Trabajo Práctico 5. Variables aleatorias multidimensionales

Ejercicio 1. La calidad de un producto se determina de acuerdo al número de defectos que contiene. Sea X la variable aleatoria que representa el número de defectos por unidad. Estos productos son sometidos a revisión. Sea Y la variable aleatoria que representa el número de defectos por unidad detectados por el sistema de revisión. La distribución conjunta de probabilidades $p_{X,Y}$ se muestra en la tabla.

		y 0	1	2
	0	0,8148	0,0168	0,0084
x	1	0,0010	0,0980	0,0010
	2	0,0006	0,0012	0,0582

a) Calcular $P(X>Y)$, $P(X=Y)$ y $P(X<Y)$. Expresar en forma literal que representan cada uno de los eventos cuyas probabilidades se han calculado.

b) Encontrar la distribución marginal de X y la correspondiente a Y.

c) Determinar los valores esperados de X y de Y, y las dispersiones de dichas variables.

d) Evaluar las probabilidades condicionales definidas por $P(Y\leq X/X=1)$ y $P(Y\leq X/X\leq 1)$.

e) Hallar el valor esperado de $X-Y$.

f) ¿Son las variables X y Y independientes?

g) Hallar la matriz de covarianzas y el coeficiente de correlación de (X,Y).

Observación: la matriz de covarianzas de dos variables aleatorias X y Y es una matriz simétrica definida por

$$\begin{pmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix},$$

donde $Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$. El coeficiente de correlación está definido por

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

Ejercicio 2. Cierto supermercado tiene una caja de salida común y una caja rápida. Se representa con X a la variable aleatoria correspondiente al número de clientes que están esperando en la caja común en un momento particular del día, y con Y a la variable aleatoria que corresponde al número de clientes en la caja rápida al mismo tiempo. La distribución de probabilidad conjunta $p_{X,Y}(x;y)$se expresa en la siguiente tabla.

		y 0	1	2	3
	0	0,08	0,07	0,04	0,00
	1	0,06	0,15	0,05	0,04
x	2	0,05	0,04	0,10	0,06
	3	0,00	0,03	0,04	0,07
	4	0,00	0,01	0,05	0,06

a) ¿Cuál es $p_{X,Y}(1;1)=P(X=1;Y=1)$, esto es, la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada línea de espera?

b) ¿Cuál es $P(X=Y)$, esto es, la probabilidad de que los números de clientes de las dos líneas de espera sean iguales?

c) Sea A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. Expresar en términos de X y Y y calcular la probabilidad de este evento.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente cuatro? ¿Por lo menos cuatro?

e) Determinar la función de probabilidad marginal de X, $p_X(x)$, y luego calcular el número esperado de clientes de la línea de la caja común, $E[X]$. Efectuar el cálculo análogo para Y.

f) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes? Hallar el coeficiente de correlación.

g) ¿Cuál es el número esperado de clientes en espera entre las dos cajas, esto es $E[X+Y]$? ¿Cómo se calcula $V(X+Y)$?

Nota. Una representación gráfica de la distribución de probabilidad conjunta puede ser la siguiente.

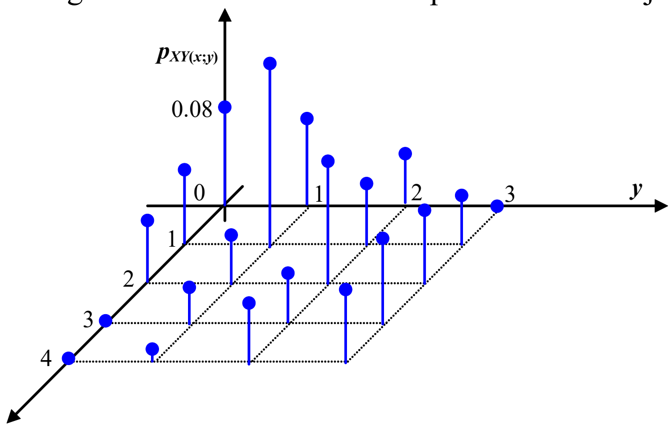


Figura Ejercicio 2. Representación gráfica de la distribución de probabilidad conjunta.

Ejercicio 3. Dada la variable aleatoria bidimensional definida por el conjunto de pares

$$\{(X;Y)\} = \{(-2;4);(-1;1);(1;1);(2;4)\}$$

tales que todos ellos tiene igual probabilidad 1/4,

a) obtener las distribuciones marginales de X y de Y.

b) Calcular $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$.

c) Verificar que X y Y no son variables aleatorias independientes (existe entre ellas una relación funcional sencilla).

d) Para la variable $W=X+Y$, hallar la tabla de distribución de probabilidad, el valor esperado y la varianza.

Ejercicio 4. El temario de un examen puede contener una, dos o tres preguntas con igual probabilidad (el que diseña el examen no tiene preferencia por ninguna de las tres modalidades). La probabilidad que se tiene de contestar mal una pregunta es 1/4, independientemente de cuantas preguntas haya y de cualquier otro factor que incida en las respuestas. Sea X la variable aleatoria que indica el número de preguntas que contiene el examen y sea Y la variable aleatoria que corresponde al número de preguntas que se contestan mal en el examen.

a) Esquematizar un diagrama de árbol que identifique la situación.

b) Hallar la probabilidad conjunta $p_{X,Y}(x;y)$. Presentar los resultados en una tabla.

c) ¿Son X y Y variables independientes?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que se conteste todo el examen en forma correcta, esto es que todas las preguntas que contenga el examen se contesten correctamente?

e) Si el criterio de aprobación del examen es el de contestar al menos una pregunta bien, ¿cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

f) Si el examen es de tres preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos respuestas erróneas? Expresar la pregunta en función de valores adecuados de las variables X y Y, con el formato apropiado.

g) Si el examen tiene exactamente dos respuestas erróneas, ¿cuál es la probabilidad de que el examen haya sido de tres preguntas? Expresar la pregunta en función de valores adecuados de las variables X y Y, con el formato apropiado.

h) Sea W la variable aleatoria correspondiente a la nota del examen que se asigna con el siguiente criterio: el número de respuestas correctas multiplicado por 10 y dividido por el número de preguntas totales en el examen. ¿Cuál es el valor esperado de W? ¿Cuál es su dispersión?

Ejercicio 5. Un juego consiste en lanzar dos dados no cargados y la suma de los números que salen determina la ganancia de los participantes. Las variables aleatorias X y Y representan, respectivamente, las ganancias de los jugadores primero y segundo. El primero cobra \$3 si la suma es 4, 5 ó 6 y paga \$2 si la suma es 11 ó 12; para el resto de los posibles resultados, no cobra ni paga. El segundo jugador cobra \$2 para una suma de al menos 8, paga \$3 si obtiene una suma a lo sumo de 5, y no cobra ni paga para el resto de los posibles resultados.

a) Presentar la tabla de probabilidad conjunta.

b) Se definen los siguientes eventos

A: las ganancias del primer jugador son mayores a las del segundo;
B: un jugador tiene una ganancia superior a la del otro;
C: el primer jugador no cobra dinero;
D: el segundo jugador no paga dinero.

Identificarlos en términos de las variables X y Y. Hallar sus probabilidades.

c) Calcular $P(X>0 \cup Y<0)$.

d) Sabiendo que el primer jugador no pierde dinero, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador tampoco pierda dinero?

e) Dar la interpretación literal a $P(X>0 / Y<0)$ y calcular su valor.

f) ¿Cuál es el valor esperado de la ganancia de cada jugador?

g) Hallar la covarianza entre ambas variables, $Cov(X,Y)$, y el coeficiente de correlación, $Corr(X,Y)$.

Ejercicio 6. En el desarrollo de un nuevo receptor para la transmisión de información digital, cada bit recibido se califica como aceptable, dudoso o inaceptable, dependiendo de la calidad de la señal recibida, con probabilidades 0,9; 0,08 y 0,02, respectivamente. Considerar los primero cuatro bits transmitidos. Sea X el número de bits aceptables, y Y el número de bits dudosos. La calificación de cada bit es independiente.

a) Construir la tabla de distribución de probabilidades conjunta, $p_{X,Y}(x;y)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban exactamente dos bits aceptables y uno dudoso? ¿Cuál para dos bits aceptables?

c) Si se han recibido 3 bits aceptables, ¿cuál es la probabilidad de que no se reciban bits dudosos?

d) ¿Cuál es el valor esperado de bits aceptables recibidos? ¿Cuál el de bits dudosos? ¿Cuál de bits inaceptables?

e) Hallar la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Son las variables X y Y independientes?

Ejercicio 7. Sean X y Y variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con distribución geométrica de parámetro p. Demostrar que

$$P(X = i / X + Y = n) = \frac{1}{n-1}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1.$$

Ejercicio 8. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con valores esperados $E(X)=\mu_X$ y $E(Y)=\mu_Y$, varianzas $V(X)=(\sigma_X)^2$ y $V(Y)=(\sigma_Y)^2$, respectivamente, distribución de probabilidad conjunta $P_{XY}(x;y)$, covarianza $Cov(X,Y)$ y coeficiente de correlación $Corr(X,Y)$, y sean a y b dos constantes reales.

a) Demostrar que:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X,Y),$$

$$Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X,Y),$$

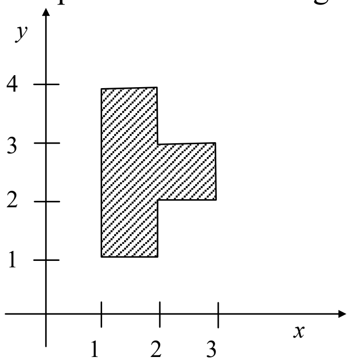
$Corr(aX + b, cY + d) = Corr(X,Y)$ cuando a y c tienen el mismo signo.

b) Demostrar que si, además, X y Y resultan independientes, se verifica que:

$$E(XY) = E(X)E(Y), V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y),\ Cov(X,Y) = 0.$$

c) Las igualdades dadas en los ítems a) y b), ¿valen para el caso que las variables X y Y sean continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x;y)$?

Ejercicio 9. Sea la función de distribución conjunta de dos variables aleatorias continuas X y Y, $f_{X,Y}(x;y)$ una constante c sobre la región que se marca en la figura y cero fuera de dicha región.



a) Determinar el valor de c.
b) Calcular las probabilidades: $P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5;\, 2{,}5 \leq Y \leq 3{,}5)$, $P(X > Y)$.
c) Hallar y graficar las funciones de densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.
d) Teniendo en cuenta que para cualquier valor fijo de y con $f_Y(y)>0$, la función de densidad de probabilidad de X sabiendo que $Y=y$ está definida por

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x;y)}{f_Y(y)},$$

representar gráficamente $f_{X/Y}(x/y=3{,}5)$, $f_{X/Y}(x/y=2{,}5)$, $f_{X/Y}(x/y=1{,}5)$.
e) Calcular el valor esperado de X condicionado por Y, conocida como función de regresión de X sobre Y, definido por

$$E_{X/Y}(X/Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)dx.$$

Ejercicio 10. Combustible y venta.

La cantidad de combustible, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una magnitud aleatoria Y, de la cual una cantidad aleatoria X se vende durante el día. El tanque no se rellena durante el día, de forma tal que es $X<Y$. La función de densidad de probabilidad conjunta de estas variables es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Calcular las funciones de densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.
b) Determinar si X y Y son independientes.
c) ¿Cuál la cantidad esperada de combustible que se vende en un día, esto es $E[X]$?
d) ¿Cuál es la cantidad esperada de combustible que se vende en un día en el que se comienza con la mitad del tanque lleno, esto es $E[X/Y=0.5]$?
e) ¿Cuál es la cantidad esperada de combustible al comenzar el día $E[Y]$?
f) Hallar la cantidad promedio de combustible que queda en el tanque al final del día.
g) Si se sabe que al iniciar el día el tanque está lleno hasta la mitad, ¿cuál es la probabilidad de que se venda entre 1/4 y 1/2 tanque?
h) ¿Cuál es la probabilidad de que al comienzo del día el tanque esté más de la mitad lleno y se venda menos de un cuarto de tanque?
i) ¿Cuál es la probabilidad de que si al comienzo del día el tanque está llena más de la mitad, se venda menos de un cuarto de tanque?
j) Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación de X y Y.

Ejercicio 11. Sea X y Y dos variables aleatorias independientes, tales que cada una está uniformemente distribuida en el intervalo $[0;1]$. Hallar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

a) $X>6/10$; **b)** $Y<X$; **c)** $X+Y\leq 3/10$; **d)** $\max\{X;Y\}\geq 1/3$; **e)** $XY\leq 1/4$.

Ejercicio 12. Ana y Alberto han acordado reunirse para almorzar entre el mediodía, 0:00 PM, y la 1:00 PM. Sea X la variable aleatoria que corresponde a la hora de llegada de ella y Y la correspondiente a la hora de llegada de él (ambas mediadas en fracción de hora). Como no se conocen previamente, X y Y pueden considerarse variables independientes que, de acuerdo a historias anteriores, tienen las siguientes funciones de densidad de probabilidad

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0\leq y\leq 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}.$$

a) ¿Cuál es la hora de llegada esperada para cada uno de ellos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen después de las 0:30 PM?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren si cada uno de ellos está dispuesto a esperar al otro a lo sumo 15 minutos? Visualizar que región del plano bidimensional (X,Y) está asociada con este evento.
d) ¿Cuál es la cantidad de tiempo esperada que deba aguardar el que llegue primero, $E(|X-Y|)$?

Ejercicio 13. Una persona tiene dos bombillas para una lámpara en particular. Sea X la variable aleatoria que corresponde a la duración de la primera bombilla y Y la correspondiente a la duración de la segunda bombilla, ambas en miles de horas (Por ejemplo, X=1, significa que la primer bombilla funciona 1000 horas). Suponiendo que X y Y son independientes y que cada una de ellas tiene una distribución exponencial de parámetro $\alpha=1$, responder las siguientes cuestiones.
a) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y, $f_{X,Y}(x;y)$?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada bombilla (por separado) dure a lo sumo 1000 horas, esto es $P(X\leq 1)$ y $P(Y\leq 1)$?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total de funcionamiento de la lámpara sea a lo sumo 2000 horas, supuesto que cuando se quema la primera se reemplaza por la segunda? Sugerencia: tener presente que el evento detallado está vinculado con los pares de valores del conjunto

$$\{(x,y)/\,x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 2\}.$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total de funcionamiento de la lámpara esté entre 1000 y 2000 horas?
e) Sea la variable aleatoria suma $T=X+Y$. Hallar la función de densidad y la función de distribución de probabilidad de T.

Observaciones:

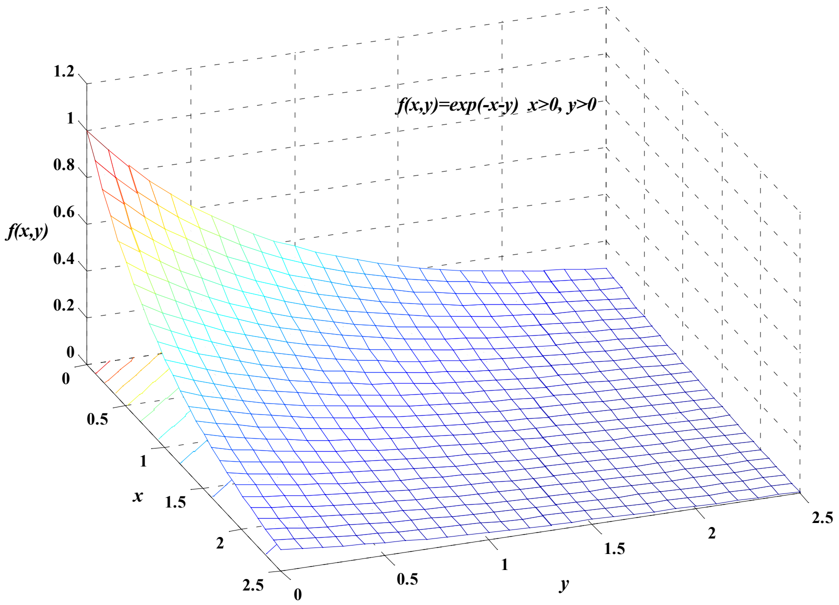
Si X~Exp(α) y Y~Exp(α) son independientes, $f_{X,Y}(x,y)=\alpha^2 e^{-(x+y)}\quad x\geq 0, y\geq 0$ (nula en otro caso) cuya representación gráfica para α=1 es tridimensional como la figura *a*.

La función de distribución de probabilidad de la variable T, el planteo es $F_T(t)=P(T\leq t)$.

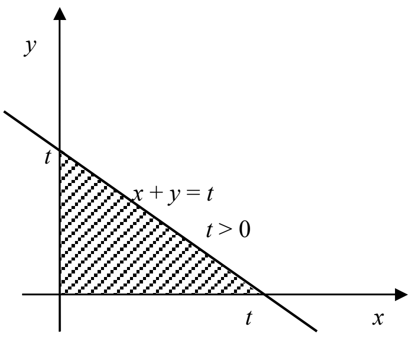
Si $t<0$, $F_T(t)=P(T\leq t)=0$. Si $t\geq 0$, $F_T(t)=P(T\leq t)=P(X+Y\leq t)=\int\limits_{x=0}^{x=t}\int\limits_{y=0}^{y=t-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$.

Resulta $\boxed{F_T(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\alpha t}-\alpha t e^{-\alpha t} & t\geq 0\end{cases}}$. Derivando por tramos $\boxed{f_T(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \alpha^2 t e^{-\alpha t} & t\geq 0\end{cases}}$.

Los límites de integración se deducen del dominio presentado en la figura *b*.

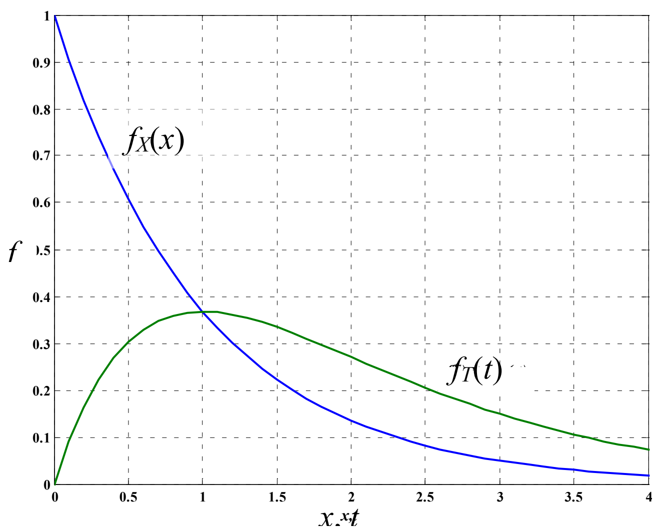


Ej.13. Fig. *a*. $f_{X,Y}(x,y)$

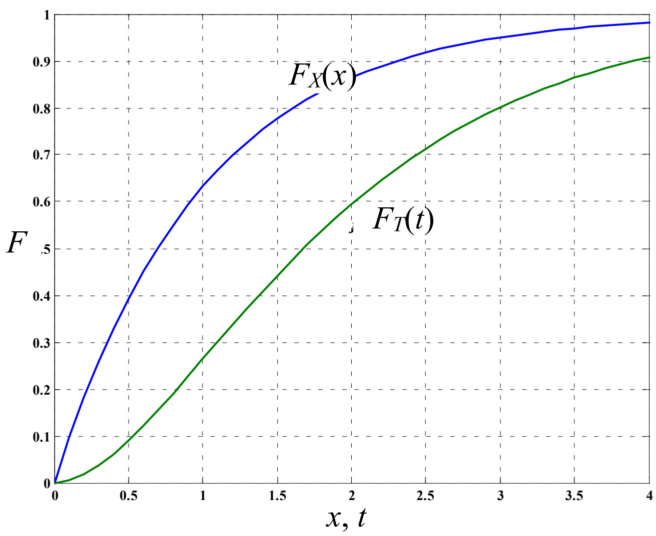


Ej 13. Fig. *b* Dominio de integración

Para α=1, la figura *c* permite la comparación de la función de densidad de cada variable con la correspondiente a la de su suma. En forma análoga, la figura *d* con las funciones de distribución de probabilidad acumulada.



Ej.13. Fig. *c* Funciones $f_X(x)$ y $f_T(t)$



Ej.13. Fig. *d* Funciones $F_X(x)$ y $F_T(t)$

Ejercicio 14. Dos componentes electrónicos en el sistema de un proyectil trabajan en armonía para el buen funcionamiento del sistema. Si (X, Y) representa la vida en horas de las dos componentes, su función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ye^{-y(1+x)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

a) Determinar las funciones de densidad marginales para ambas variables aleatorias, esto es $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.
b) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos componentes excedan las 2 horas?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos componentes excedan las 2 horas sabiendo que ambos tienen al menos una hora de vida?
e) Hallar $P(0<X<1/Y=0,5)$.

Ejercicio 15. Una instalación de servicio telefónico opera con dos líneas de servicio. En un día seleccionado al azar, sea X la proporción de tiempo que se utiliza la primera línea y Y la proporción de tiempo que se utiliza la segunda. La función de densidad conjunta de (X, Y) es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (3/2)(x^2 + y^2) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

a) Calcular la probabilidad de que ninguna línea se utilice más de la mitad del tiempo.
b) Encontrar la probabilidad de que la primera línea esté ocupada más del 75% del tiempo.
c) Obtener la función de densidad condicional de Y dado que $X=x$, $f_{Y/X}(y/X=x)$.
d) Hallar la función de regresión de Y sobre X definida como

$$E_{Y/X}(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y/X}(y/X=x)dy.$$

Ejercicio 16. Sea el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} & x > 0, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Hallar la matriz de covarianzas de (X, Y).
b) Calcular el coeficiente de correlación de (X, Y).
c) Obtener la función de densidad condicional de Y dado que $X=x$, $f_{Y/X}(y/X=x)$, y evaluar a partir de ella $P(Y > 1/2 / X = 1)$.
d) Hallar la función de regresión de Y sobre X definida como

$$E_{Y/X}(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y/X}(y/X=x)dy.$$

Ejercicio 17. Para resolver las siguientes cuestiones, utilizar la **propiedad reproductiva de la distribución normal**. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias normales independientes con valores esperados $E(X_1)=\mu_1$, $E(X_2)=\mu_2$, … , $E(X_n)=\mu_n$, y varianzas $V(X_1)=(\sigma_1)^2$, $V(X_2)=(\sigma_2)^2$, … , $V(X_n)=(\sigma_n)^2$, entonces

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, es una variable aleatoria normal con valor esperado y varianza

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \cdots + c_nE(X_n),\; V(Y) = c_1^2V(X_1) + c_2^2V(X_2) + \cdots + c_n^2V(X_n).$$

Como casos particulares para $E(X_1)=E(X_2)=E(X_n)=\mu$ y varianzas $V(X_1)=V(X_2)=V(X_n)=(\sigma)^2$,

- Si $c_1=c_2=\ldots=c_n=1$, se tiene $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $T\sim N(E(T)=n\mu; V(T)=n\sigma^2)$
- Si $c_1=c_2=\ldots=c_n=1/n$, se tiene $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, $\overline{X} \sim N(E(\overline{X})=\mu; V(\overline{X})=\sigma^2/n)$

a) Las variables aleatorias X_1 y X_2 denotan la longitud y el ancho, respectivamente, de una pieza rectangular. Si X_1 tiene una distribución normal con media de 2,0 cm y desviación estándar de 0,1 cm, X_2 tiene también una distribución normal pero con media y desvío estándar de 5,0 cm y 0,2 cm, respectivamente, y se supone que ambas variables son independientes. Calcular la probabilidad de que el perímetro de la pieza resulte mayor que 14,5 cm.

b) Una máquina automática llena latas de una bebida. El volumen promedio de llenado es de 350 ml de líquido, y la desviación estándar es de 5 ml. Si se supone que el volumen de llenado de las latas se corresponde con variables aleatorias normales independientes, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar 10 latas, el volumen promedio de este proceso ($\overline{X}$) sea menor que 340 ml de líquido?

c) Una envasadora automática de líquidos llena los envases mediante un pico de caudal constante de 0,7 litros/seg y tiempo de llenado variable. Se ha comprobado que este tiempo puede considerarse normalmente distribuido con desvío estándar igual a 0,03 seg. El contenido neto de cada envase debe ser de 1 litro. Se quiere tener la seguridad de que dicho volumen será sobrepasado el 95% de las veces. Razones técnicas obligan a dejar libre un volumen mínimo de 0,02 litros. Se desea una probabilidad 0,99 de que esto ocurra. Se sabe también que el volumen de los envases se distribuye normalmente alrededor del valor especificado con desvío estándar igual a 0,01 litro.

i. Indicar el volumen que deberá especificarse para los envases.
ii. ¿Cuál es el porcentaje de envases que desbordarán?
iii. Calcular el coeficiente de correlación entre el contenido neto y el volumen libre.

d) Hay unas zapatillas económicas que se expiden en cajas de cartón corrugado de 6 pares, cada par contenido en su caja individual. Frecuentemente los clientes reciben cajas con unidades faltantes, es decir que se encuentran 11 (o menos) zapatillas y reclaman furiosamente al vendedor. Para solucionar el problema, se ha decidido efectuar un control al final de la línea de empaques, pero como obviamente sería ilógico abrir cada caja para verificarla, se aplicará el siguiente procedimiento: se colocará una balanza al final de la línea y se pesarán todas las cajas, abriendo luego aquellas cuyo peso sea sospechoso. Ahora, para implementar este control debe fijarse un peso crítico C, tal que si una caja pesa menos, se la abrirá. A efectos de calcular el valor de C, se establece la condición de detectar al menos el 99% de las cajas con 11 zapatillas, y se sabe que los pesos de las zapatillas y las cajas son variables normales con los siguientes parámetros:

peso individual de las zapatillas en gramos, $X \approx N\left(\mu_X = 170; \sigma_X^2 = 7^2\right)$,
peso de las cajas individuales en gramos, $Y \approx N\left(\mu_Y = 50; \sigma_Y^2 = 5^2\right)$,
peso de las cajas de cartón corrugado en gramos, $W \approx N\left(\mu_W = 300; \sigma_W^2 = 40^2\right)$.

Calcular:

i. el valor de C; ii. el porcentaje de las cajas completas que se revisa inútilmente.

Observaciones: Sean X_1, X_2, …, X_n variables aleatorias independientes con valores esperados $E(X_1)=\mu_1$, $E(X_2)=\mu_2$, …, $E(X_n)=\mu_n$, y varianzas $V(X_1)=(\sigma_1)^2$, $V(X_2)=(\sigma_2)^2$, …, $V(X_n)=(\sigma_n)^2$. Sea Y la variable aleatoria correspondiente a la combinación lineal

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n ,$$

donde c_1, c_2, …, c_n son constantes.

Siempre son válidas las siguientes expresiones para el valor esperado y la varianza de Y:

$$E(Y) = c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2) + \cdots + c_n E(X_n), \; V(Y) = c_1^2 V(X_1) + c_2^2 V(X_2) + \cdots + c_n^2 V(X_n);$$

también vale para el caso particular que $\mu_1=\mu_2= \ldots =\mu_n=\mu$, y que $\sigma_1=\sigma_2= \ldots =\sigma_n=\sigma$, que si

$T=X_1+X_2+\ldots+X_n$ al tomar $c_1=c_2=\ldots=c_n=1 \Rightarrow E(T) = n\mu$ y $V(T) = n\sigma^2$,

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ al tomar $c_1=c_2=\ldots=c_n=1/n \Rightarrow E(\overline{X}) = \mu$, $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$;

pero, en general, no se puede asegurar la forma de la distribución de las variables Y, T y $\overline{X}$.

Ejercicio 18. Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 comunes. Encontrar los valores de *a* y *b* que hace verdadera la siguiente igualdad.

$$E\left[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2\right] = aE(X_1^2) + b\left[E(X_1)\right]^2$$

Justificar todos los pasos de la demostración.