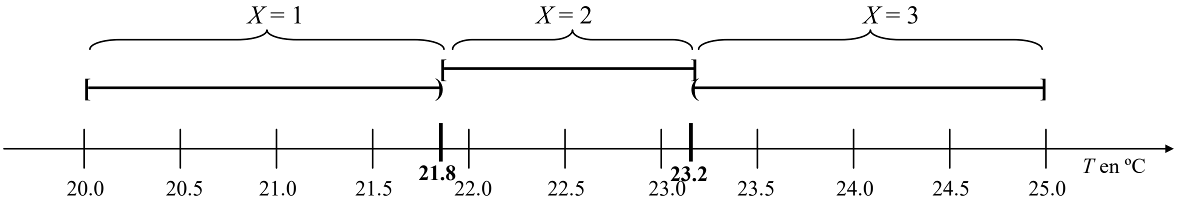
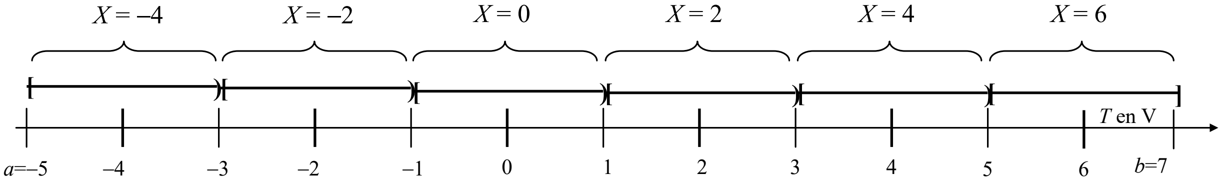
Respuestas Trabajo Práctico 3. Variable aleatoria discreta

Ej.1. **a)** $R_X = \{1; 2; 3\}$

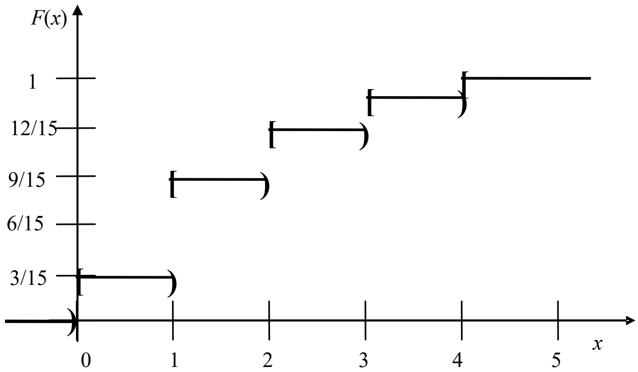


b) $R_X = \{-4; -2; 0; 2; 4; 6\}$



Ej.2. **a)** La verdadera función de probabilidad puntual es la número 2.
b) **i.** $P(X \leq 2) = 0{,}6$; **ii.** $P(X \leq 1) = 0{,}5$; **iii.** 40%.
c) $c = 1/15$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/3 & 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & 2 \leq x < 3 \\ 14/15 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



Ej.3. $P(X = x) = \dfrac{\binom{6}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{10}{3}} \quad x = 0, 1, 2, 3$.

x	0	1	2	3
$p(x)$	4/120≅0,0333	36/120=0,3000	60/120=0,5000	20/120≅0,1667

Ej.4. **a)**

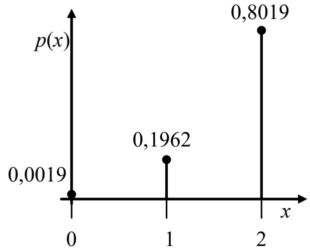
x	4	6	8
$p(x)$	0,45	0,40	0,15

b) $E(X) = 5{,}40$; $V(X) = 2{,}04$.

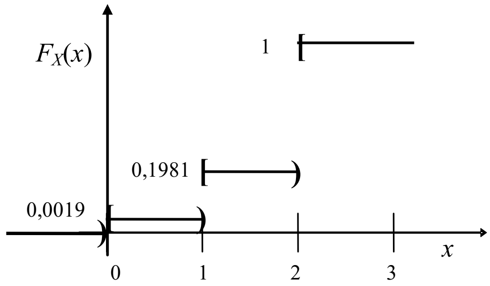
Ej. 5

x	0	1	2
$p(x)$	0,0019	0,1962	0,8019

$E(X) = 1{,}8$ circuitos



$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0{,}0019 & 0\le x<1\\ 0{,}1981 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$



Ej.6.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,4	0,1	0,3	0,2

Ej.7. **a)** $p(2)=P(X=2)=F_X(2)-F_X(2^-)=0{,}20$, $P(X>3)=1-F_X(3)=0{,}33$

$P(2\le X\le 5)=F_X(5)-F_X(2^-)=0{,}78$, $P(2<X<5)=F_X(5^-)-F_X(2)=0{,}53$

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0,06	0,13	0,20	0,28	0,25	0,05	0,03

c) $E(X)=2{,}8$

Ej. 8 $R_X=\{0;\ 1;\ 2\}$

x	0	1	2
$p(x)$	0,84	0,12	0,04

i) $E(X)=0{,}2$ reprocesamientos; ii) en promedio se tiene un reprocesamiento cada 5 discos rígidos inspeccionados; iii) 0,4% de los discos rígidos se desarman.

Ej.10. **a)** $E[(X-c)^2]=V(X)+[E(X)]^2-2cE(X)+c^2$; $c=E(X)$ minimiza $E[(X-c)^2]$; **c)** Ajuste $0{,}8X+20$;

d) $E[h(X)]=\sum_{i=1}^{n}h(x_i)p(x_i)$; $V[h(X)]=\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)]^2p(x_i)-\left[\sum_{i=1}^{n}h(x_i)p(x_i)\right]^2$

Ej.11. **a)** $c=1/6$

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/3	1/3	2/9	1/9

b) $E(X)=19/9\cong 2{,}111$; $V(X)=80/81\cong 0{,}987$; $\sigma_X\cong 0{,}994$

c)

Si $k=1$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1, 2, 3, 4	1	$5a$	1

$E(G)$ = **5*a***

Si $k=2$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5a-3a$	1/3
2	2, 3, 4	2/3	$10a$	2/3

$E(G)$ = 2*a* 1/3 + 10*a* 2/3 = **22/3 *a***

Si $k=3$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5a-6a$	1/3
2	2	1/3	$10a-3a$	1/3
3	3, 4	1/3	$15a$	1/3

$E(G)$ = 6*a* 1/3 + 15*a* 1/3 = **21/3 *a***

Si $k=4$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5a-9a$	1/3
2	2	1/3	$10a-6a$	1/3
3	3	2/9	$15a-3a$	2/9
4	4	1/9	$20a$	1/9

$E(G)$ = 12*a* 2/9 + 20*a* 1/9 = **44/9 *a***

Si $k=5$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	5 a - 12 a	1/3
2	2	1/3	10 a – 9 a	1/3
3	3	2/9	15 a – 6 a	2/9
4	4	1/9	20 a – 3 a	1/9
5	0	0	- 3 a	0

$E(G)$ = -6a 1/3 + 9a 2/9 + 17a 1/9 = **17/9 *a***

El valor de k=2 maximiza la utilidad esperada, $E(G)$ = 22/3 a.

d) Depende el valor de la multa por demanda no satisfecha, cambiará el valor de k que maximiza la utilidad esperada. Se tendería a pensar que dada la poca diferencia entre la utilidad esperada al fabricar 2 ó 3 artículos, por lo menos la respuesta cambiaría al valor de k=3 (pero podría ser mayor).

Ej.12. **a)** $X \sim Bin(n=5;p=0{,}02)$; **b)** $P(X=2) \cong 0{,}00376$; $P(X<2) \cong 0{,}99616$; $P(X>2) \cong 0{,}00008$; $P(X \geq 1) \cong 0{,}09608$

c) Los resultados anteriores seguirían siendo aproximadamente válidos si el número de artículos extraídos n=5 es menor que el 5% del número de artículos de la producción de la cual son extraídos.

Ej.13. Se esperan que fallen para atender su reclamo 488 artefactos.

Ej.14. Como la probabilidad de que 3 o más de las 6 naves aterricen en la zona establecida es 0,98304, el programa resulta satisfactorio.

Ej. 15. **a)** 0,0298; **b)** i. 0,5460; ii. 0,1186.

Ej.16. 1,65.

Ej.17. $(1-p)^m + mp(1-p)^{2m-1} + m^2p^2(1-p)^{2m-2} + \dfrac{m(m-1)}{2}p^2(1-p)^{2m-2}$.

Ej.18. **b)** 0,9988; **c)** 0,0176; **d)** 0,6703.

Ej.19. **a)** 0,0003; **b)** 0,9084; **c)** 0,1048.

Ej.20 **a)** 0,1428; **b)** 4 buques como máximo.

Ej.21. 0,6165.

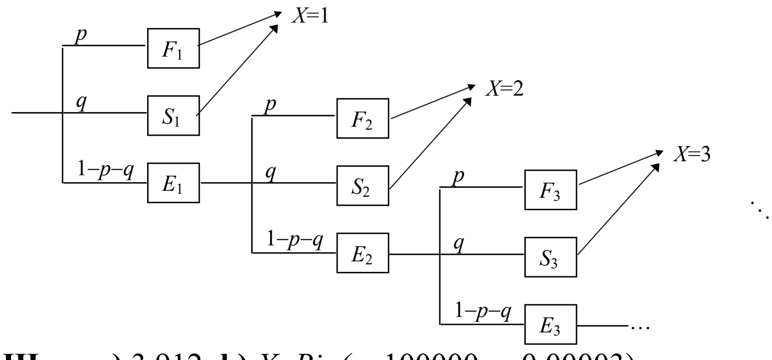
Ej.22. $P(X=k)=(1-p)^k p \quad k \in \mathbf{N_0}$, distribución geométrica, $E(X)=\dfrac{1}{p}$; $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

Ej.23. F_k: gana Fisher, S_k: gana Spassky, E_k: empatan en la k-ésima partida.
F gana Fisher el campeonato, S: gana Spassky el campeonato.

a) $P(F)=\dfrac{p}{1-(1-p-q)}=\dfrac{p}{p+q}$;

b) $P(X=k)=(1-p-q)^{k-1}(p+q) \quad k=1,2,3,\cdots$ Distribución geométrica.

c) $E(X)=\dfrac{1}{1-(1-p-q)}=\dfrac{1}{p+q}$; $V(X)=\dfrac{(1-p-q)}{(p+q)^2}$



MISCELÁNEOS Ej.III. **a)** 3,912; **b)** $X \sim Bin(n=100000, p=0{,}00003)$

$$P(X \leq 2) = 0{,}99997^{99998}\left(0{,}99997^2 + 100000 \cdot 0{,}00003^1 0{,}99997^1 + \frac{100000 \cdot 99999}{2} 0{,}00003^2\right)$$

"=DISTR.BINOM(2;100000;0,00003;VERDADERO)" $\Rightarrow$ 0,423186720

$X \sim P(\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}00003 = 3) \Rightarrow P(X \leq 2) = 8{,}5e^{-3} \cong 0{,}4232$

"=POISSON(2;3;VERDADERO)" $\Rightarrow$ 0,423190081

c) Modelo Poisson, $n \geq 231$; Modelo Binomial, $n \geq 230$.

Ej.IV. **a)** 0,0079; **b)** 0,5991.