Trabajo Práctico 8. Prueba de Hipótesis

Nomenclatura

H_0: Hipótesis nula. H_1: Hipótesis alternativa (o de investigación).

Los cuatro resultados posibles de las decisiones en la prueba de hipótesis:

		La verdadera situación puede ser	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Acción	No rechazar H_0	Decisión correcta	Decisión incorrecta (error de tipo II)
	Rechazar H_0	Decisión incorrecta (error de tipo I)	Decisión correcta

La probabilidad de cada uno de los cuatro resultados posibles en la prueba de hipótesis:

		La verdadera situación puede ser	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Acción	No rechazar H_0	$1-\alpha$ (Nivel de confianza)	β
	Rechazar H_0	α (Nivel de significación)	$1-\beta$ (Potencia de la prueba)

Error tipo I: rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera.
Error tipo II: no rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es falsa.
α = Nivel de significación = P(error de tipo I) = P(se rechaza H_0/H_0 es verdadera)
$1-\alpha$ = Nivel de confianza = $1-P$(error de tipo I) = P(no se rechaza H_0/H_0 es verdadera)
$\beta = P$(error de tipo II) = P(no se rechaza H_0/H_0 es falsa)
$1-\beta$ = Potencia de la prueba = $1-P$(error de tipo II) = P(se rechaza H_0/H_0 es falsa)

Pasos que es conveniente formalizar en una prueba de hipótesis:

1) Identificar el parámetro de interés en la situación del problema.
2) Plantear las hipótesis nula y alternativa.
3) Determinar el estadístico adecuado para la prueba (ver apéndice).
4) Determinar la región de rechazo de la hipótesis nula para el nivel de significación seleccionado α.
5) Calcular el valor del estadístico correspondiente a la muestra.
6) Tomar la decisión estadística sobre si H_0 debe ser o no rechazada, y establecer esta conclusión en el contexto del problema.

Nota. A menos que se indique lo contrario, en esta guía los problemas de control (ej. de procesos de producción, de aceptación de lotes de mercadería,…) tendrán una hipótesis *optimista* (esto es suponiendo en principio que el proceso productivo trabaja correctamente, que el lote cumple los requerimientos deseados). Los problemas de inversión con riesgo económico alto tendrán una hipótesis *pesimista*. En cambio, si en la compra de un nuevo equipo o en la modificación de un proceso, el objetivo es un abaratamiento de costos y no de lograr una mejora de rendimiento o de eficiencia, entonces la hipótesis a plantear puede ser optimista o pesimista.

Ejercicio 1. El control de recepción de las partidas de un tipo de hilo de coser industrial se realiza pesando una muestra de 10 ovillos de cada partida, rechazando la partida si el peso medio de la muestra resulta inferior a cierto valor crítico. El valor mínimo admisible del peso medio de los ovillos de toda la partida es de 250,0 gramos y se establece que la probabilidad máxima de rechazar una partida que cumple con dicha especificación es de 0,05. Se sabe además, por disponer de registros históricos extensos, que el peso de un ovillo es una variable aleatoria con distribución normal y desvío estándar de 15,0 gramos. Plantear el test de hipótesis adecuado a esta situación indicando claramente la hipótesis nula y la alternativa, el nivel de significación, la región de rechazo y la regla de decisión. Indicar qué sucede con una partida de la que se extrajeron 10 ovillos cuyo peso promedio fue de 242,4 gramos.

Ejercicio 2. Un fabricante de caucho sintético declaró que la dureza promedio del caucho que produce es de 64,3 grados Shore. Como habría razones para pensar que con esta afirmación el fabricante daba un valor promedio poblacional inferior al real, se midió la dureza en 16 especímenes seleccionados al azar. El experimento proporcionó una dureza media muestral de 65,2 grados Shore. La experiencia previa indica que el desvío estándar de la variable aleatoria correspondiente a la dureza del caucho es de 2,0 grados Shore, y que esta variable puede considerarse normalmente distribuida. Usar un nivel de significación de 0,05 para decidir si debe rechazarse la declaración del fabricante. Plantear claramente la prueba de hipótesis correspondiente.
Información técnica adicional: Las mediciones de dureza de los materiales se realizan con procesos estáticos o dinámicos. Todos se refieren al mismo principio: un cuerpo penetrador es presionado continuamente en el material con una fuerza de prueba determinada. En los procesos dinámicos se hace chocar un cuerpo penetrador en la parte a medir con una energía cinética desde un intervalo definido. Entre estos últimos se encuentra la medición Shore. Se determina la altura de rebote de un cabezal bulón que cae en la superficie de la prueba desde una altura de 250 mm; 177 mm de altura de rebote corresponden a 100 unidades o grados Shore.

Ejercicio 3. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal de población con valor conocido de σ.

a) Para probar la hipótesis nula H_0: $\mu=\mu_0$ contra la hipótesis alternativa H_1: $\mu>\mu_0$ (donde μ_0 es un número fijo), demostrar que la prueba con estadístico de prueba $\overline{X}$ y región de rechazo $\overline{X} \geq \mu_0 + 2{,}327\sigma/\sqrt{n}$ tiene nivel de significación 0,010.

b) Supongamos que el procedimiento de la parte (a) se utiliza para probar la hipótesis nula H_0: $\mu\leq\mu_0$ contra la hipótesis alternativa H_1: $\mu>\mu_0$. Si $\mu_0=100$, $n=25$ y $\sigma=5$, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error tipo I si fuese $\mu=99{,}5$?, ¿y si fuese $\mu=99{,}0$? En general, ¿qué se puede decir acerca de la probabilidad de un error tipo I cuando el valor real de μ es menor que μ_0?

Ejercicio 4. La calibración de una balanza debe verificarse al pesar 25 veces un espécimen de prueba de 10 *kg*. Se supone que los resultados de diferentes pesadas, $\{X_1; X_2;\ldots; X_{25}\}$, son independientes entre sí y que el peso en cada intento está normalmente distribuido con $\sigma=0{,}200\,kg$. Sea μ el verdadero promedio de lectura de peso de la balanza.

a) ¿Cuáles hipótesis deben plantearse?

b) Si la balanza debe recalibrarse cuando $\overline{X} \geq 10{,}1032\,kg$ o $\overline{X} \leq 9{,}8968\,kg$, ¿cuál es la probabilidad de que la recalibración se realice cuando en realidad no es necesaria? ¿A qué tipo de error corresponde esa probabilidad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la recalibración se considere innecesaria cuando de hecho $\mu=10{,}1\,kg$? ¿Cuál cuando $\mu=9{,}8\,kg$? ¿A qué tipo de error corresponde esas probabilidades?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que se considere necesaria la recalibración cuando $\mu=10{,}2\,kg$? ¿Constituye este resultado una probabilidad de error? Explicar.

e) Sea $Z=(\overline{X}-10)/(\sigma/\sqrt{n})$. ¿Para qué valor c es la región de rechazo de la parte (b) equivalente a la región de dos colas, ya sea $z \geq c$ o $z \leq -c$?

f) Si el tamaño de la muestra fuera sólo 9 en lugar de 25, ¿cómo se alteraría el procedimiento de la parte (b) para que α=0,05?

g) Mediante el uso de la parte (f), ¿qué se concluye de los siguientes datos muestrales? Datos: 9,981; 10,006; 10,107; 9,888; 9,793; 9,728; 10,439; 10,214; 10,190 todos en *kg*.

Ejercicio 5. El capataz de una planta de coque ha recibido varias quejas con respecto a la calidad del coque tamizado estándar nº 5. Se sugiere que la causa puede ser el factor de porosidad, *X*, medido en diferencias de peso en gramos entre coque seco y mojado. Los envíos se compraron con la afirmación del productor de que el factor de porosidad media es de $900g$. Desde el punto de vista del productor, tanto los factores de porosidad grandes como los pequeños son indeseables. Se sabe por experiencia previa que *X*, que puede suponerse normal, tiene un desvío estándar de $72g$. Habiéndose tomado una muestra al azar de tamaño 25 se obtuvo un factor de porosidad promedio de $922{,}00g$.

a) Probar la hipótesis de que los envíos realmente concuerdan con la declaración del fabricante al nivel de 0,05.

b) ¿Ofrece la selección del tamaño muestral una buena protección contra el no rechazo de la hipótesis cuando en realidad el promedio verdadero es tan grande como $950g$ o tan pequeño como $850g$?

Ejercicio 6. Una empresa desea iniciar una campaña de ventas de aparatos de TV en cierta región. Se considera que la decisión de comenzar la campaña debe estar relacionada con los ingresos medios mensuales por familia, de modo que será afirmativa si éstos son iguales o superiores al triple de un sueldo mínimo, vital y móvil (3*SMVM) expresado en pesos, y negativa cuando los ingresos no lleguen a esa suma. Un punto de vista respecto del error de tipo I es que la empresa desea evitar el error de no empezar la campaña cuando debería hacerlo, no quiere perder la oportunidad de ganar dinero. El otro punto de vista es que la empresa desea evitar el error que supone iniciar la campaña cuando no deba hacerlo, si las familias no tienen suficiente dinero se deben evitar las pérdidas que acarrea una campaña inútil de ventas.

Se supone que los ingresos familiares tienen una distribución aproximadamente normal y el desvío poblacional es del 25% del SMVM expresado en pesos.

Observación: tomar el valor de SMVM que corresponde al momento de resolver el ejercicio.

a) Se extrae una muestra de 100 personas. Elaborar la regla de decisión con un nivel de significación de 0,05 de la hipótesis nula H_0: μ=3*SMVM frente a la alternativa H_1: μ<3*SMVM. Calcular la probabilidad β del error de tipo II de esta regla de decisión cuando el verdadero valor es μ=2,9*SMVM. Construir en forma aproximada el gráfico de β en función de μ (curva OC).

b) Si se supone que la empresa desea evitar el error que supone empezar la campaña de ventas cuando no debe hacerlo, esto es tratar de evitar las pérdidas monetarias que origina una campaña de ventas inútil, en este caso las hipótesis nula y alternativa son de la hipótesis nula H_0: μ=3*SMVM frente a la alternativa H_1: μ>3*SMVM. Está claro que el error de tipo I es el que supone empezar la campaña cuando no debe hacerse, y el error de tipo II es el que aparece cuando no se empieza debiéndose hacer. Obtener la regla de decisión para los mismos valores de α, n y σ. Construir en forma aproximada la curva OC.

Ejercicio 7. En un proceso habitual para fabricar cuerdas de nylon la resistencia a la ruptura es una variable aleatoria normal con media $500\,kg$ y desviación estándar $100\,kg$. Se introduce un nuevo proceso que se supone aumentará la resistencia media a la ruptura. El proceso se considerará mejor cuando la resistencia media a la ruptura de una muestra de tamaño n sea por lo menos $515{,}0\,kg$. Suponiendo que en el nuevo proceso la resistencia a la ruptura es normal con la misma desviación típica que en el proceso antiguo, ¿qué tamaño de la muestra n se debe escoger al examinar el nuevo proceso si se desea que sólo se tenga un probabilidad 0,05 de que no se adopte el nuevo proceso aún cuando produzca cuerdas con resistencia a la ruptura media poblacional de $530\,kg$. Justificar la respuesta detallando la prueba de hipótesis correspondiente.

Ejercicio 8. El proceso por el que se obtiene gasolina a partir de petróleo crudo en una refinería tiene un rendimiento (expresado en porcentaje de crudo) que se distribuye de manera aproximadamente normal con media 24,6 y desvío estándar 2,3. El gerente modificará el proceso sólo si el nuevo proceso aumenta el rendimiento con respecto al proceso en uso. Diseñar una prueba adecuada para que la probabilidad de concluir que se produjo el aumento deseado si la media se mantiene en 24,6 sea de 0,050, mientras que la probabilidad de implementar el nuevo proceso en el caso de que la media alcanzara a 28,2 sea de 0,985. Indicar las hipótesis nula y alternativa, definir el estadístico de prueba, determinar el tamaño de la muestra y señalar la zona de rechazo de la hipótesis nula.

Ejercicio 9. El consumo de combustible de un automóvil para un determinado recorrido, es una variable aleatoria de la cual se ha tomado una importante cantidad de datos los cuales permiten suponer que dicha variable tiene distribución normal con media de 11,2 litros y desvío estándar de 1,3 litros. Se desea ensayar el efecto de un nuevo aditivo con el que se espera reducir el consumo medio y, de confirmarse esta suposición, se lanzará al mercado. Dados los costos implicados este cambio se considera una inversión con riesgo económico y, para efectuarla, se debe tener una seguridad razonable de que el producto cumple con lo requerido, que es disminuir el costo de combustible. A tal efecto se realiza una prueba preliminar en la cual, sobre 12 corridas –de igual recorrido– se registró un consumo medio de 10,7 litros. Parece razonable asumir que el desvío estándar no se modificará.

- **a)** Plantear las hipótesis del test y hallar el valor P para el resultado obtenido en la prueba.
- **b)** ¿El resultado de la prueba ha sido concluyente como para tomar la decisión de lanzar el producto al mercado si se establece un porcentaje de riesgo del 5% de lanzar el producto cuando no produce el efecto deseado?

Nota: El **valor *P*** (o nivel de significación a posteriori) es el mínimo nivel de significación al que H_0 sería rechazada cuando se utiliza un procedimiento de prueba especificado en un conjunto dado de información. Una vez que el valor P se haya determinado, la conclusión en cualquier nivel α particular resulta de comparar el valor P con α: si $\alpha \geq P$, entonces se rechaza H_0 al nivel α; si $\alpha < P$, entonces no se rechaza H_0 al nivel α.

Ejercicio 10. Sea una prueba de hipótesis de nivel de significación α para la media μ de una población normal con desvío estándar conocido σ a partir de una muestra de tamaño n. Si la hipótesis nula es H_0: $\mu=\mu_0$,

- **a)** demostrar que la probabilidad $\beta=\beta(\mu_v)$ de cometer error tipo II está dada por las expresiones resumidas en la siguiente tabla para los distintos casos de hipótesis alternativa.

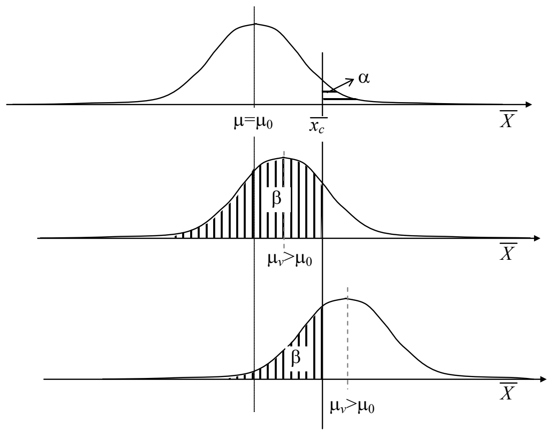
Hipótesis alternativa	Probabilidad $\beta(\mu_v)$ del error tipo II
H_1: $\mu>\mu_0$	$\Phi\left(z_\alpha + \dfrac{\mu_0-\mu_v}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$	$1-\Phi\left(-z_\alpha + \dfrac{\mu_0-\mu_v}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} + \dfrac{\mu_0-\mu_v}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \dfrac{\mu_0-\mu_v}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

- **b)** Deducir que el tamaño muestral n para que la prueba mantenga su nivel de significación α y tenga un valor $\beta(\mu_v) = \beta$ en el valor alternativo μ_v es:

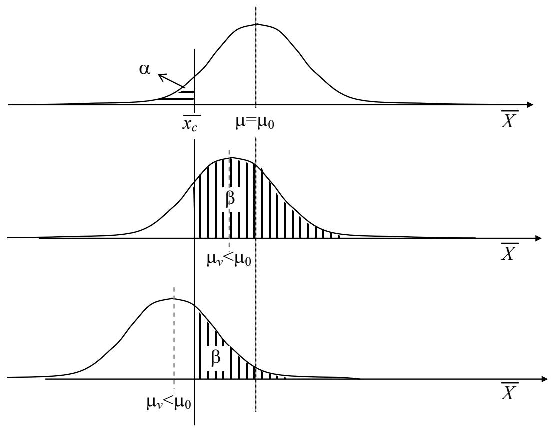
$n=\left[\dfrac{\sigma(z_{\alpha}+z_{\beta})}{\mu_0-\mu_v}\right]^2$	para una prueba de una cola (superior o inferior)
$n=\left[\dfrac{\sigma(z_{\alpha/2}+z_{\beta})}{\mu_0-\mu_v}\right]^2$	para una prueba de dos colas (solución aproximada)

Nomenclatura. Z variable normal estándar; $\Phi(z)=P(Z\le z)$; $\Phi(z_{\alpha})=1-\alpha \Rightarrow P(Z>z_{\alpha})=\alpha$.

Test de una cola

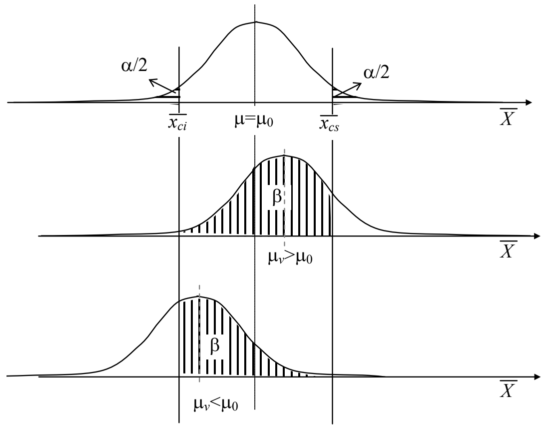


H0: $\mu=\mu_0$; H1: $\mu>\mu_0$



H0: $\mu=\mu_0$; H1: $\mu<\mu_0$

Test de dos colas



Ejercicio 11. Las piezas producidas por dos máquinas de herramientas se encuentran en el almacén de un taller metalúrgico. La dimensión principal de una de estas piezas es una variable aleatoria normal con parámetros μ_1=10,20 *mm* y σ_1=0,45 *mm* para la máquina 1, y μ_2=10,40 *mm* y σ_2=0,55 *mm* para la máquina 2.

Se ha recibido un pedido por 2500 piezas y se preparó con todas la piezas producidas por una misma máquina, perdiéndose el dato de que máquina era. Para recuperar esa información se decide realizar una prueba de hipótesis sobre la dimensión media de las piezas del pedido preparado basado en la dimensión media de las piezas de una muestra. Diseñar la prueba de tal manera que la probabilidad de decidir que las piezas son de una máquina cuando en realidad no lo son, es la misma para ambas máquinas. Determinar el tamaño de la muestra necesario para que la probabilidad de cometer cualquiera de los errores indicados no supere a 0,05.

Ejercicio 12. Un fabricante de fusibles asegura que con una sobrecarga del 20% sus fusibles se fundirán al cabo de 12,40 minutos de promedio (como mínimo). Para comprobar esta afirmación, una muestra de n=20 de los fusibles fue sometida a una sobrecarga de un 20% y los tiempos que tardaron en fundirse tuvieron una media muestral $\overline{x}$ de 10,63 minutos y un desvío estándar muestral

s de 2,48 minutos. Si se supone que los datos constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal, ¿tienden a apoyar o refutar la afirmación del fabricante, a un nivel de significación del 0,01? ¿Y a un nivel del 0,001? Plantear la prueba de hipótesis correspondiente y determinar la región de rechazo.

Ejercicio 13. Se vende una marca especial de cemento en bolsas de $50\,kg$. Se eligieron 11 de ellas al azar y se observa que su peso en *kg* es: 49,2; 50,1; 49,8; 49,7; 50,1; 50,5; 49,6; 49,9; 50,4; 50,2; 49,7. Si se supone que las bolsas pertenecen a una población normal, ¿son los resultados obtenidos congruentes con la presunción de que el valor medio poblacional es $50\,kg$? Tomar el nivel de significación α=0,10.

Ejercicio 14. Un fabricante de lámparas eléctricas ha desarrollado un nuevo proceso de producción que él espera aumentará la eficiencia (se supone una variable aleatoria con distribución normal) media (en lumen/watt) de su producto que hasta el momento es de 9,5. Los resultados de un experimento realizado sobre 10 lámparas fueron: 9,28; 10,25; 11,52; 13,02; 11,58; 9,97; 11,46; 12,05; 9,87; 10,85. ¿Debe el fabricante concluir que la eficiencia aumentó a un nivel de significación 0,05?

Ejercicio 15. El ajuste de profundidad de determinado taladro de columna es de 2" (2 pulgadas). Se supone que la profundidad promedio de todos los agujeros barrenados por esta máquina es μ=2", considerándose nocivo que difiera por exceso o por defecto de dicho valor. Para comprobar esta hipótesis sobre el promedio, se midió una muestra aleatoria de n=100 agujeros barrenados por esa máquina y se encontró un promedio de muestra $\bar{x} = 2{,}005''$ con una desviación estándar muestral s=0,030". A un nivel de significación α=0,10, ¿se puede rechazar la hipótesis nula en base a los datos aportados por la muestra? Plantear claramente todos los pasos de la prueba de hipótesis y justificar los supuestos bajo los cuales se trabaja.

Ejercicio 16. Una empresa de transporte desconfía de la afirmación de que la vida útil promedio de ciertos neumáticos es al menos de 28000 millas. Para verificar la afirmación se colocan n=40 de estos neumáticos en sus camiones y se obtiene de esta muestra una vida útil promedio de 27463 millas con una desviación estándar de 1348 millas. ¿Qué conclusión puede extraerse respecto de lo afirmado si la probabilidad del error del tipo I es a lo sumo α = 0,01? Plantear claramente todos los pasos de la prueba de hipótesis y justificar los supuestos bajo los cuales se trabaja.

Ejercicio 17. Se ha observado que la variabilidad del peso de los cospeles que se utilizan en máquinas expendedoras automáticas afecta el comportamiento de las mismas. Para que las máquinas expendedoras funcionen correctamente el desvío estándar deber ser menor que $60\,mg$. Los pesos, en gramos de 14 cospeles de una muestra provista por la empresa A son: 4,07; 4,10; 4,12; 4,13; 4,13; 4,14; 4.15, 4,24; 4,26; 4,24; 4,25; 4,20; 4,20; 4,28. Se supone que el peso de los cospeles es una variable aleatoria con distribución normal. A un nivel de significación de 0,05, ¿es aconsejable comprar los cospeles de la empresa A?

Ejercicio 18. La varianza del índice de refracción de una clase de cristales se sabe, por experiencia, que es $\sigma^2 = 1{,}26 \times 10^{-4}$. La empresa rechaza una de tales entregas si en un ensayo de n=20 cristales la varianza muestral supera $s^2 = 2{,}00 \times 10^{-4}$. Suponiendo que los valores muestrales pueden considerarse como una muestra aleatoria de una población normal, ¿cuál es la probabilidad de que la entrega sea rechazada a pesar de que $\sigma^2 = 1{,}26 \times 10^{-4}$?

Ejercicio 19. En cierto mercado se desea investigar el consumo de jabón Xul. Sea p la proporción de consumidores de dicho jabón. Si p es menor que 0,30, la gerencia de ventas aumenta la publicidad, mientras que si es más de 0,30, deja la publicidad en el nivel actual. La gerencia está interesada en evitar el error (controlar que se mantenga bajo) de no hacer publicidad cuando debería hacerla. ¿Qué hipótesis se debería plantear para tomar una decisión al respecto si la misma se basará en una encuesta realizada sobre una muestra aleatoria de n clientes?

Ejercicio 20. Una empresa manufacturera ha declarado que el 90% de los artículos de cierto proceso son no defectuosos. Se implementa un proceso que se supone aumentará el porcentaje de no defectuosos. Una muestra de 100 artículos producidos con el nuevo proceso dio por resultado 7 artículos defectuosos. ¿Apoya esta evidencia muestral que el nuevo proceso es significativamente mejor a un nivel 0,05?

Ejercicio 21. En un experimento para determinar la efectividad de un nuevo medicamento, se ensaya en 400 pacientes que sufren la afección que este medicamento dice curar. Si más de 300 pero menos de 340 pacientes se curan se concluye que el medicamento tiene una efectividad del 80%.

a) Determinar la probabilidad de cometer error de tipo I.

b) ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error de tipo II si el nuevo medicamento tiene una efectividad del 70%?

Ejercicio 22. Con fines competitivos, el directorio de una empresa que produce una gaseosa de marca muy conocida piensa en la posibilidad de modificar ligeramente su sabor. El cambio se implementará sólo si hay evidencia significativa de que más del 85% ($p>0{,}85$) de sus habituales consumidores lo aprobarán. El estudio de mercado se lleva a cabo sobre la base de una muestra aleatoria de 500 de tales consumidores que deberán expresar su opinión favorable o no al cambio.

a) ¿Cuántos encuestados, por lo menos, deberán aprobar el cambio para que el directorio tome la decisión de implementarlo si desea estar un 99% confiado de que no se equivocará al hacerlo?

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directorio decida no innovar aun cuando el 90% de los consumidores habituales aprobara el cambio?

c) ¿Cuántos encuestados más deberá consultarse si se desea mantener el nivel de significación del test y llevar la probabilidad de que se decida no innovar aun cuando el 90% de los consumidores habituales aprobara el cambio a 0,10?

Ejercicio 23. Sea una prueba de hipótesis de nivel de significación α para una muestra grande de tamaño n en relación con la proporción poblacional p que cumple determinada característica. Si la hipótesis nula es H_0: $p=p_0$,

a) demostrar que la probabilidad $\beta=\beta(\mu_v)$ de cometer error tipo II está dada por las expresiones resumidas en la siguiente tabla para los distintos casos de hipótesis alternativa.

Hipótesis alternativa	Probabilidad $\beta(p_v)$ del error tipo II
H_1: $p>p_0$	$\Phi\left(\dfrac{p_0-p_v+z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p_v(1-p_v)/n}}\right)$
H_1: $p<p_0$	$1-\Phi\left(\dfrac{p_0-p_v-z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p_v(1-p_v)/n}}\right)$
H_1: $p\neq p_0$	$\Phi\left(\dfrac{p_0-p_v+z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p_v(1-p_v)/n}}\right)-\Phi\left(\dfrac{p_0-p_v-z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p_v(1-p_v)/n}}\right)$

b) Deducir que el tamaño muestral n para que la prueba mantenga su nivel de significación α y tenga un valor $\beta(p_v)=\beta$ en el valor alternativo p_v es:

$n=\left[\dfrac{z_{\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)}+z_{\beta}\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_v-p_0}\right]^2$	para una prueba de una colas (superior o inferior)
$n=\left[\dfrac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)}+z_{\beta}\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_v-p_0}\right]^2$	para una prueba de dos colas (solución aproximada)

Observación: estos procedimientos de prueba son válidos siempre que $np_0 \geq 5$ y $n(1-p_0)\geq 5$.

Ejercicio 24. Una línea aérea ha desarrollado un plan para un club del viajero ejecutivo, sobre la premisa de que a los sumo el 5% de sus actuales clientes llenarían los requisitos para ser socios. Una muestra aleatoria de 500 clientes dio 40 que llenarían los requisitos.

a) Con estos datos poner a prueba, al nivel de significación 0,01, la hipótesis nula de que la premisa de la compañía es correcta contra la alternativa de que no es correcta.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que cuando se utilice la prueba de la parte a), la premisa de la compañía se juzgue correcta cuando de hecho el 10% de todos los clientes actuales llenan los requisitos?

c) ¿Qué tamaño muestral sería suficiente para asegurar que el nivel de significación y la probabilidad de la parte b) son 0,01?

Ejercicio 25. El dueño de un supermercado cambiará sus máquinas registradoras por unas nuevas si estas le permiten ahorrar en promedio más de 3 minutos en cada operación. Está dispuesto a correr el riesgo, con probabilidad 0,01, de comprar las nuevas máquinas si el ahorro es solo de 3 minutos. Se sabe que el tiempo empleado en cada operación, con las registradoras actuales, se distribuye normalmente con un desvío estándar de 0,55 minutos. Se supone además que este tiempo no cambiará, tanto en su distribución normal como en su desvío estándar, con las nuevas registradoras. Una muestra de 25 operaciones con las registradoras actuales produjo una media de 6 minutos. Se hizo una prueba con las máquinas nuevas obteniéndose una media de 2,5 minutos con 16 operaciones. ¿Qué se aconsejaría al dueño del supermercado?

Ejercicio 26. Dos técnicos de control de calidad miden el acabado de la superficie de una pieza metálica, obteniendo los siguientes resultados:

Técnico 1: 1,45; 1,37, 1,21; 1,54; 1,48; 1,29; 1,34.

Técnico 2: 1,54; 1,41; 1,56; 1,37; 1,20; 1,31; 1,27; 1,35.

Determinar si existe diferencia significativa entre las medias obtenidas con α=0,05. Se supone que el acabado de la superficie es una variable aleatoria con distribución normal.

Ejercicio 27. Una muestra de 100 lámparas eléctricas de la marca La Luminosa dio una duración media de 1190 horas y una desviación típica de 90 horas. Una muestra de 75 lámparas de la marca Lumen dio una media de 1230 horas con una desviación típica de 120 horas.

a) ¿Hay diferencia entre las duraciones medias de las lámparas de las dos marcas al nivel de significación del 0,05? ¿Y del 0,01? ¿Es necesario que la duración de las lámparas tenga una distribución normal para realizar este planteo? Justificar.

b) Ensayar la hipótesis alternativa de que las lámparas de la marca Lumen son mejores que La Luminosa a los niveles de significación del 0,05 y del 0,01.

Problemas de Planteo Integrador

Problema A. Se recibe una caja con 10 unidades de una pieza y se desea ensayar la hipótesis H_0: “las diez piezas son buenas”, extrayendo una única unidad de la caja. La condición de rechazo, obvia, es que la pieza extraída sea defectuosa. Si la pieza extraída es buena, no se puede rechazar la hipótesis nula.

- **a)** Escribir una hipótesis alternativa H_1 razonable en el contexto del problema planteado.
- **b)** Calcular la probabilidad de cometer error de tipo II (β) para las alternativas de que haya 1, 2, …, K piezas defectuosas en la caja con K = 1; 2; …; 10.
- **c)** Graficar $\beta(K)$.

Problema B. Se tienen 3 cajas. La Caja 1 contiene 2 bolillas azules y 2 rojas; la Caja 2 contiene 3 bolillas azules y 1 roja; la Caja 3 está inicialmente vacía. Se extraen al azar de manera independiente una bolilla de la Caja 1 y una bolilla de la Caja 2, y se las coloca en la Caja 3. Se proponen dos hipótesis relativas a la Caja 3.

H_0: las dos bolillas son azules; H_1: al menos una de las bolillas no es azul.

El criterio para decidir entre una u otra hipótesis es el siguiente: se hacen dos extracciones con reposición de la Caja 3, y no se rechaza H_0 en caso de que en cada una las dos extracciones se obtenga una bolilla azul; se rechaza H_0 en caso contrario.

- **a)** Hallar las probabilidades correspondientes a los eventos: en la Caja 3 hay 2 bolillas azules, hay una bolilla de cada color, hay 2 bolillas rojas.
- **b)** ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar H_0 cuando H_1 es verdadera? ¿Esta decisión corresponde a un error o a un acierto? Si es a un error, ¿de qué tipo de error se trata?
- **c)** ¿Cuál es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera? ¿Esta decisión corresponde a un error o a un acierto? Si es a un error, ¿de qué tipo de error se trata?

Prueba de hipótesis para la proporción poblacional *p* basado en una muestra pequeña (fuera de programa)

Problema C. En un proceso de manufactura el parámetro de interés es la proporción p de artículos del total de producidos que no cumplen con condiciones especificadas. Se considera que si p no supera un valor p_0=0,10. el proceso es aceptable, mientras que si p resultara mayor que p_0 el proceso debe corregirse. Se toma una muestra al azar de 20 artículos provenientes del proceso de manufacturación y se inspeccionan. Si la cantidad de artículos que no cumplen con lo especificado en la muestra supera el valor 3, se determina que el proceso está fuera de control y se detiene.

- **a)** Detallar la prueba de hipótesis que conduce a esta región de rechazo.
- **b)** ¿Quién le parece que formula este test: el encargado usual de la línea o un inspector “mal predispuesto” con el sector?
- **c)** Determinar el nivel de significación del test.
- **d)** Trazar la curva de operación.
- **e)** Analizar las modificaciones que se producirían si la región de rechazo de H_0 establece que, si hay más de 4 artículos entre los 20 seleccionados se interfiere con el proceso.

Problema D. Se sabe que una gran remesa de voltímetros contiene cierta proporción p de defectuosos. Para probar H_0: p=0,2 contra H_1: p>0,2 se usa el siguiente método. Se obtiene una muestra de tamaño 5 y se cuenta X, el número de voltímetros defectuosos. Si $X \leq 1$, no se rechaza H_0, si X>4, se rechaza H_0; y si X=2,3 ó 4 se obtiene una segunda muestra de tamaño 5. Sea Y el número de instrumentos defectuosos en la segunda muestra. Se rechaza H_0 si $Y \geq 2$ y no se rechaza en caso contrario. Se supone que el lote muestreado es suficientemente grande de modo que pueda suponerse que X y Y son variables aleatorias independientes distribuidas binomialmente.

- **a)** ¿Cuál es la probabilidad de error tipo I?
- **b)** ¿Cuál es la probabilidad de error tipo II si p_v=0,5?