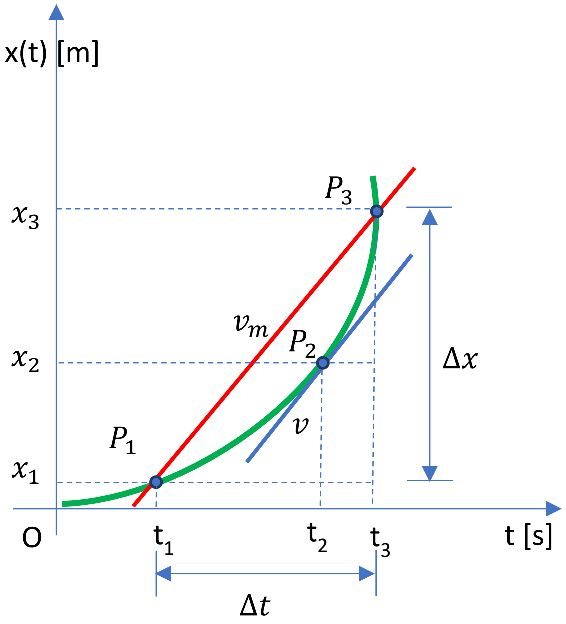
Cinemática

Gráficas de Velocidad, Posición y Aceleración

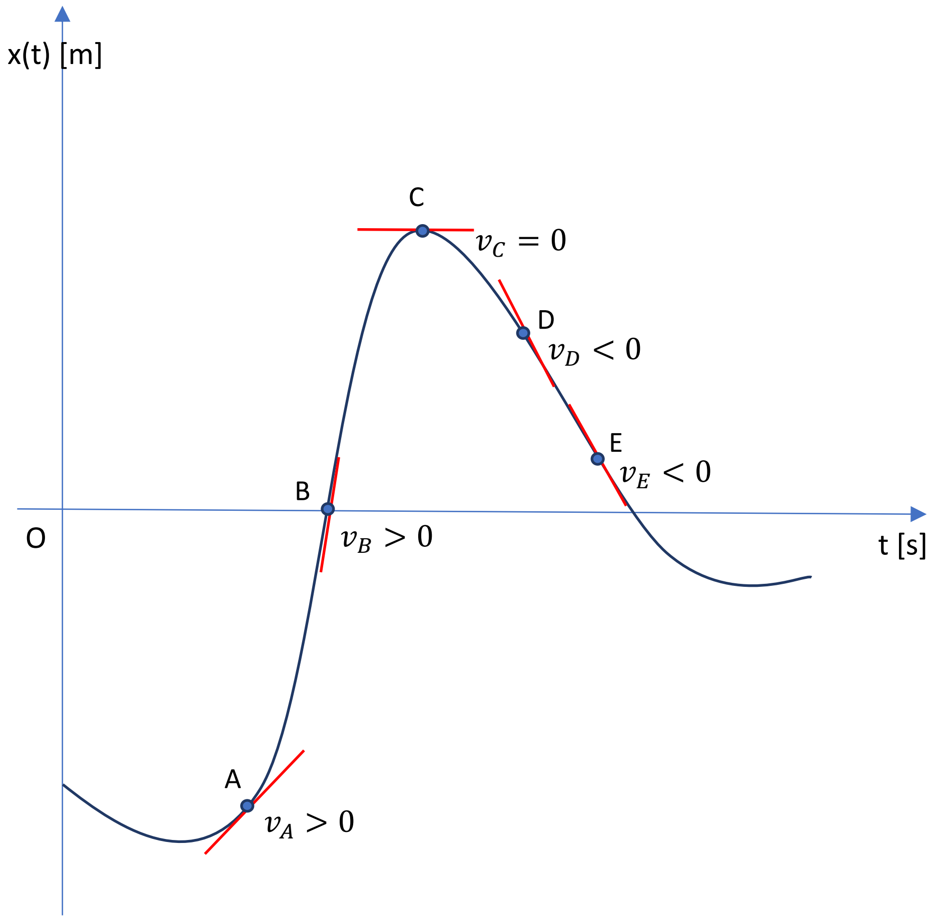
Si graficamos la **posición** de un móvil en función del **tiempo**, x(t), la recta que une dos posiciones cualquiera muestra en su pendiente la **velocidad media** entre esas dos posiciones. La pendiente de la recta tangente a la trayectoria en una posición cualquiera de la misma, es la **velocidad instantánea** en ese punto.



$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{velocidad media}$$

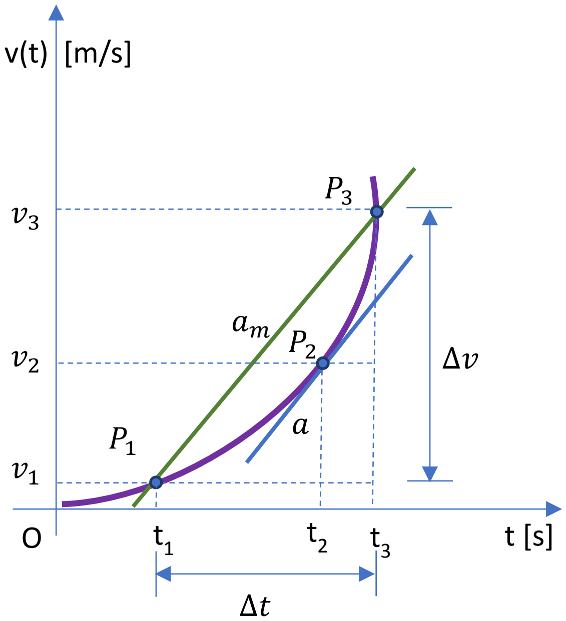
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \quad \text{velocidad instantánea}$$

Veamos otra gráfica de posición en función del tiempo e identifiquemos qué significado tienen los signos de la velocidad instantánea, a través de las pendientes de las rectas tangentes en distintas posiciones:



¿Qué significa que la **velocidad sea negativa o positiva**? Si una partícula se desplaza en una trayectoria se considera este movimiento en uno u otro de dos sentidos. Uno de los sentidos se considera positivo y el otro negativo. El signo de la velocidad indica el sentido en el que desplaza una partícula según el eje de referencia. O sea, si se desplaza en el sentido positivo su velocidad será positiva, si se desplaza en el sentido contrario al sentido dado como positivo la velocidad será negativa.

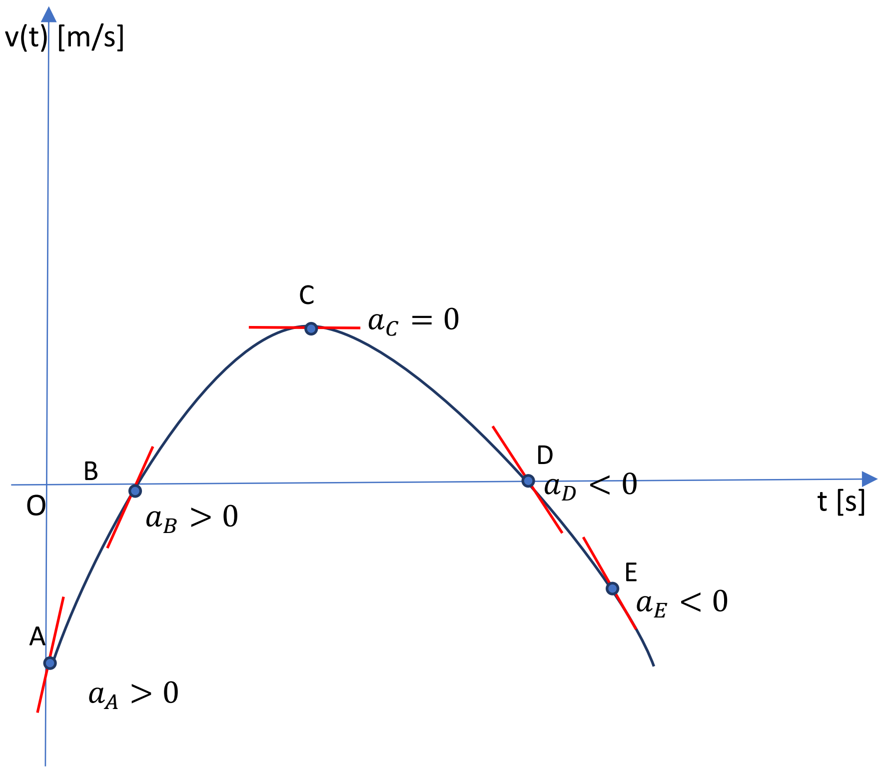
En el punto A, la velocidad es positiva de acuerdo con el sistema de referencia asignado, esto significa que el móvil está acercándose al punto indicado como origen del sistema (va en el sentido positivo del eje). Pasa por la posición B y sigue en el sentido de la "x" positivas. En el punto C, la tangente es horizontal por lo que la velocidad es cero, el móvil no se mueve. Tanto en D como en E, la velocidad será negativa porque va en sentido contrario al marcado como positivo.



$\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ aceleración media

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}$ aceleración instantánea

Si graficamos la velocidad de una partícula en movimiento en función del tiempo, podremos ver la aceleración media y la aceleración instantánea. En la gráfica de la velocidad en función del tiempo del movimiento de una partícula, $v(t)$, la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es igual a la aceleración instantánea. La pendiente de la recta que une dos posiciones es igual a la aceleración media.



Consideramos en forma instantánea en cada punto de la curva de velocidad y vemos que:

En A $a_A > 0 \ \wedge \ v_A < 0$ entonces el móvil está frenando.

En B $a_B > 0 \ \wedge \ v_B = 0$ entonces el móvil está en reposo instantáneo.

En C $a_C = 0 \ \wedge \ v_C > 0$ su rapidez no cambia.

En D $a_D < 0 \ \wedge \ v_D = 0$ entonces el móvil está en reposo instantáneo.

En E $a_E < 0 \ \wedge \ v_E < 0$ entonces el móvil está acelerando.

Si un móvil está frenando la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos. Si el móvil está acelerando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo (ambos positivos o ambas negativas.

Recordemos que la caída libre la aceleración no es cero, aunque la velocidad lo sea.

Deducciones de Algunas Ecuaciones

$$\vec{v}_m = \frac{v_f + v_0}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{t - t_0}$$

En cualquier parte de la trayectoria podremos calcular la velocidad media si la aceleración es constante vale que:

$$v_m = \frac{v_f + v_0}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$x - x_0 = v_m(t - t_0)$$

$$x = x_0 + v_m(t - t_0)$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{v_f + v_0}{2}(t - t_0) \qquad (1)}$$

$$\boxed{v_f = v_0 + a.(t - t_0) \qquad (2)}$$

de (2) en (1)

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v_0 + a.(t - t_0)}{2}(t - t_0)$$

$$x = x_0 + \frac{2v_0(t - t_0)}{2} + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

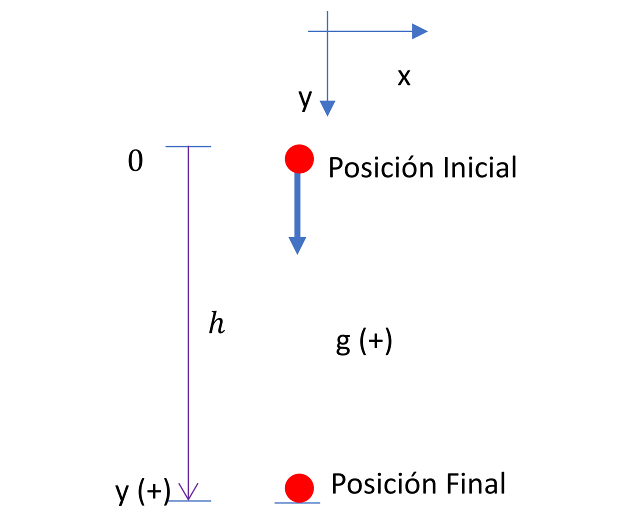
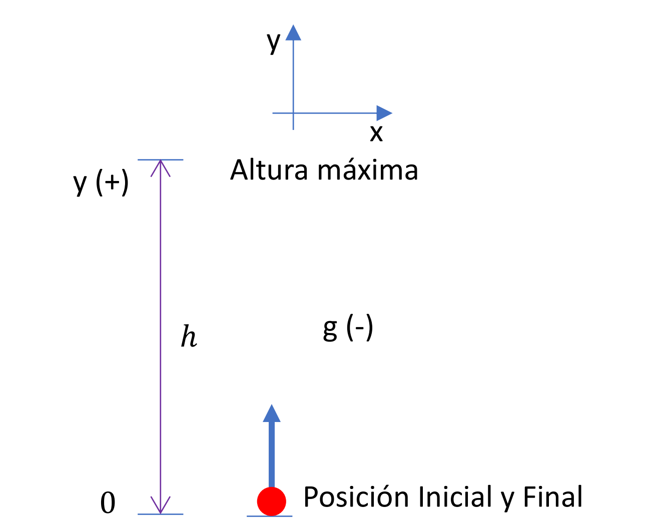
Recordemos que:

	t	x	v	a
$v_f = v_0 + a.(t - t_0)$	Sí	No	Sí	Sí
$x = x_0 + \frac{v_f + v_0}{2}(t - t_0)$	Sí	Sí	Sí	No

$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$	Sí	Sí	No	Sí
$v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)$	No	Sí	Sí	Sí

Para resolver un problema de movimiento rectilíneo, como en cualquier otro problema, primero debemos identificar cuáles son los datos que se nos presentan, cuáles son las incógnitas y qué nos pide el problema.

Luego de identificar esto se deberá hacer un gráfico de la situación y definir nuestro marco de referencia: elegir los ejes de referencia y los sentidos positivos de estos.

Caída Libre	Tiro Vertical
	

No nos olvidemos que si cambiamos el eje de referencia xy por x'y' cambiarán las posiciones, pero no va a cambiar el desplazamiento entre dos posiciones.

Los ejes deben ser adecuados al problema y una vez elegidos no se cambian en el mismo problema.

Trabajo con Unidades

Unidades de desplazamiento: $[l] = m\,;km\,;cm$

Unidades de tiempo: $[t] = s\,;h\,;min$

Unidades de velocidad: $[v] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{m}{s}\,;\frac{km}{h}\,;\frac{cm}{s}$

Unidades de aceleración: $[a] = \frac{[l]}{[t]^2} = \frac{m}{s^2}\,;\frac{km}{h^2}$

Cambios de Unidades de Velocidad

$1km = 1000m$

$1h = 3600s$

$$\boxed{1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600\,s} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s}}$$

$$\boxed{1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}}$$

Movimiento de Proyectiles

Tiro Oblicuo

El tiro oblicuo también se lo conoce como movimiento parabólico. Si lanzamos un proyectil con cierto ángulo, éste se moverá en un plano perpendicular al piso, un plano vertical. Un proyectil es un cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria totalmente determinada por los efectos de la aceleración de la gravedad y la resistencia del aire. Al igual que cualquier otro móvil, el camino que sigue un proyectil se conoce como trayectoria.

Para analizar este tipo de movimiento haremos una idealización: El proyectil es una partícula que se mueve con aceleración constante, la aceleración de la gravedad. En este modelo se ignorará la resistencia del aire, la curvatura de la tierra, como así también su rotación.

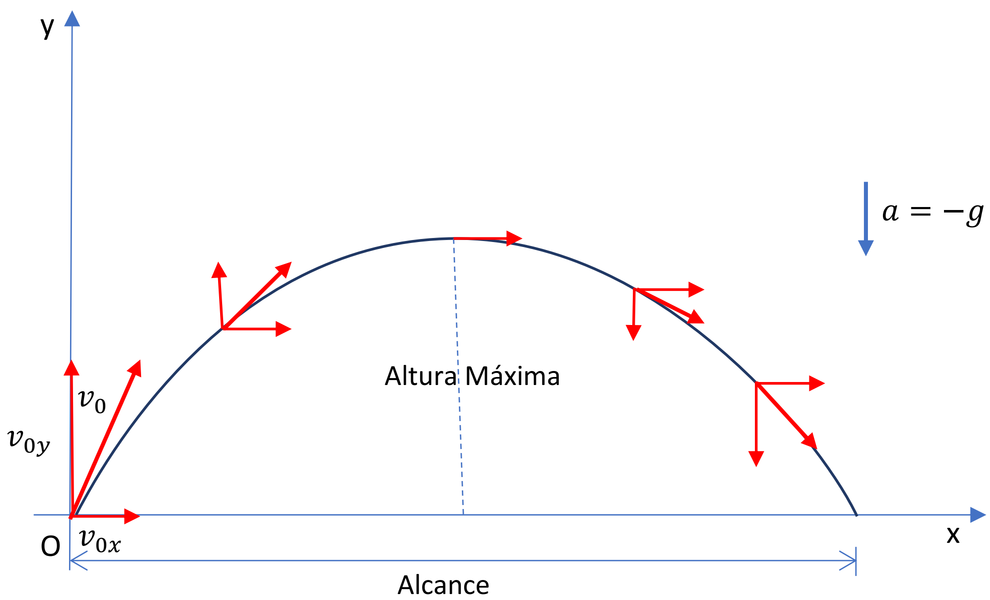
Tengamos en cuenta que como es un modelo no servirá para estudiar todos los proyectiles, como por ejemplo para un paracaídas es importante la resistencia del aire, para un misil de largo alcance es importante la rotación de la tierra y su curvatura. Pero para estudiar este movimiento sirve el recorte que vamos a hacer.

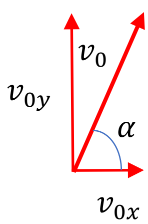
Dijimos que la trayectoria del proyectil se daba sobre un plano perpendicular a la tierra, y éste está determinado por la dirección de la velocidad inicial. Esto se debe a que sólo actúa la aceleración en sentido vertical: el proyectil no se puede acelerar en sentido lateral.

Por lo tanto, podemos analizar este movimiento como la combinación de un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical con aceleración constante.

Son dos movimientos independientes y simultáneos: en horizontal es un movimiento rectilíneo uniforme, en vertical es un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Antes de analizar ambos movimientos, es importante saber que el proyectil recorrerá una trayectoria parabólica en el plano vertical en el cual se mueve.





$$\vec{v}_0 = v_{0x}\check{i} + v_{0y}\check{j}$$

Veamos los dos movimientos por separado, el movimiento horizontal en x, y movimiento vertical en y:

Movimiento Horizontal - x	Movimiento Vertical - y
MRU	MRUV
Sentido horizontal	Sentido Vertical

$a_x = 0$	Aceleración constante $a_y = -g$
$v_{0x} = v_{fx} = v_x = cte$	$v_y = v_{0y} - g.t$
$x = x_0 + v_{0x}t$	$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$	$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$

$\vec{r}: vector\ posición \qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{v}: velocidad\ instantánea \qquad |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

$\alpha: dirección\ de\ la\ velocidad \qquad \alpha = arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

Si colocamos el eje de coordenadas, nuestro marco de referencia, en el punto de partida del proyectil podemos decir que $x_0 = y_0 = 0$

$x = v_0.cos\alpha\ .t \qquad\qquad y = v_0.sen\alpha\ .t - \frac{1}{2}gt^2$

$t = \frac{x}{v_0.cos\alpha} \qquad\qquad \therefore\ \ y = v_0.sen\alpha\ .\frac{x}{v_0.cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0.cos\alpha}\right)^2$

$$\boxed{y = tg\alpha\ .x - \frac{g}{2{v_0}^2.cos^2\alpha}x^2}$$

Como puede observarse la $tg\alpha$ y $\frac{g}{2{v_0}^2.cos^2\alpha}$ son dos constantes y si reemplazamos la $tg\alpha = b$ y $\frac{g}{2{v_0}^2.cos^2\alpha} = c$ el desplazamiento vertical cumple la siguiente ecuación cuadrática $y = b.x - cx^2$

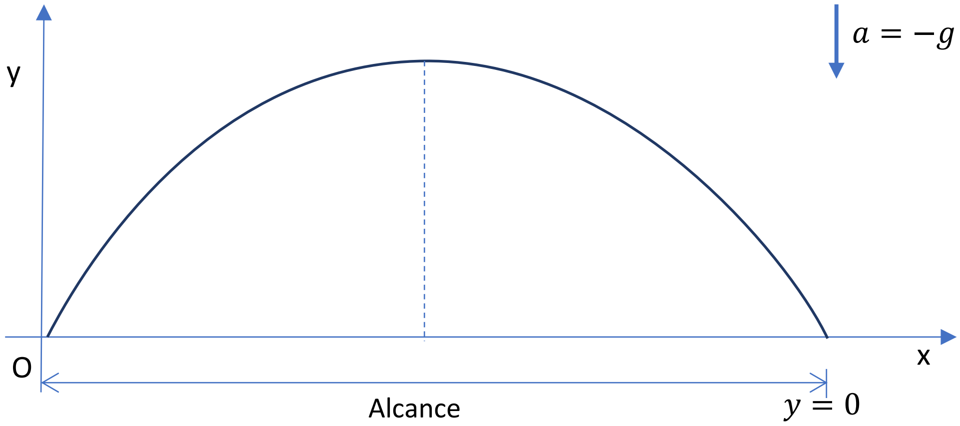
Tiempo de Vuelo, Altura Máxima y Alcance Máximo

El tiempo que tarda un proyectil en alcanzar su altura máxima es el mismo tiempo que tarda en recorrer la mitad de su distancia horizontal, es decir, el tiempo total necesario para alcanzar la distancia horizontal máxima es el doble del tiempo empleado en alcanzar su altura máxima.

El tiempo de vuelo es el tiempo medido desde que el proyectil es lanzado hasta que vuelve hacer impacto sobre algún elemento en general, hasta que regresa a la Tierra o da en un blanco.

$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad si\ y = 0 \quad => t = t_v$ tiempo de vuelo

$v_{0y}t_v - \frac{1}{2}g{t_v}^2 = 0 \quad => v_{0y}t_v = \frac{1}{2}g{t_v}^2 \quad => \boxed{t_v = \frac{2v_{0y}}{g}}$



El alcance es la distancia horizontal que hay desde el punto de partida hasta que el proyectil impacta acabándose su movimiento. El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene $y = 0$

$$y = b.x - cx^2 = -cx\left(x - \frac{b}{c}\right) = 0$$

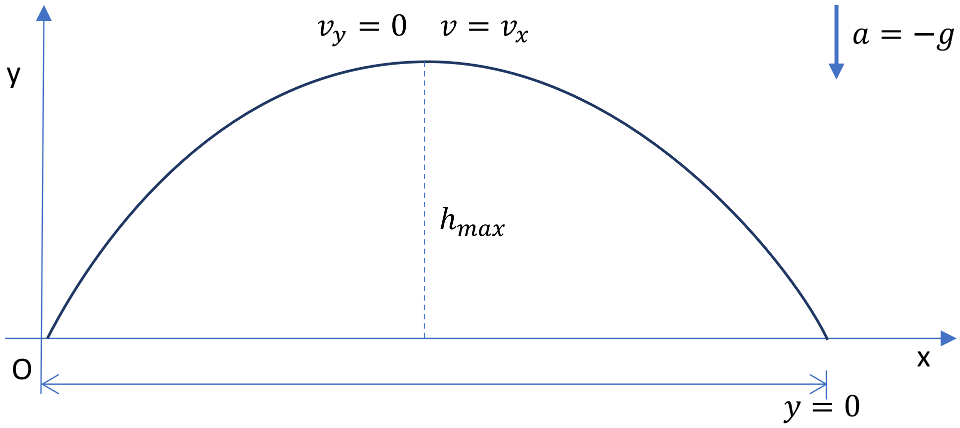
$$Las\ raíces\ de\ la\ cuadrática\ son\ x_1 = 0\ \wedge\ x_2 = x_{max} = \frac{b}{c} = \frac{tg\alpha}{\frac{g}{2v_0{}^2.cos^2\alpha}} = \frac{2v_0{}^2.cos\alpha.sen\alpha}{g}$$

Recordemos que hay una identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos:

$$sen(\alpha + \beta) = cos\alpha.sen\beta + cos\beta.sen\alpha \qquad Si\ \alpha = \beta \qquad => \ sen2\alpha = 2cos\alpha.sen\alpha$$

Por lo que alcance de proyectiles es $\boxed{x_{max} = \frac{v_0{}^2}{g} sen2\alpha}$

Viendo la ecuación el valor del alcance será máximo cuando el $sen2\alpha = 1\ y\ sen90° = 1$ por lo que el ángulo α tiene que ser de 45° y el alcance máximo estará dado $x_{max} = \frac{v_0{}^2}{g}$



$$v_{0y} - g.t = 0 \qquad => \qquad t = \frac{v_0.sen\alpha}{g}$$

En la mitad del tiempo de vuelo el proyectil alcanza la altura máxima, o sea a $t = \frac{v_{0y}}{g}$

Por lo que la altura máxima será: $y_{max} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}{}^2}{g}$

$$\boxed{y_{max} = \frac{v_0{}^2.sen^2\alpha}{2g}}$$