VECTORES LIBRES

ALGO DE TEORÍA Y EJERCICIOS

¿QUÉ ES UN VECTOR?: un segmento orientado que es posible identificar a simple vista dirección y sentido,

VECTOR FIJO: se indica el punto sobre el que está aplicado .Y PUEDE CAMBIAR EL EFECTO SEGÚN SU PUNTO DE APLICACIÓN

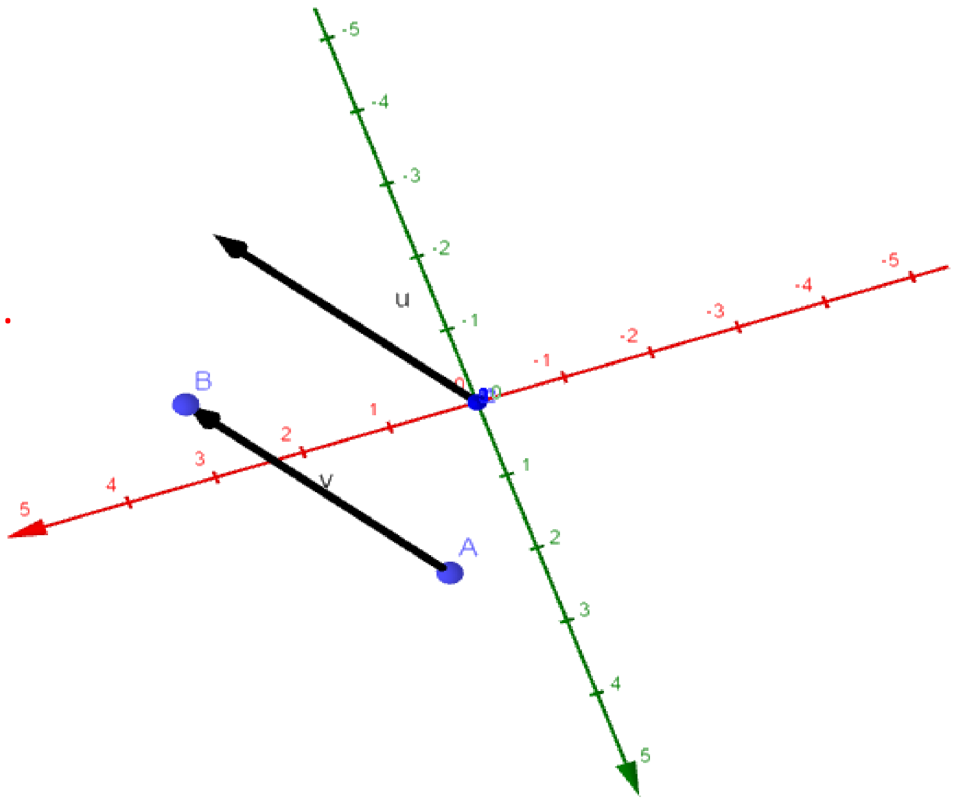
Vector libre: es el conjunto de vectores equipolentes (tienen la misma dirección sentido y módulo)

I)¿Qué es un vector libre?

A un vector no lo nombramos con un solo punto.

Utilizamos su extremo
en este caso el punto B y
su origen el punto A.

Vector $\overline{AB}$



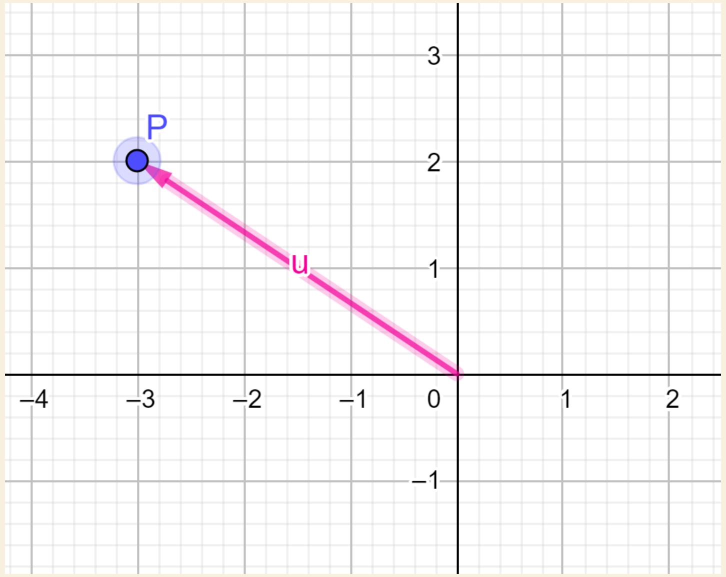
La ventaja es que lo podemos mover
libremente por el espacio o por el plano

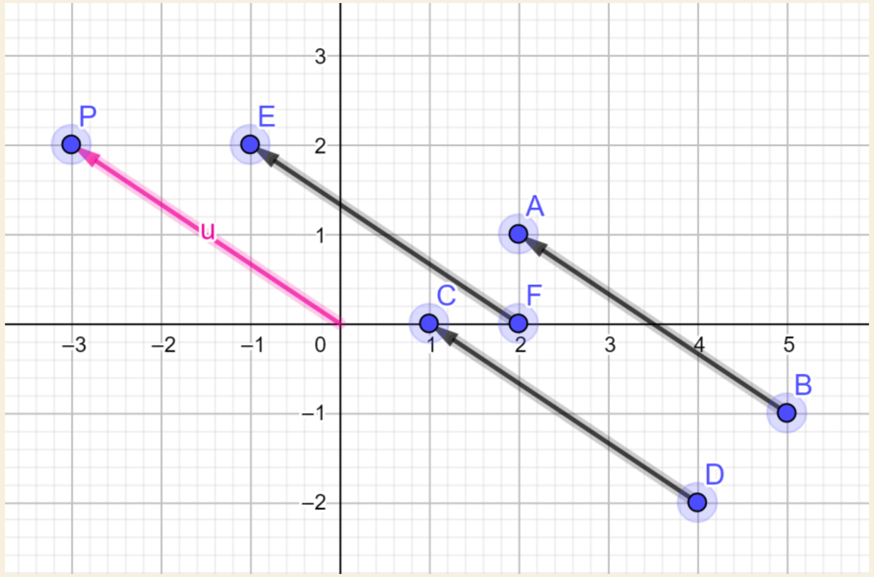
Su representante es el vector posición , que
tiene su misma dirección sentido y módulo

VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS

Todo punto $P(x, y) \in \ R^2$ tiene asociado un vector posición $\overline{OP}$

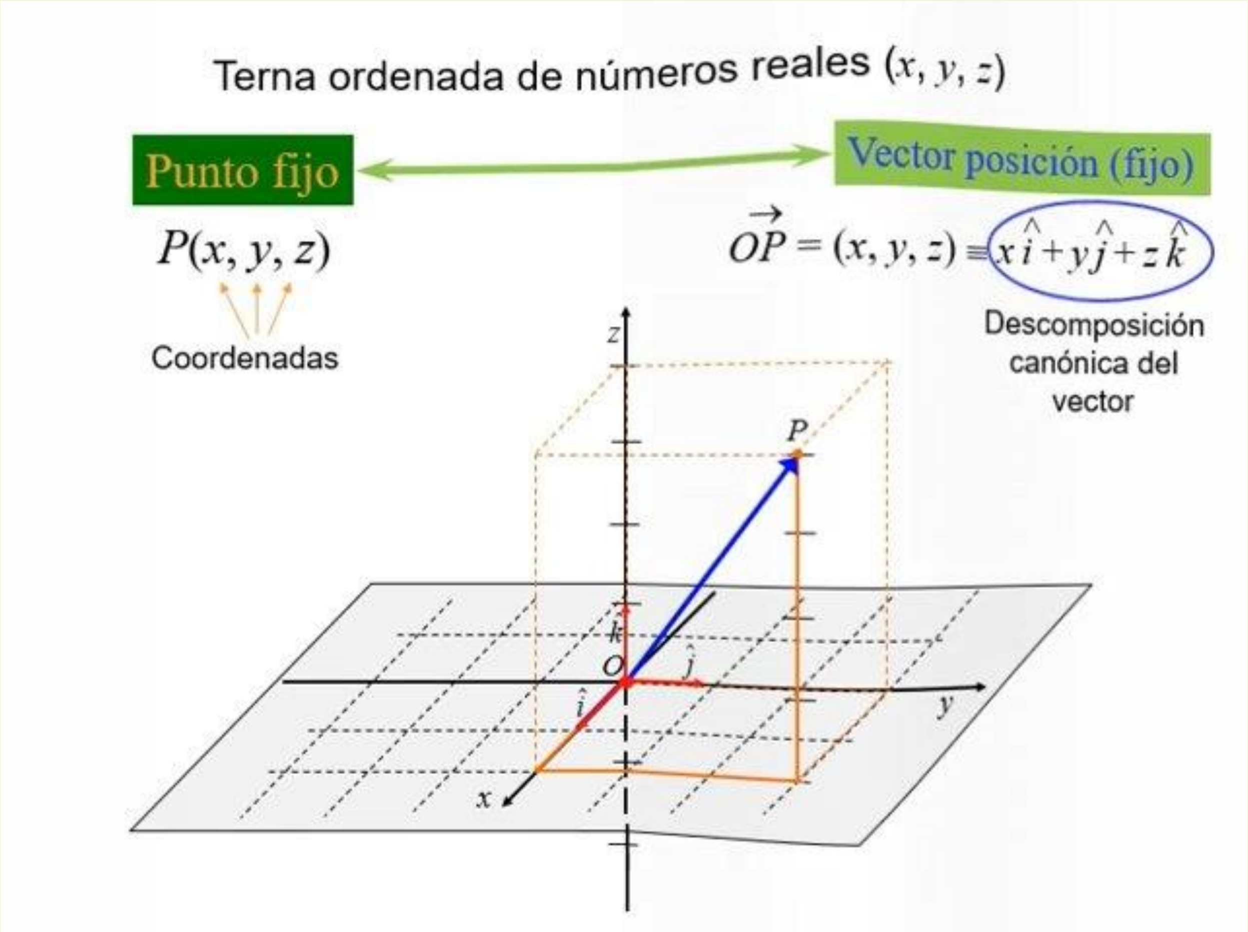
Cuyo origen es el origen de coordenadas y su extremo el punto P.





Todo punto $P(x, y, y) \in \ R^3$ tiene asociado un vector posición $\overline{OP}$

Cuyo origen es el origen de coordenadas y su extremo el punto P.



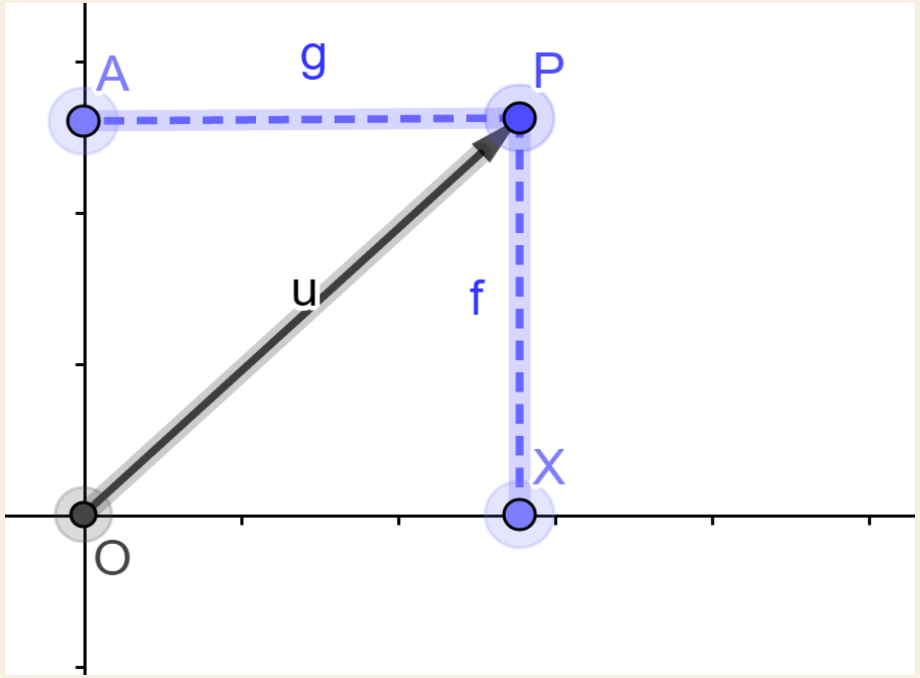
La dirección de un vector : queda definida por la recta donde esta incluido.

El sentido : lo indica la flecha cuando lo graficamos o la forma de escribirlo cuando usamos dos puntos.$\overline{AB}$

Módulo :es la longitud del segmento orientado desde el punto de vista geométrico.

Versor : vector de módulo 1

MÓDULO DE UN VECTOR EN R^2



$\overline{OP} = (x, y)$

Por ser O el origen de coordenadas:

$$|\overline{OX}| = x \quad y \quad |\overline{PX}| = y$$

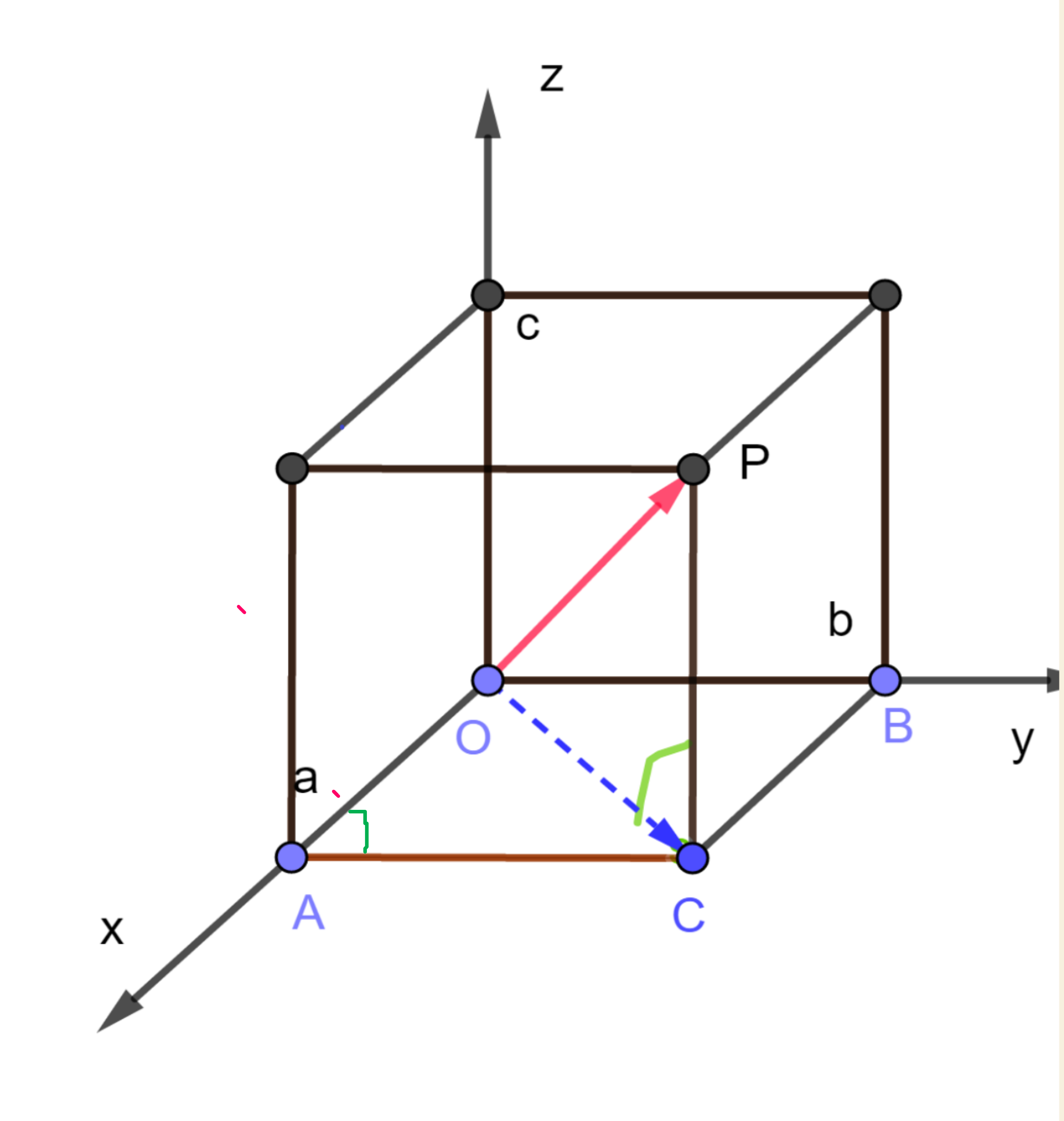
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OPX.

$$|\overline{OP}|^2 = |\overline{OX}|^2 + |\overline{PX}|^2$$

$$|\overline{OP}|^2 = x^2 + y^2$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

MODULO DE UN VECTOR EN R^3 $P(a,b,c)$



En AOC triángulo rectángulo en A

$|\overline{OA}| = a \quad y \quad |\overline{AC}| = |\overline{OB}| = b$

Por Pitágoras:

$$|\overline{OC}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

$$|\overline{OC}|^2 = a^2 + b^2$$

En OCP triángulo rectángulo en C

$|\overline{CP}| = c$

Por Pitágoras:

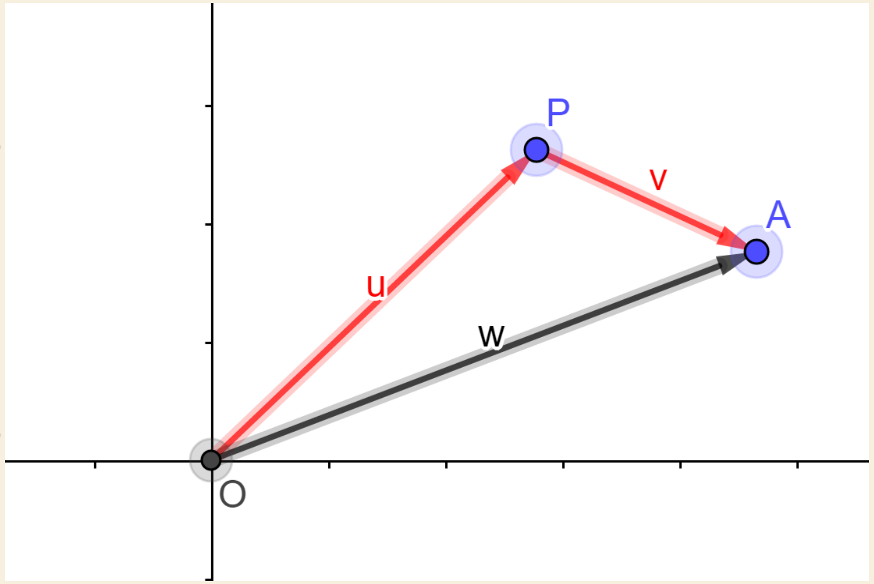
$$|\overline{OP}|^2 = |\overline{OC}|^2 + |\overline{CP}|^2$$

$$|\overline{OP}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\boxed{|\overline{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

OPERACIONES ENTRE VECTORES

- Suma en forma geométrica:
- Utilizaremos el método de la poligonal



$$\overline{OP} + \overline{PA} = \overline{OA}$$

- Suma en forma algebraica:
- Sumamos componente a componente:
- $\overline{OP} = (x, y)$
- $\overline{PA} = (a, b)$
- $\overline{OP} + \overline{PA} = (x + a, y + b)$
- $\overline{OA} = (x + a, y + b)$
- EN

EN ONE NOTE, EN NOTAS DE CLASE TIENEN EL GEOGEBRA

PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

Propiedades de la suma de dos vectores

P.1 Ley de composición interna: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}+\vec{b} \in \mathbf{R}^3$

P.2 Propiedad conmutativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

P.3 Propiedad asociativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

P.4 Elemento neutro: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \exists \vec{0} \in \mathbf{R}^3 /\ \vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$

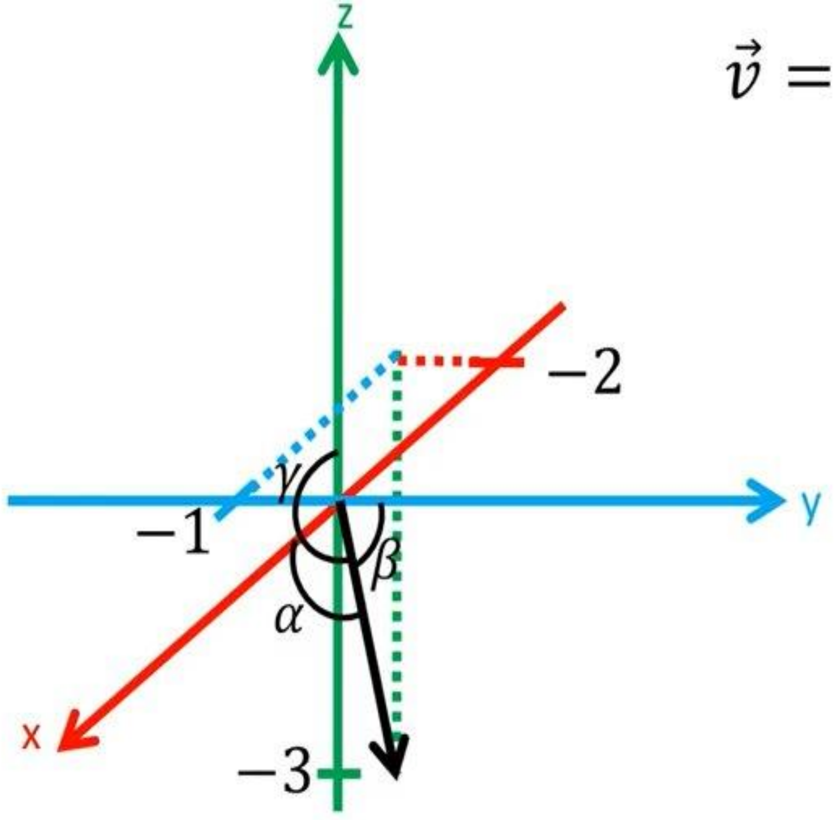
P.5 Elemento opuesto: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \exists (-\vec{a}) \in \mathbf{R}^3 /\ \vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$

Obs.: Estas propiedades de la suma también se verifican en $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R}^3$ cambiarlo por $\mathbf{R}^2$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

a)ÁNGULOS DIRECTORES

NOS DAN EL ÁNGULO QUE EL VECTOR FORMA CON CADA UNO DE LOS EJES POSITIVOS.

NOS PERMITEN CONOCER LAS COMPONENTES DE UN VECTOR.



$$\vec{v} = \boldsymbol{-2\breve{\imath} - \breve{\jmath} - 3\breve{k}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\alpha} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

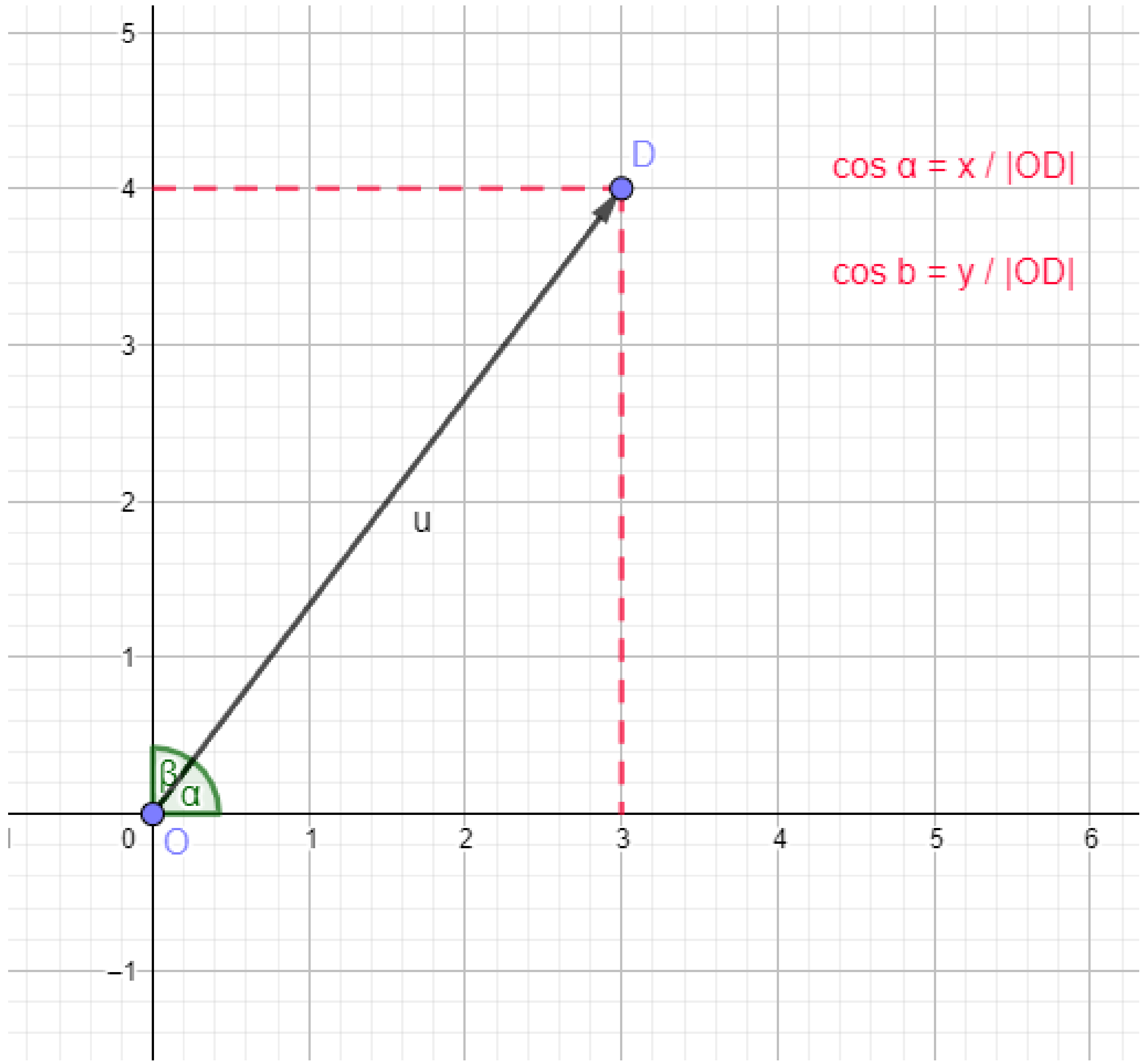
$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\beta} = \frac{-1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{v}|} \qquad \cos\hat{\gamma} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

La suma de los cosenos directores al cuadrado es 1.

COSENOS DIRECTORES EN R^2

NOS DAN EL ÁNGULO QUE EL VECTOR FORMA CON CADA UNO DE LOS EJES POSITIVOS.



APORTAN OTRA FORMA DE DEFINIR LAS COMPONENTES DE UN VECTOR.

$$\overline{OP} = (x, y, z) \quad en\ forma\ de\ terna$$

$$\overline{OP} = x\check{\imath} + y\check{\jmath} + z\check{k} \quad en\ forma\ cartesiana\ usando\ los\ versores\ canónicos$$

$$\overline{OP} = (\ cos\hat{\alpha}\ |\overline{OP}|\ , cos\hat{\beta}\ |\overline{OP}|, \cos\hat{\gamma}\ |\overline{OP}| \quad)\ utilizando\ cosenos\ directores$$

ENTONCES UNVERSOR NOS INFORMA EL COSENO DIRECTOR

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

$$\bar{v} \in R^2 \; o \; R^3 \; , \forall \lambda \in R \; \therefore \lambda\bar{v} \; es \; un \; vector$$

Al vector $\lambda\bar{u}$ se lo llama múltiplo escalar de $\bar{u}$

Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro

$$\bar{u} \parallel \bar{v} \Leftrightarrow \exists \, \lambda \in R / \bar{u} = \lambda\bar{v} \; siendo \; \bar{u} \neq \bar{o} \; y \; \bar{v} \neq \bar{o}$$

EN ONE NOTE EN NOTAS DE CLASE TIENEN UN

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Propiedades para el producto de un escalar por un vector

P.1 Ley de composición externa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda\vec{a} \in \mathbf{R}^3$

P.2 Notación: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$

P.3 Propiedad asociativa mixta: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R},\ \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda \cdot \mu)\vec{a}$

P.4 Observación: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}\ \forall \lambda \in \mathbf{R};\ 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}\ \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3$

P.5 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R} - \{\vec{0}\},\ \lambda\vec{a} \| \vec{a}$; $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$; si $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$

si $\lambda < 0$, $\lambda\vec{a}$ tiene el sentido opuesto a $\vec{a}$

P.6 Propiedades distributivas: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$

P.6.1 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ **P.6.2** $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

Obs.: estas propiedades del producto de un escalar por un vector también se verifican en $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R}^3$ cambiarlo por $\mathbf{R}^2$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

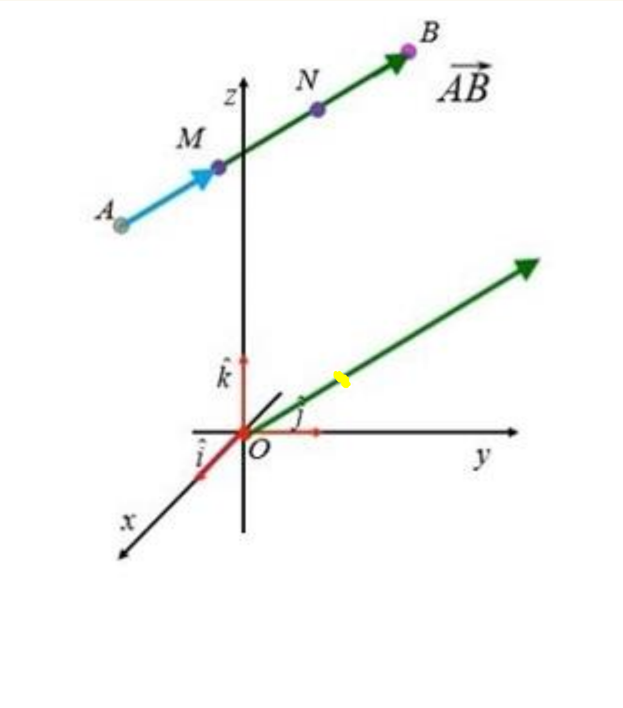
También lo podemos utilizar para particionar un segmento.

Identificar puntos particulares en un segmento

Trisección de un segmento $\overline{AB}$ $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$

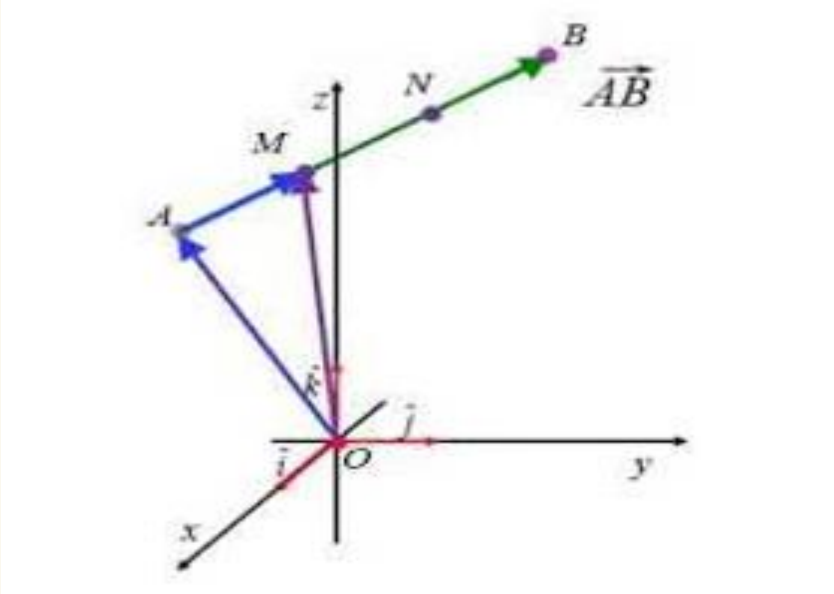
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Vector libre



$M \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}$

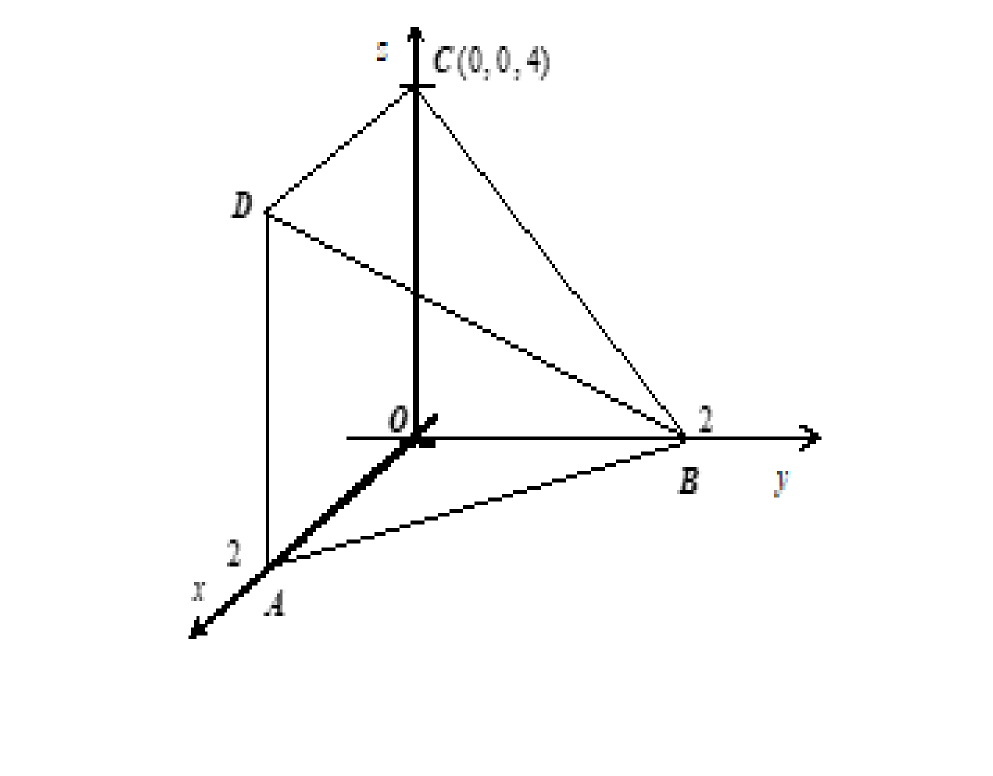
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$



EJERCICIOS

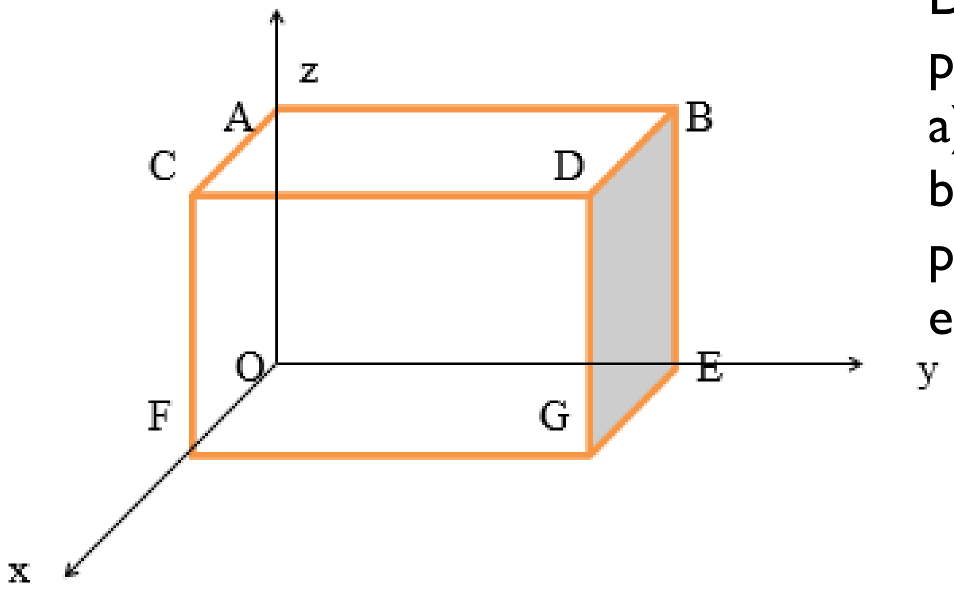
$\overline{AB}$

1) Sea el cuerpo con vértices en *OABCD* tal como lo muestra la figura de análisis –*D* es un punto del plano *xz*; *B* pertenece al eje *y*



a) Dar las características de los puntos ubicados en la cara OCDA
b) Si a dicha cara la giramos 90^0 en sentido antihorario, que cambiaría en los puntos?
c) Dar las características de los vértices A, B y D y las componentes de los vectores $\overline{OD}\ y\ \overline{AB}$
d) Hallar un vector de módulo 3 paralelo al vector $\overline{DB}$ pero de sentido contrario.

Ejercicio 2



Dado el siguiente paralelepípedo donde el punto D(2,5,3):

a) Hallar las coordenadas de sus vértices.

b) Dar las componentes de sus 4 diagonales principales y trata de encontrar una relación entre ellas.

c) Dar las componentes del vector $\overline{OG}$ usando sus cosenos directores.

d) Hallar un vector paralelo al $\overline{OG}$ que pertenezca a la cara ABCD.

e)Calcular $\frac{1}{2}\overline{OG} + \overline{GD} - \frac{1}{2}\overline{OA}$