Análisis dinámico de los movimientos circulares.

Consideraremos ahora el movimiento de *partículas*, es decir, cuerpos que pueden suponerse puntuales. Más adelante veremos que el estudio del movimiento de partículas resulta útil para estudiar el movimiento de cuerpos más complejos.

Como la descripción del movimiento de una partícula depende del sistema de referencia considerado, en el estudio de la Dinámica será fundamental definirlo claramente, ya que no todos los sistemas de referencia pueden resultar equivalentes. En lo que sigue, consideraremos solamente *sistemas de referencias inerciales*. A los fines de los problemas que vamos a trabajar, podemos suponer que un *sistema de referencia fijo a la tierra* es un sistema de referencia inercial.

Mirando las cosas desde un sistema de referencia inercial, el análisis dinámico (clásico o newtoniano) se basa en tres *principios* o leyes que se denominan *Principios de la Dinámica* o, también, *Leyes de Newton*. Los recordamos:

- **Primer Principio de la Dinámica**

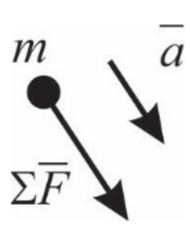
Principio de Inercia: La velocidad de un cuerpo libre se mantiene constante. Si el cuerpo está en reposo permanecerá en reposo. Si no está en reposo, su movimiento es rectilíneo y uniforme.

- **Segundo Principio de la Dinámica o Segunda ley de Newton**

El *Segundo Principio de la Dinámica* afirma que la aceleración $\vec{a}$ que adquiere una partícula de masa m sometida a un sistema de fuerzas, $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_i, \ldots, \vec{F}_N\right\}$, es tal que se verifica la relación:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\,\vec{a}$$

La suma de las fuerzas de un sistema $\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right)$ se denomina *fuerza resultante*. La masa de los cuerpos es una magnitud escalar positiva. Entonces, la relación $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\,\vec{a}$ implica que la fuerza resultante y la aceleración son vectores de la misma dirección y sentido, como se muestra en la figura.



Las fuerzas representan interacciones entre cuerpos. Las más comunes que nos aparecen son el peso de los cuerpos, las tensiones de las cuerdas, las normales, las fuerzas de rozamiento, etc. Estas fuerzas verifican el tercer principio de la dinámica.

- **Tercer Principio de la Dinámica**

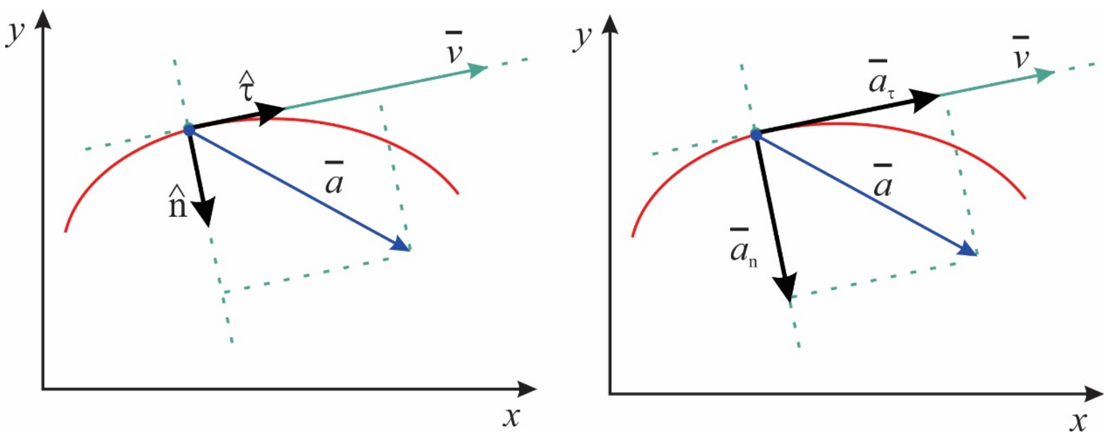
Principio de acción y reacción: Cuando los cuerpos 1 y 2 interactúan entre sí, el 1 ejerce sobre el 2 una fuerza $\vec{F}_{21}$ y el 2 ejerce sobre 1 una fuerza $\vec{F}_{12}$ opuesta a la anterior, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, es decir, ambas fuerzas son de igual módulo, poseen la misma dirección pero sus sentidos son contrarios.

Estas dos fuerzas de las que habla el *Principio de acción y reacción* se denominan *par de acción y reacción*.

Estas leyes son aplicables cualquiera sea la forma de la trayectoria del cuerpo: rectilínea, parabólica, elíptica, circular, etc. Lo que vamos a analizar es cómo suele ser conveniente trabajar con la Segunda Ley Newton cuando la trayectoria es circular.

Como en todo análisis dinámico hay que ver cuáles son las fuerzas aplicadas a la partícula y siempre será útil representarlas mediante un *diagrama de cuerpo libre*. Pero también es necesario analizar al otro vector que aparece en la ecuación: el vector aceleración. Vamos a recordar lo que nos enseña el análisis cinemático sobre el vector aceleración de una partícula que sigue una trayectoria curva cualquiera contenida en un plano.

Sabemos que en cada punto de la trayectoria el vector velocidad instantánea tiene la dirección de la recta tangente a la trayectoria en el punto considerado. El vector aceleración mide cómo cambia el vector velocidad, ya sea porque se modifica su módulo (rapidez) y/o su dirección.



El primer resultado importante es que, en cada punto de la trayectoria, el vector aceleración apunta hacia "adentro de la curva", es decir, hacia la región desde la cual la trayectoria se ve cóncava. Luego, para describir al vector aceleración en un dado punto de la trayectoria, resulta muy útil considerar la dirección de la recta tangente en ese punto y la dirección perpendicular o *normal* a la tangente en el plano de la trayectoria. Estas direcciones se pueden representar mediante el versor tangente $\hat{\tau}$ y el versor normal $\hat{n}$. Entonces, el vector aceleración en un punto se puede representar mediante su componente tangencial y su componente normal, como se muestra a la derecha de la figura anterior.

La importancia de esta descomposición del vector aceleración es que la componente tangencial es la que mide el cambio en el módulo de la velocidad (cambio en la rapidez del movimiento) y la componente normal es la que mide el cambio en la dirección del vector velocidad (cambio en la dirección del movimiento).

En la figura anterior, se representó al vector aceleración formando con el vector velocidad un ángulo menor a 90°. En este caso, la componente tangencial de la aceleración tiene el mismo sentido que el vector velocidad. Esta situación corresponde a un objeto que avanza por la curva aumentando su rapidez.

Pero el vector aceleración podría también formar con la velocidad un ángulo mayor a 90° y menor que 180°. Entonces, la componente tangencial de la aceleración sería de sentido opuesto al vector velocidad. Esta situación corresponde a un objeto que avanza por la curva cada vez más despacio.

Por último, el vector aceleración podría formar con la velocidad un ángulo de 90°, con lo que la aceleración tangencial sería nula. Esto corresponde a una partícula que avanza por la curva manteniendo su rapidez.

Aunque la trayectoria sea plana, como la curva en el plano *x*-*y* de la figura anterior, podría ser necesario considerar la dirección perpendicular al plano de la trayectoria (eje *z* en la figura anterior). A la dirección perpendicular al plano de la trayectoria la denominaremos dirección *binormal*.

Por lo dicho anteriormente, si la trayectoria es plana, no hay aceleración en la dirección perpendicular al plano de la trayectoria.

Si nos restringimos al caso en que la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio r, podemos decir que en cada punto la componente normal $\left(\vec{a}_{\mathrm{n}}\right)$ de la aceleración apunta hacia el centro de la trayectoria, y por lo tanto se la suele denominar también aceleración centrípeta $\left(\vec{a}_{\mathrm{c}}\right)$. El análisis cinemático permite demostrar que se cumple:
$$\left|\vec{a}_{\mathrm{c}}\right| = \left|\vec{v}\right|^2 / r = \omega^2 r$$

donde ω es la velocidad angular de la partícula.

En cuanto a la componente tangencial de la aceleración, el análisis cinemático demuestra de se cumple:

$$\left|\vec{a}_{\mathrm{t}}\right| = \left|\gamma\right| r$$

donde γ es la aceleración angular de la partícula.

Entonces, si la partícula se mueve en una trayectoria curva plana cualquiera, que como caso particular puede ser una circunferencia, la ecuación vectorial de Newton, $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\,\vec{a}$, en lugar de descomponerla en dos direcciones x-y cualesquiera $\left(\sum F_x = m\,a_x \quad \sum F_y = m\,a_y\right)$, conviene descomponerlas según las direcciones tangencial y normal a la trayectoria. Entonces, en cada punto se cumple:

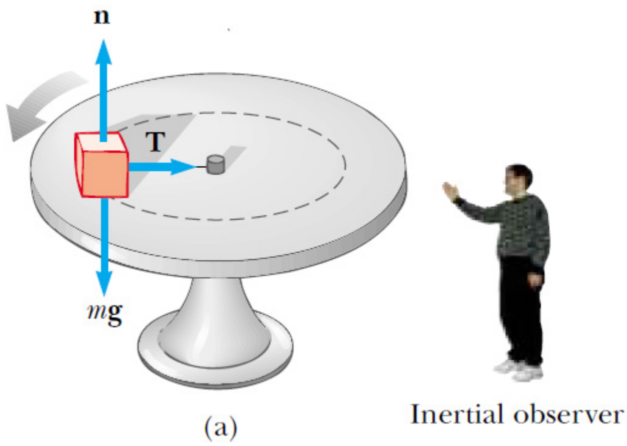
- La suma de las componentes tangenciales de las fuerzas aplicadas es igual a la masa del cuerpo por la componente tangencial de la aceleración: $\sum F_t = m\,a_t$.
- La suma de las componentes normales de las fuerzas aplicadas es igual a la masa del cuerpo por la componente normal (centrípeta) de la aceleración: $\sum F_n = m\,a_c$

Como la componente normal de la aceleración apunta hacia el centro de la trayectoria y por eso también se la llama aceleración centrípeta, la componente normal de la fuerza resultante $\left(\sum F_n\right)$ apunta hacia el centro de la trayectoria y por lo tanto se la suele llamar *fuerza centrípeta* $\left(F_c = \sum F_n\right)$.

Para completar el análisis nos queda por considerar que las fuerzas aplicadas pueden tener componentes perpendiculares al plano de la trayectoria, es decir, componentes en la dirección binormal. Si la trayectoria es plana, como en el caso de una circunferencia, no hay aceleración en la dirección perpendicular a su plano y, por lo tanto, la componente de la fuerza resultante en esa dirección deberá ser nula: $\sum F_b = 0$.

Ejemplo I: Un bloque de masa *m* se apoya sobre una plataforma horizontal que gira con velocidad angular constante ω. Gracias a una cuerda que lo une al centro de la plataforma, el bloque describe una trayectoria de radio *r* con la misma velocidad angular que la plataforma. Si la fricción entre el bloque y la plataforma es despreciable calcular:

a) La tensión de la cuerda.
b) La fuerza de contacto entre el bloque y la plataforma.



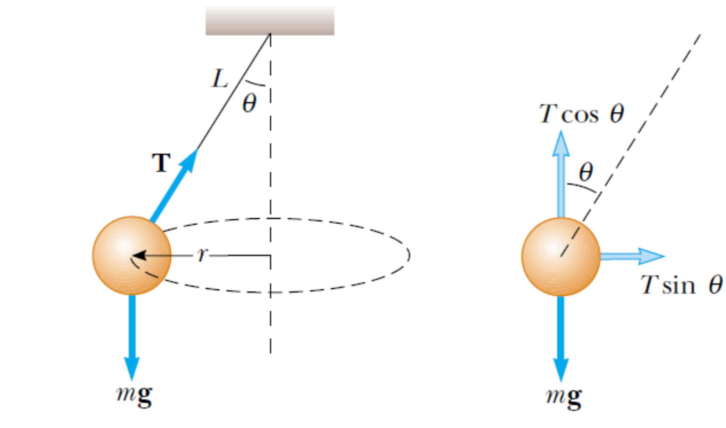
Las fuerzas aplicadas sobre el bloque son la tensión de la cuerda, de módulo *T*, el peso del cuerpo de módulo *mg* y la fuerza normal de contacto con la plataforma de módulo *N*. La tensión de la cuerda está en la dirección normal o centrípeta apuntando hacia el centro. En la dirección tangente a la trayectoria no hay fuerzas. El peso y la normal de contacto están en la dirección perpendicular al plano de la trayectoria (binornal). Luego:

a) $\sum F_n = m\,a_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = m\,\omega^2 r}$

b) $\sum F_b = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = mg}$

Ejemplo II: Un bloque de masa *m* se suspende del techo mediante un hilo de longitud *L*, de manera que se mueve describiendo una trayectoria circular horizontal. Si el hilo forma con la vertical un ángulo θ, calcular, suponiendo toda fricción despreciable:

a) El radio de la trayectoria.
b) La aceleración tangencial.
c) La fuerza que ejerce el hilo y la velocidad angular del bloque.



a) Un sencillo análisis geométrico permite obtener la relación: $\boxed{r = L\,\mathrm{sen}(\theta)}$.
b) Las fuerzas aplicadas sobre el bloque son su peso y la tensión del hilo. Ninguna de estas fuerzas tiene proyección tangente a la trayectoria. Es decir que no hay fuerzas tangenciales. Luego, la aceleración tangencial es nula.
c) La tensión tiene una componente centrípeta de módulo $T\,\mathrm{sen}(\theta)$. Como esta es la única fuerza en la dirección normal resulta: $\sum F_n = m\,a_c \quad \Rightarrow \quad T\,\mathrm{sen}(\theta) = m\,\omega^2 r \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad T\,\mathrm{sen}(\theta) = m\,\omega^2 L\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad T = m\,\omega^2 L$$

Por otro lado, la tensión tiene una componente vertical de módulo $T\cos(\theta)$. La dirección vertical es también en este caso la dirección binormal. Luego:

$$\sum F_b = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos(\theta) - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{mg}{\cos(\theta)}}$$

Y como $T = m\omega^2 L$ resulta

$$m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos(\theta)}}}$$