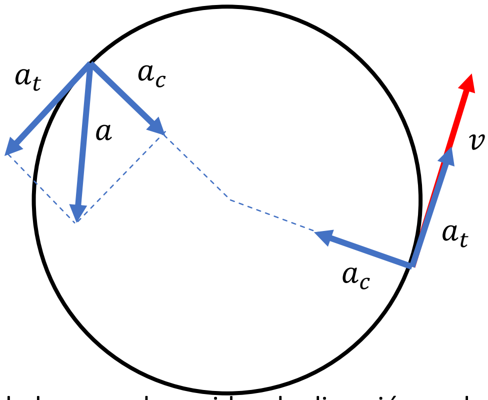
Cinemática

Movimiento circular

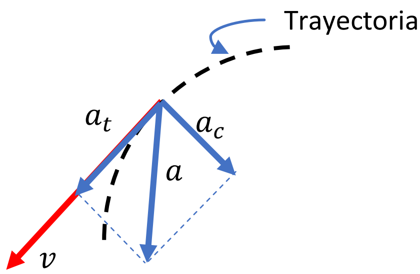
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de la velocidad cambia, esto significa que la partícula debe tener una aceleración, o al menos una componente de ella perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante.



Si un móvil cambia su velocidad; ya sea la rapidez, la dirección o el sentido, es debido a que sobre él actúa una aceleración. La componente de la aceleración perpendicular a la velocidad, hace que ésta cambie su dirección.

Movimiento Circular Uniforme

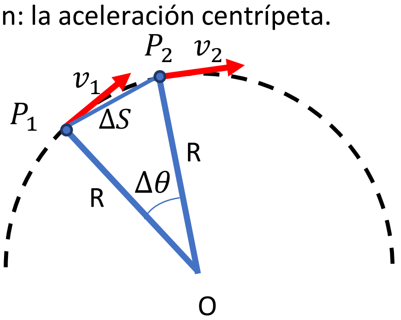
Recordemos, entonces, que la aceleración de un móvil en la misma dirección de la velocidad le hará cambiar su rapidez y la componente perpendicular le hará cambiar su dirección.

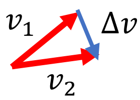


a_t componente de la aceleración con la misma dirección de la velocidad, le cambiará la rapidez al móvil.

a_c componente de la aceleración perpendicular a la velocidad, le cambiará la dirección al móvil.

La velocidad instantánea es tangente a la trayectoria, siendo ésta una circunferencia, movimiento circular, cualquier perpendicular a una tangente a la trayectoria coincide con el radio de la circunferencia, por eso a esta aceleración se la llama **radial** y cómo va <u>hacia el centro de la circunferencia</u> se le llama **aceleración centrípeta**, la que hace cambiar solamente la dirección de la velocidad pero no la rapidez. Por eso, a este movimiento, en el que no cambia la rapidez y la trayectoria es una circunferencia, sólo existe una aceleración: la aceleración centrípeta.





Los ángulos en los dos triángulos son congruentes (iguales) porque sus lados son respectivamente perpendiculares. Al ser ambos triángulos isósceles, sus lados son respectivamente proporcionales. Ambas son las condiciones por las que podemos concluir que estos dos triángulos son semejantes. Nos permite plantear la siguiente igualdad:

$$\therefore \ \frac{|\Delta v|}{v_1} = \frac{\Delta S}{R} \qquad => \qquad |\Delta v| = \frac{v_1}{R} \ \Delta S$$

Si dividimos ambos miembros de la última ecuación por Δt nos quedará la aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \ \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R} \ \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Pero como $|v_1| = |v_2| = |v|$ y. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$

$$\boxed{\vec{a}_{rad} = \vec{a}_c = \frac{v^2}{R}}$$

Período

Se llama **periodo** al tiempo en que la partícula da una vuelta completa $(2\pi R)$.

Por consiguiente: $\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}}$ y $\boxed{a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2}}$

En todo movimiento cíclico, el móvil vuelve a pasar por la misma posición y en la misma dirección cada determinado tiempo. Ese tiempo será el período. Otro ejemplo que podemos considerar de un movimiento cíclico es el péndulo.

Se llama período, en forma genérica, al tiempo en que un cuerpo completa un ciclo.

La unidad de medida del período es hora, minuto o segundo

$[T] =$ h; min; s

Frecuencia

La frecuencia es la cantidad de ciclos por unidad de tiempo. En el caso del movimiento circular, es el número de vueltas por unidad de tiempo (f).

$$f = \frac{número\ de\ ciclos}{unidad\ de\ tiempo} = \frac{1}{s} = s^{-1} = Hz\ (un\ ciclo\ por\ segundo)$$

También se puede medir en revoluciones por minuto (rpm), o en vueltas o ciclos por minuto. Si la frecuencia se mide en revoluciones por minuto se la escribe:

$$\boxed{f = \frac{n}{60}}$$

Siendo $n.$: número de revoluciones o vueltas

Recordemos que el período es $T = \frac{2\pi R}{v}$ $\wedge$ $f = \frac{1}{T}$ => $f = \frac{v}{2\pi R}$

Si llama velocidad angular al ángulo barrido en la unidad de tiempo ω.

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$\Delta \theta$: ángulo barrido

ΔS: arco recorrido

$\Delta S = \Delta \theta . R$

$\Delta \theta$: también se le dice a la posición angular.

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{R} \qquad => \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{R.\Delta t}$$

$$\boxed{v = \frac{\Delta S}{\Delta t}} \qquad => \qquad \boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

Velocidad Tangencial

Se llama **velocidad tangencial** v a la longitud de arco recorrido, descripto, en la unidad de tiempo; y para este movimiento el módulo de la velocidad tangencial es constante. Su dirección cambia; instante a instante será tangente a la circunferencia que describe el móvil.

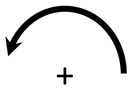
Tengamos en cuenta que:

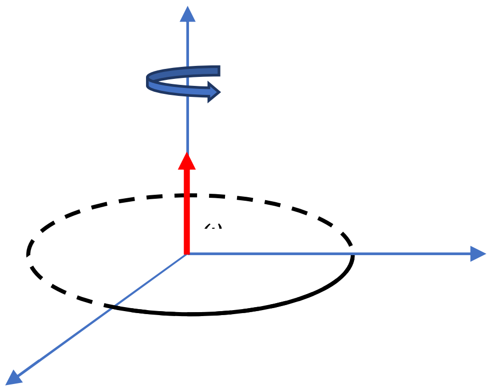
$$a_t = 0 \qquad v = \omega.R \qquad v = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}R$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad a_c = \omega^2.R$$

La velocidad angular es una magnitud vectorial cuya dirección es perpendicular al plano de rotación y su sentido sigue la regla de la mano derecha.

Si giramos los dedos de la mano derecha, menos el pulgar en el sentido del giro, el pulgar nos indicará el sentido de la velocidad: si el giro es ante horario se lo suelo tomar como positivo y será saliente del plano.



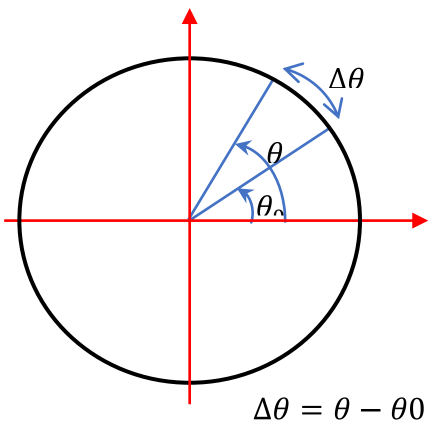


Posición Angular

$\Delta\theta$: los ángulos recorridos se miden en radianes en el Sistema Internacional de Medidas.

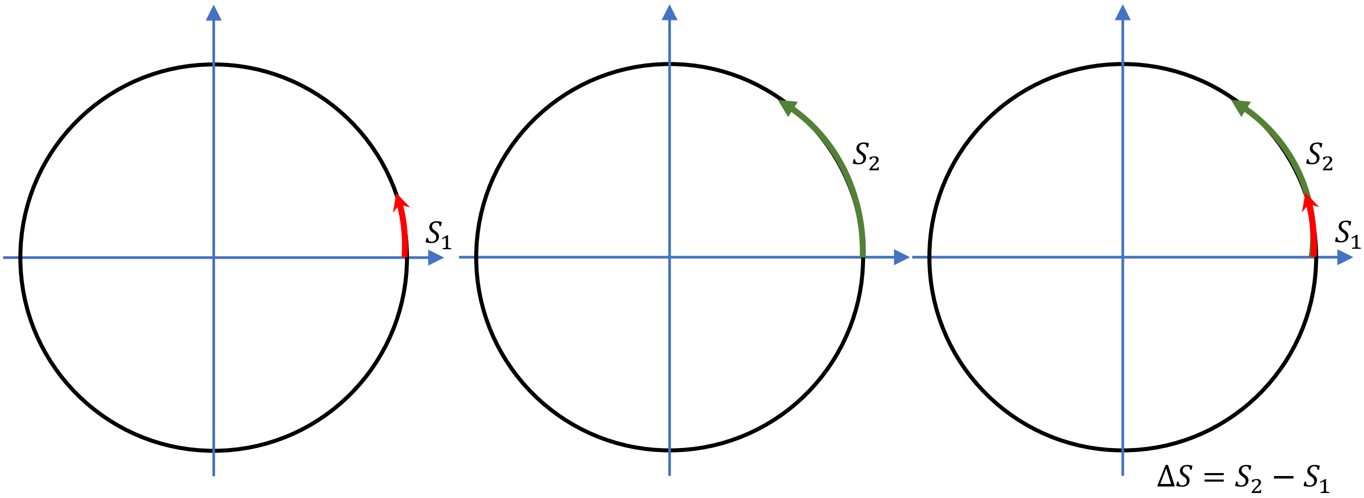
Si damos una vuelta completa $\Delta\theta = 2\pi$

Los ángulos no son ni una magnitud vectorial, ni una magnitud escalar.



$$\Delta\theta = \theta - \theta 0$$

θ: posición angular. Si estamos en un plano, los ángulos se comportan como si fueran escalares.



Recordemos el movimiento circular uniforme, MCU. Tiene una **<u>trayectoria circular recorriendo arcos iguales en tiempos iguales</u>**. Su velocidad no es constante, pero su rapidez sí lo es: $|v| = cte$. Cambia la dirección instante a instante, pero no así su módulo.

Además, la aceleración que provoca que la velocidad solamente cambie su dirección y mantenga su módulo, es perpendicular a la dirección de la velocidad y se llama **aceleración normal o radial,** y como su sentido es hacia el centro se llama **aceleración centrípeta**. Cuando la aceleración modifica el módulo de la velocidad hablaremos de aceleración tangencial.

Resumen de Ecuaciones

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad v = \omega . R \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

$$v = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} R \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega = \frac{\pi . n}{30} \qquad \omega = 2\pi . f$$

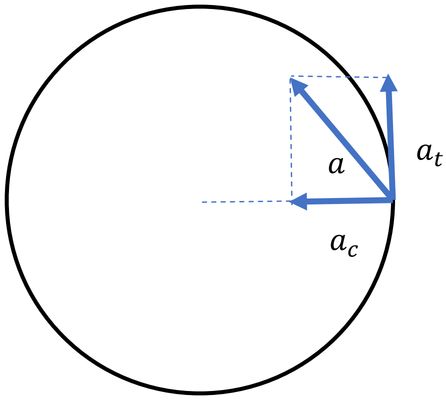
$$f = \frac{1}{T} \qquad f = \frac{n}{60} \qquad v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \Delta S = \Delta\theta . R$$

$$\theta = \theta_0 + \omega . \Delta t \qquad S = S_0 + v . \Delta t \qquad a_t = 0 \qquad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$a_c = \omega^2 . R \qquad a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad a_c = v . \omega \qquad a_c = a_n$$

Movimiento Circular No Uniforme

En este movimiento con trayectoria circular, la rapidez cambia; por lo que tenemos no solo una aceleración centrípeta, sino también una aceleración tangencial.



$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$

La aceleración podemos escribirla utilizando los versores $\check{r}$ y $\check{t}$ $\boxed{\check{r}: versor\ radial}$ $\boxed{\check{t}: versor\ tangencial.}$

$$\vec{a} = |\vec{a}_c|\check{r} + |\vec{a}_t|\check{t}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

$\vec{a}_t = \vec{\alpha}.R \quad \vec{\alpha}:\ aceleración\ angular$

Si le permitimos acelerar en forma constante tendremos un movimiento circular uniformemente variado. La aceleración angular es constante.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{\alpha}\ es\ constante \\ \vec{\omega}\ varía \end{array}}$$

Con respecto a la posición, tenemos que: $\theta = \theta_0 + \omega_0.\Delta t + \frac{1}{2}\alpha.\Delta t^2$

La velocidad angular: $\omega = \omega_0 + \alpha.\Delta t$

La ecuación complementaria: $\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha.\Delta\theta$

Como $\vec{\omega}\ \ varía$ y $\vec{a}_n = \omega^2.R$ entonces $|\vec{a}_n| varía$

Como $\vec{\alpha} = constante$ y $\vec{a}_t = \vec{\alpha}.R$ entonces $|\vec{a}_t|\ es\ constante$

$$S = S_0 + v_0.\Delta t + \frac{1}{2}a_t.\Delta t^2$$

$$v = v_0 + a_t.\Delta t$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a_t.\Delta S$$

Tengamos en cuenta que hay una relación lineal entre las variables angulares y las variables lineales. Recordar que estas longitudes se refieren a recorridos en arcos. (longitud de arco)

$\boxed{S = R.\theta}$ $\boxed{v = R.\omega}$ $\boxed{a = R.\alpha}$

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_c}^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$$v = v_0 + a.\Delta t$$

$$S = S_0 + v_0.\Delta t + \frac{1}{2}a.\Delta t^2$$

$$S = S_0 + \frac{v_0 + v.}{2}\Delta t$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a.\Delta S$$

Al dividirlas por R nos queda

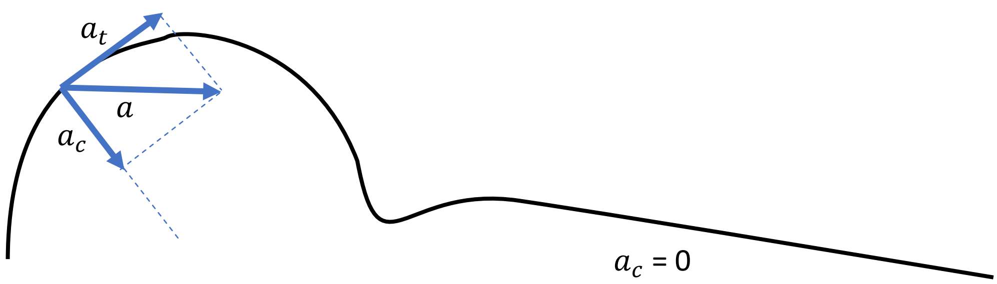
$$\omega = \omega_0 + \alpha.\Delta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0.\Delta t + \frac{1}{2}\alpha.\Delta t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega_0 + \omega.}{2}\Delta t$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha.\Delta\theta$$

Recordar que ΔS nos da el recorrido en arcos (longitudes de arcos). Ahora bien, como podemos ver en la siguiente trayectoria, la aceleración juega un papel muy importante:



La aceleración define el tipo de movimiento

$a_t = 0$	y			$a_c = 0$			=>	MRU
$a_t \neq 0$	y			$a_c = 0$			=>	MRUV
$a_t \neq 0$	y	$a_t = cte$	y	$a_c = 0$			=>	MRUV
$a_t = 0$	y			$a_c \neq 0$			=>	MCU
$a_t \neq 0$	y			$a_c \neq 0$			=>	MCV
$a_t \neq 0$	y	$a_t = cte$	y	$a_c \neq 0$	y	$\alpha = cte$	=>	MCUV