girando alrededor de la tierra. Según la segunda ley de Newton $F_g = m\ a$ y teniendo en cuenta el valor de la fuerza gravitatoria, y que por ser un movimiento circular la aceleración a es la centrípeta, obtenemos que:
$G\ \frac{m\ M}{r^2} = m\ r\ w^2$. Despejando la velocidad angular se obtiene que $w = \sqrt{\frac{G\ M}{r^3}}$. Como el período de un movimiento circular es $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\ M}}$. Obtenemos de esta forma la tercera ley de Kepler mencionada anteriormente: el cociente $\frac{T^2}{r^3}$ igual a una constante para cada planeta.

Satélites geoestacionarios

Un satélite geoestacionario es aquel que gira con la misma velocidad angular que la tierra, y, por lo tanto, está posicionado siempre en la misma posición relativa a la tierra.



Pensando un poco en la dirección de la fuerza gravitatoria, nos podemos dar cuenta que existe solo una posible ubicación para que el satélite gire de esta forma sin ser desviado: y esa ubicación coincide con el ecuador terrestre.

En la figura observamos que, si el satélite (es el triángulo en el dibujo) se ubica en la posición A, giraría en la circunferencia indicada, y su eje de rotación no coincidiría con el de la tierra, y por lo tanto no mantendría la misma posición relativa, es decir, no sería geoestacionario. Ese tipo de satélites también existen, pero no es lo que estamos buscando. En la posición B, los ejes coinciden, y en realidad, es la única ubicación donde ocurre esto.

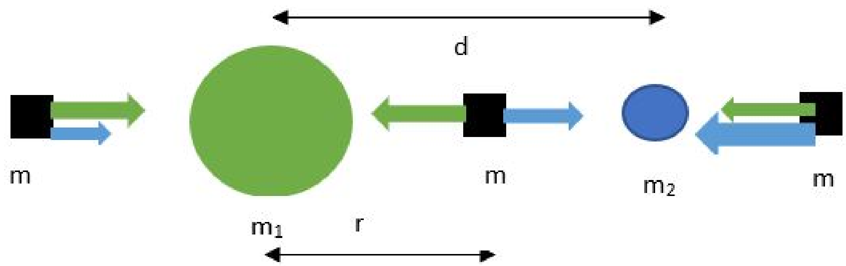
Lo que nos falta calcular es a que distancia de la tierra debemos ubicarlo.

La ecuación es la misma que escribimos antes para un cuerpo en órbita circular: $G\ \frac{m\,M}{r^2} = m\,r\,w^2$. Lo único que debemos pedir es que la velocidad angular w valga lo mismo que la de la tierra, es decir, $w\ =\ \frac{2\pi}{24\ hs}$, ya que la tierra tarda un día en dar una vuelta completa sobre si misma. Nuevamente queda a cargo del lector o lectora verificar que se obtiene que la distancia debe ser $r\ =\ (\frac{(24\ hs)^2 G\ M}{4\,\pi^2})^{\frac{1}{3}}$. Reemplazando el valor de G y la masa M de la tierra obtenemos que la altura con respecto a la superficie terrestre debe ser de 35926 km.

Esta órbita es muy codiciada por todos los países, ya que, como dijimos, es única.

Punto de equilibrio gravitatorio entre dos cuerpos

Resolvamos el siguiente problema idealizado: se tienen dos cuerpos fijos masivos m_1 y m_2 separados por una distancia d, entre sus centros. Se ubica un tercer cuerpo, y la pregunta que queremos responder es si existe algún punto en el cual la fuerza gravitatoria total es nula. Pensando en los posibles sentidos de las fuerzas vemos solo una opción:



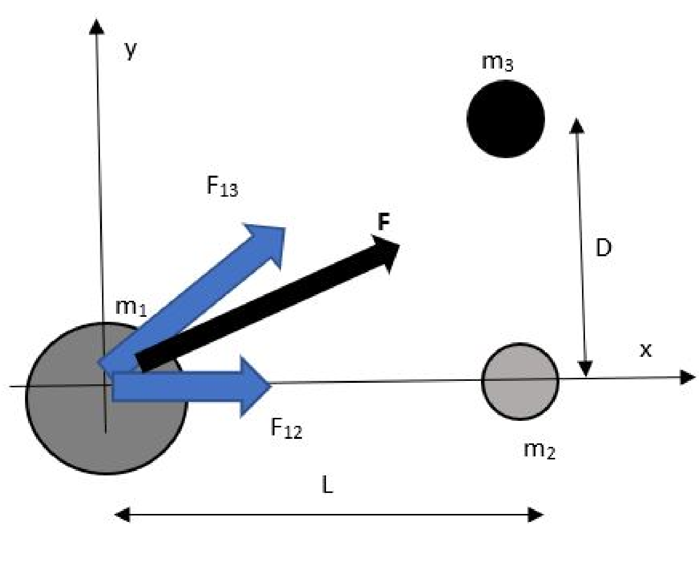
De existir tal punto de equilibrio debería estar ubicado entre los dos cuerpos de masas m_1 y m_2. En dicho punto se cumple que: $F_{g1} + F_{g2} = 0$ y por lo tanto $G\frac{m\,m_2}{(d-r)^2} = G\frac{m\,m_1}{r^2}$. Lo que nos lleva a que este punto de equilibrio debe verificar la ecuación $m_1(d-r)^2 = m_2r^2$. Queda como ejercicio chequear que la solución es $r = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}$.

Si m_1 es muy grande comparada con m_2 el punto de equilibrio se acerca a r=d, es decir se acerca a la masa más pequeña, lo cual tiene mucho sentido. Por el contrario, si m_2 es muy grande comparada con m_1 el punto se acerca a r=0, es decir, también a la masa más pequeña. Si son iguales las masas, como es de esperar el punto de equilibrio esta en el medio r=d/2.

Superposición DE FUERZAS GRAVITATORIAS

Consideremos ahora tres cuerpos masivos que interactúan gravitatoriamente. Vamos a suponer que están fijos de alguna forma.

Lo que queremos calcular es la fuerza total gravitatoria **F** sobre el cuerpo de masa m_1. Esta fuerza es la suma de las fuerzas que le ejercen los otros dos cuerpos de masa m_2 y m_3, en el dibujo son las fuerzas F_{12} y F_{13}. Por lo tanto debemos calcular la suma vectorial $\overline{F} = \overline{F_{12}} + \overline{F_{13}}$



Para esto vamos a usar la expresión de la fuerza mencionada antes:

$$\vec{F} = \frac{-G\ m_a m_b(\overline{r_b} - \overline{r_a})}{|\overline{r_b} - \overline{r_a}|^3}$$

De acuerdo al sistema que se ve en la figura, para calcular la fuerza $\overline{F_{12}}$ necesito las posiciones: $\overline{r_a} = \overline{r_2} = (0, L)$ y $\overline{r_b} = \overline{r_1} = (0{,}0)$.
Así resulta que: $\overline{F_{12}} = \frac{-G\ m_1 m_2(-L{,}0)}{|(L{,}0)|^3} = \frac{G\ m_1 m_2(L{,}0)}{L^3}$, es decir una fuerza en la dirección horizontal.
Para la fuerza $\overline{F_{13}}$, las posiciones son: $\overline{r_a} = \overline{r_3} = (L, D)$ y $\overline{r_b} = \overline{r_1} = (0{,}0)$.

$\overline{F_{13}} = \frac{-G\ m_1 m_3(-L,-D)}{|(-L,-D)|^3} = \frac{G\ m_1 m_3(L{,}D)}{(L^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}$ que en este caso tiene las dos componentes no nulas como se puede ver en la figura.
Y la fuerza neta, es decir la suma, resulta:

$$\bar{F} = \overline{F_{12}} + \overline{F_{13}} = G\ m_1\left(\frac{m_2 L}{L^3} + \frac{m_3 L}{(L^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,\ \frac{m_3 D}{(L^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

A modo de ejemplo queda para el lector calcular la fuerza neta para los siguientes valores:
$m_1 = m_2 = m_3 = 10^{12} kg$ y distancias D= 10^6
m y L= 2 .10^6 m.