

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

La Geometría Descriptiva es la ciencia de representación gráfica, sobre superficies bidimensionales, de los problemas del espacio donde intervengan, puntos, líneas y planos.

La Geometría Descriptiva es para el dibujo como la gramática es para el lenguaje.

El matemático francés **Gaspar Monge** (1746-1818) organizó y desarrolló la ciencia de la Geometría Descriptiva a finales del siglo XVII.

Con posterioridad a su muerte, en su homenaje por los aportes que brindó en este campo, la Geometría Descriptiva también se conoce como Método Monge.

Cumple dos objetivos principales: el primero facilitar el método para representar sobre un papel que posee dos dimensiones longitud y latitud; todos los cuerpos de la naturaleza, que tienen tres dimensiones, longitud, latitud y profundidad.

El segundo objetivo es dar a conocer por medio de una exacta descripción la forma de los cuerpos, y deducir todas las verdades que resultan, bien sean de sus formas, bien de sus posiciones respectivas.

SISTEMAS DE PROYECCIÓN

Un sistema de proyección es aquel conjunto de métodos gráficos bidimensionales que permiten presentar un objeto tridimensional. Uno de estos sistemas es la Proyección Diédrica y que consiste en la utilización de dos planos de proyección que reflejan dos “vistas” diferentes de un objeto tridimensional. Estos dos planos de proyección son perpendiculares entre sí, es decir ortogonales, y por lo general son suficientes para representar las dimensiones de un objeto en el espacio.

Los elementos que intervienen en el sistema son los siguientes:

Planos de proyección: Son planos ortogonales entre sí (vertical o PV y horizontal o PH) sobre los cuales se realizan las proyecciones. Su intersección se llama Línea de Tierra (LT).

Se usan dos planos como mínimo para determinar una forma.

Proyecciones: nos referimos a la “sombra” de los elementos sobre los planos de proyección. Por ejemplo, el punto p se proyecta en p_1 y p_2 , también llamados p' y p'' (Figura 1).

Líneas de referencia: Las líneas pp_1 y pp_2 determinan un plano que se corta con los de proyección en p_2p_0 y p_1p_0 (Figura 2). Estas rectas son perpendiculares a la línea de tierra.

Trazas: llamamos de esta manera, a la intersección de cualquier entidad (punto, recta, plano, cuerpo) con los planos de proyección.

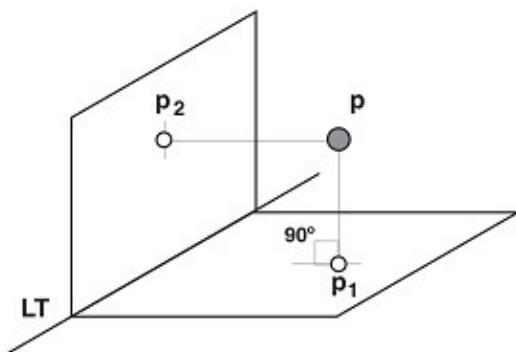


Figura 1

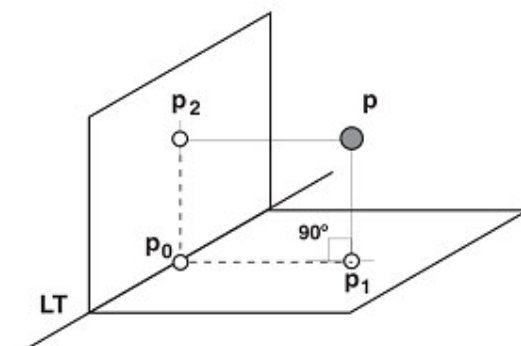


Figura 2

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO

EL PUNTO

Al proyectar un punto sobre los planos de proyección (vertical y horizontal: PV y PH), obtenemos sobre cada uno de ellos la proyección de éste punto, y ésta proyección es un punto en cada uno de los planos.

Si el punto en el espacio lo llamamos **A**, a la proyección vertical la llamaremos **A''** y a la proyección horizontal **A'**.

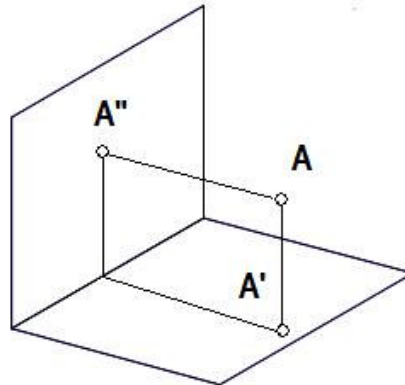


Figura 3

Al rebatir el plano vertical (Figura 4) los puntos **A''** y **A'** quedan sobre una misma perpendicular a la línea de tierra. A esta perpendicular se la llama "Línea de referencia".

Su representación en Monge quedaría como en la Figura 5.

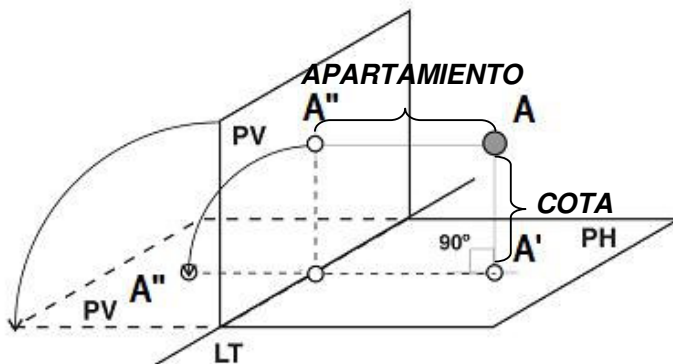


Figura 4

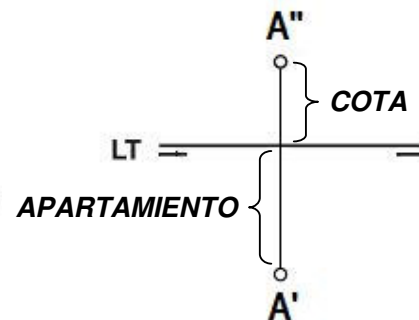


Figura 5

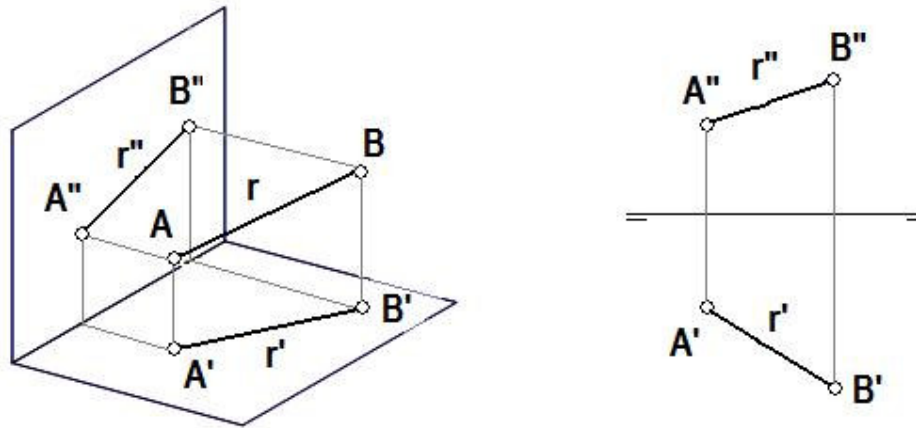
La distancia desde el punto al PV, se llama **Apartmento**; y la distancia desde el punto al PH se llama **Cota**. La proyección vertical queda por encima de la línea de tierra y la horizontal por debajo.

LA RECTA

Una recta queda determinada mediante dos puntos. Por tanto, dibujando las proyecciones de dos puntos en diédrico, y uniéndolas con rectas, obtendré las proyecciones de la recta correspondiente.

En diédrico la recta se representa mediante dos proyecciones, una vertical y otra horizontal, y ambas son líneas rectas:

- La proyección vertical (r'') se obtiene uniendo las proyecciones verticales (**A''** y **B''**) de los puntos.
- La proyección horizontal (r') se obtiene uniendo las proyecciones horizontales (**A'** y **B'**) de los puntos.



RECTAS NOTABLES DE UN PLANO

Se denominan rectas notables de un plano a aquellas rectas que pertenecen a un plano y que guardan características conocidas., respecto a los Planos de Proyección.

HORIZONTAL.

Se presenta paralela al PH y en posición oblicua al plano PV. Su proyección vertical es una recta paralela a LT ya que todos los puntos pertenecientes a ella tienen la misma cota. Jamás toca o intercepta al PH.

Cuando se analizan las coordenadas de sus puntos observamos que el valor COTA es una constante.

DE PUNTA.

Se presenta paralela al PH; y es perpendicular al PV. Su proyección vertical se presenta como un punto. En cambio su proyección horizontal es una recta perpendicular a LT

FRONTO-HORIZONTAL.

En pocas palabras es una recta paralela a LT, por lo tanto es también paralela a PH y PV. Las proyecciones horizontales y verticales se presentan como rectas paralelas a LT

FRONTAL.

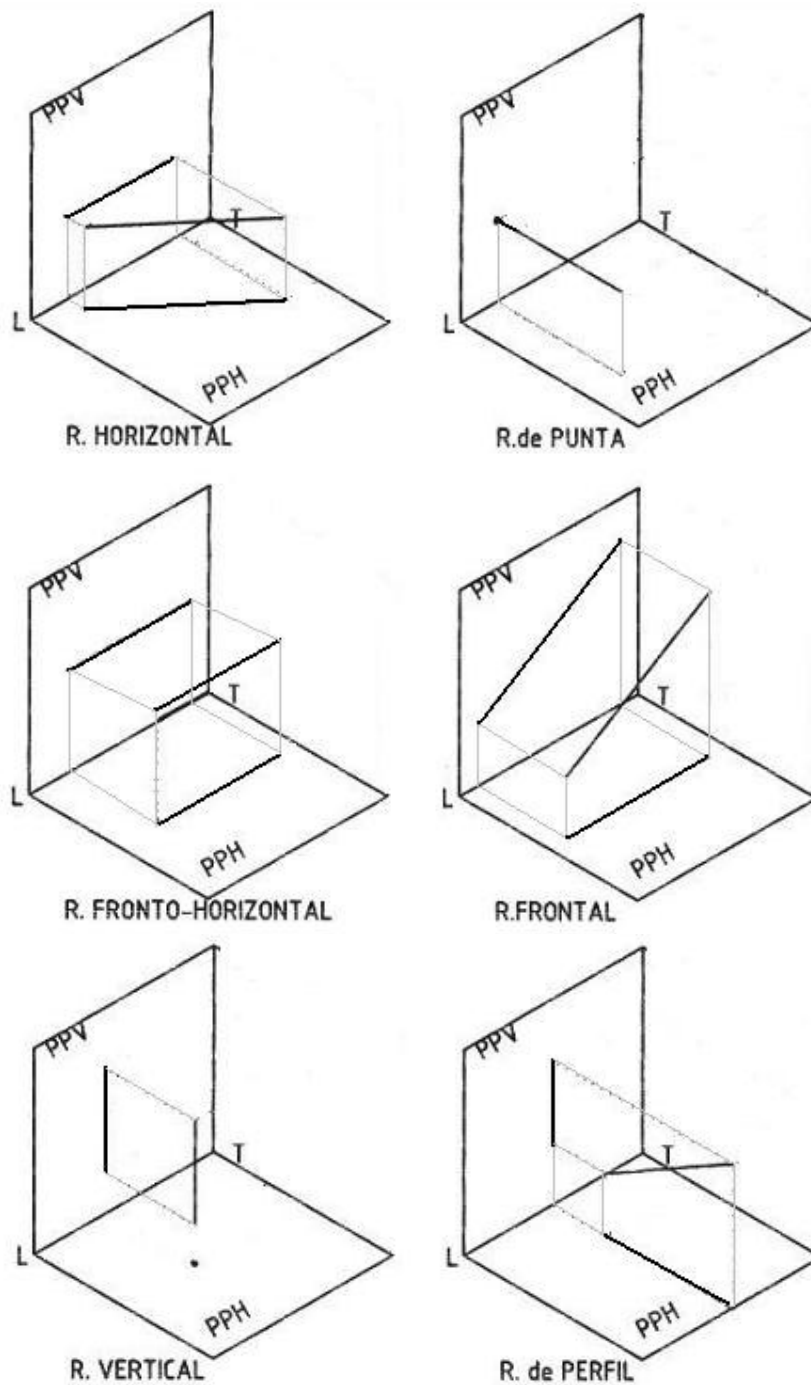
Es una recta paralela al plano vertical, pero presenta inclinación hacia el PH. Su proyección horizontal se presenta como una recta paralela a LT; la proyección vertical aparenta una recta inclinada. Jamás intercepta al PV (NO TIENE TRAZA VERTICAL). El análisis de las coordenadas de sus puntos nos permite concluir de que los valores de APARTAMIENTO son una constante.

VERTICAL.

Básicamente es una recta perpendicular al PH, por lo tanto paralela al PV. La proyección vertical se presenta como recta perpendicular a la LT, y en su proyección horizontal nada más es un punto. El único plano que intercepta es al PH (SOLO TIENE TRAZA HORIZONTAL). En el análisis de coordenadas vemos que los valores de APARTAMIENTO son una constante.

PERPENDICULAR A LT.

Se trata de una variedad de la recta de Perfil, y que presenta la característica de ser una recta perpendicular a la línea de tierra, por lo tanto sus proyecciones horizontales y verticales son colineales.



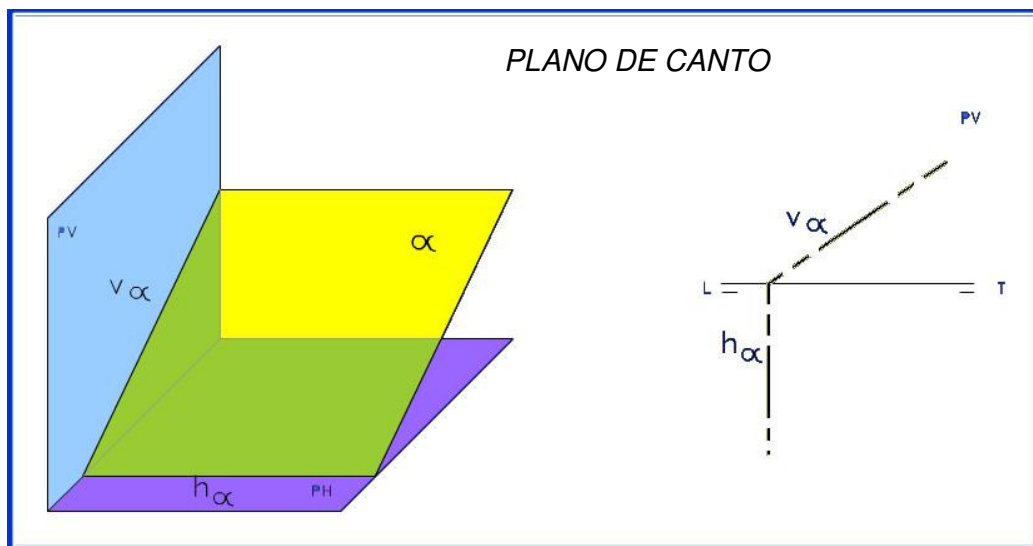
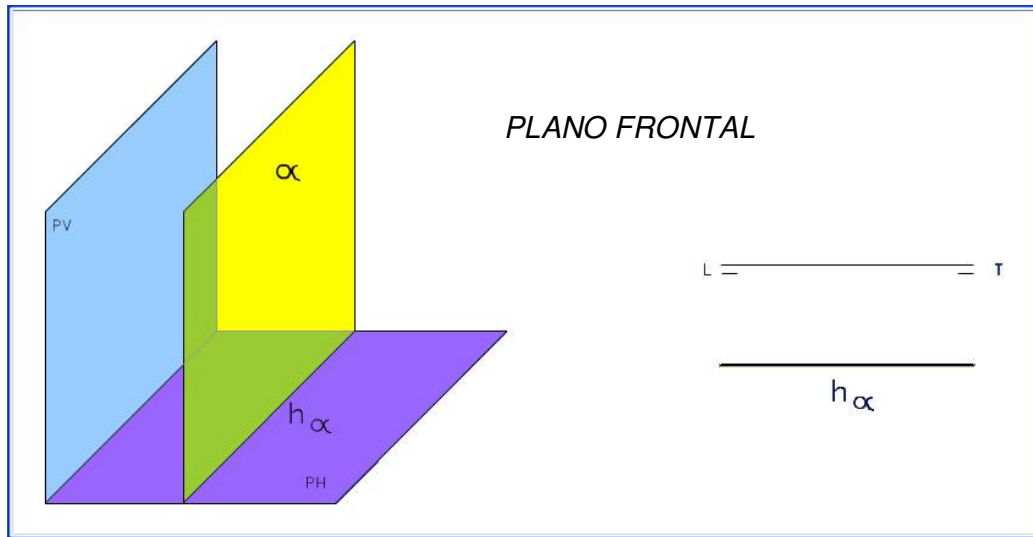
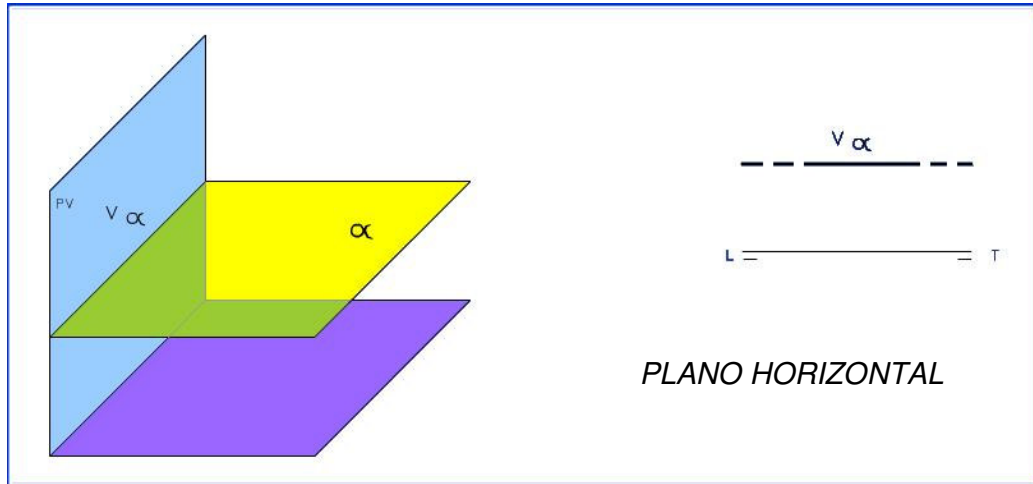
PLANOS

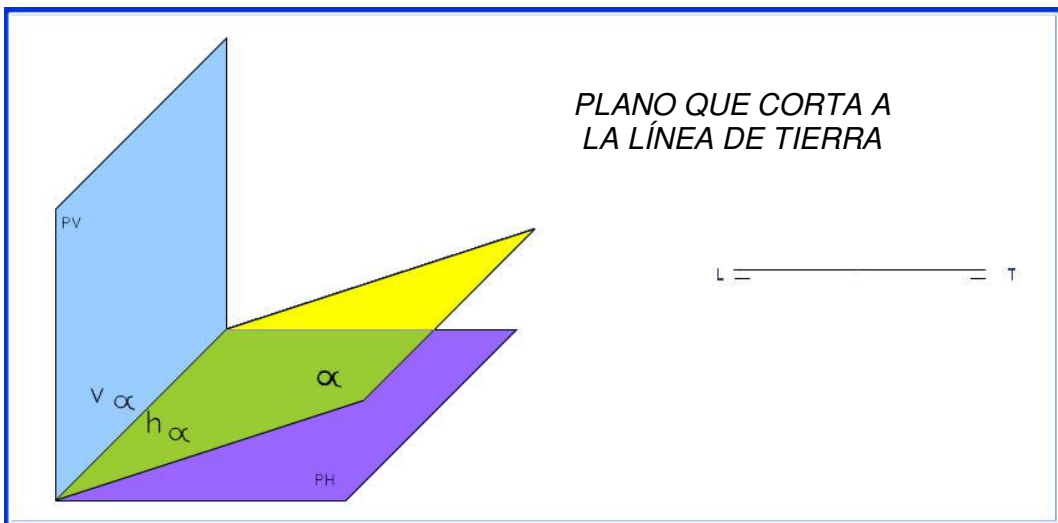
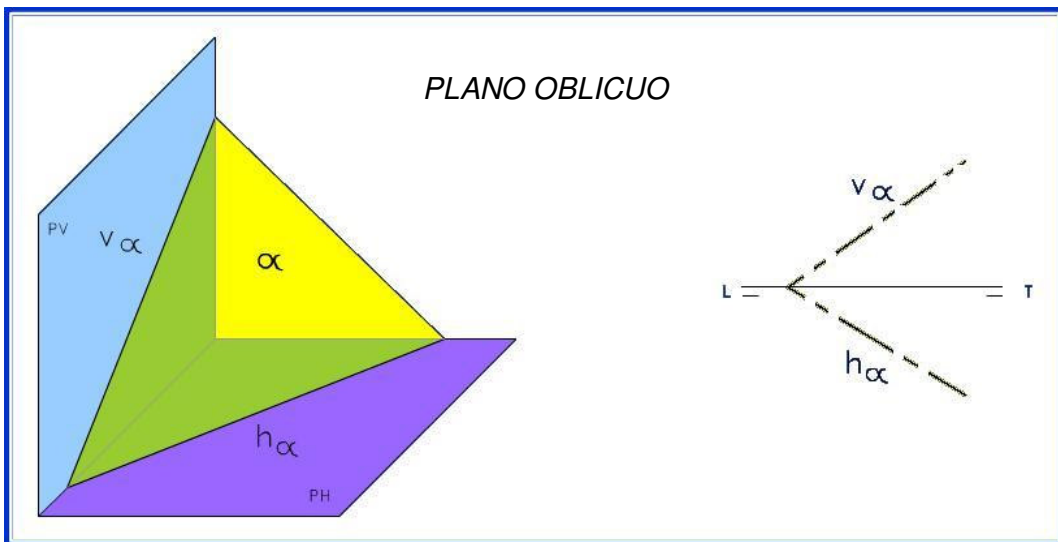
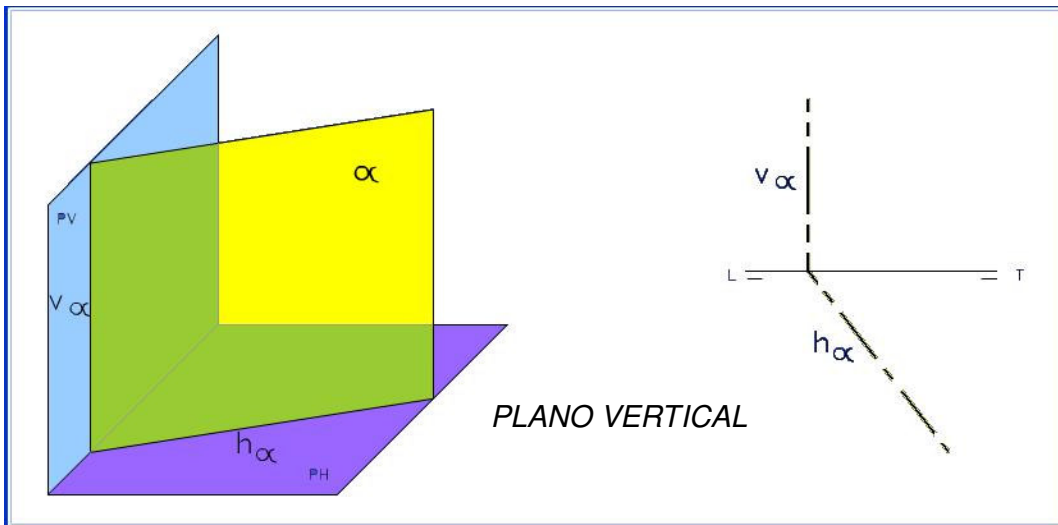
Un plano queda definido por tres puntos no alineados, por un punto y una recta, por dos rectas paralelas o por dos rectas que se cruzan.

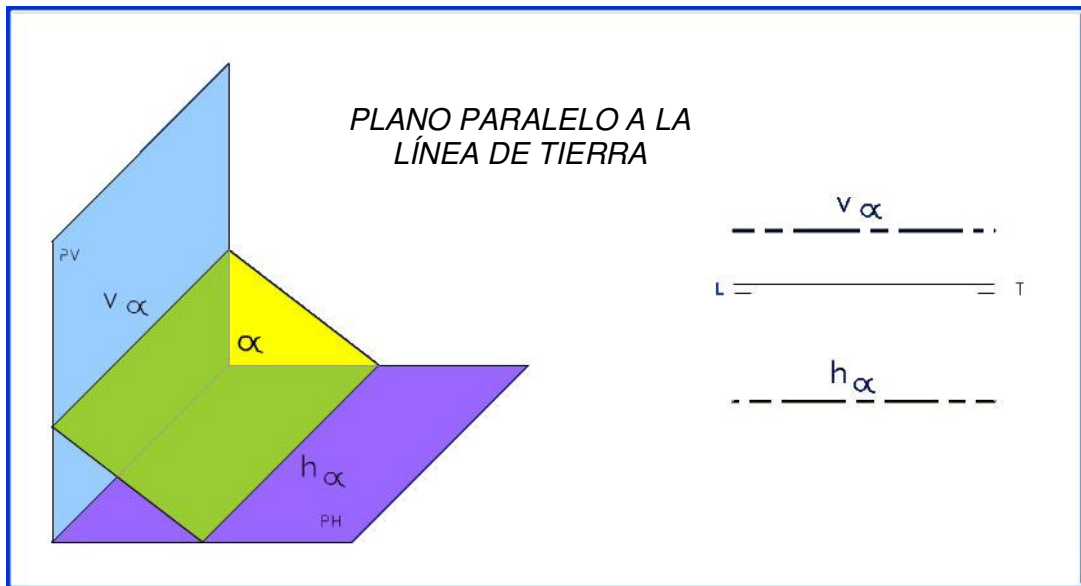
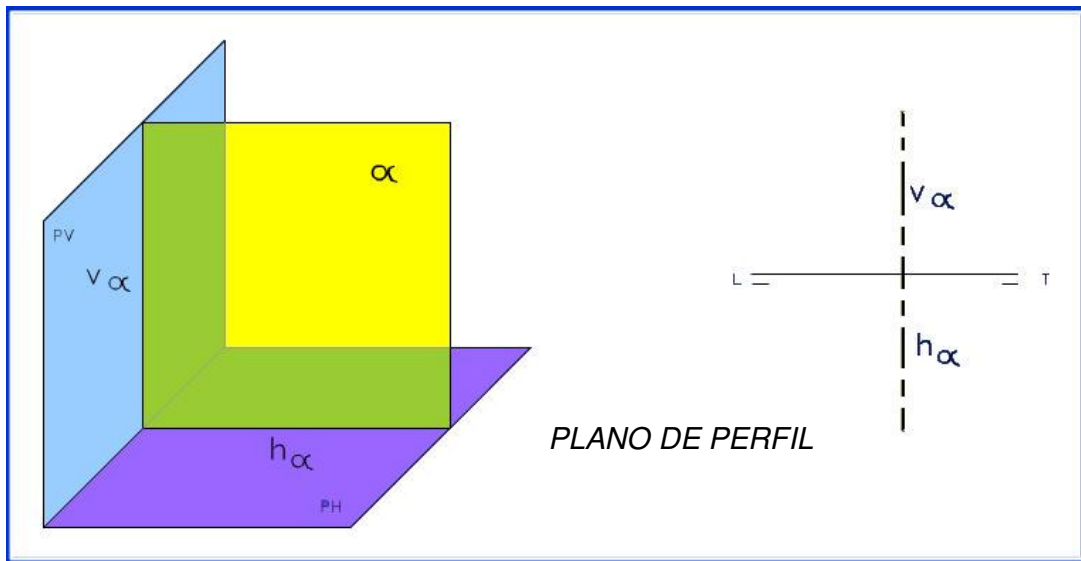
La intersección de un plano cualquiera del espacio con los planos de proyección, determinan rectas que se llaman trazas del plano.

Estas trazas, se denominan con letras griegas acompañadas por las letras H o V, según que plano proyectante intersecquen.

Las posiciones más notables son las siguientes.



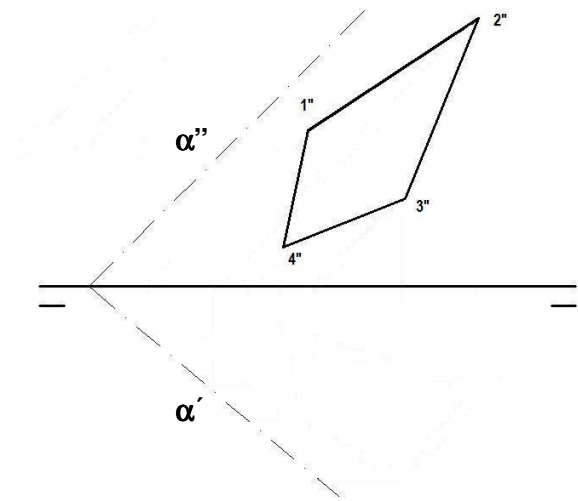




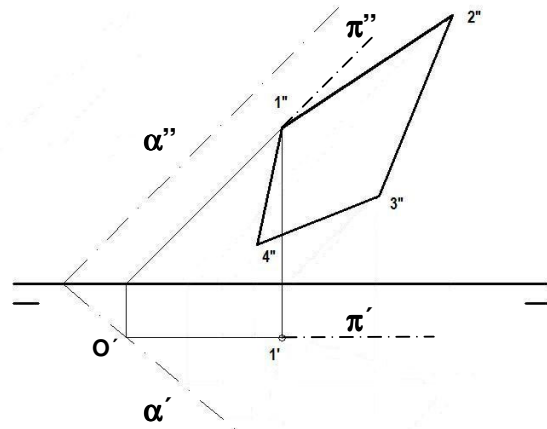
EJERCITACIONES

Ejercicio 1

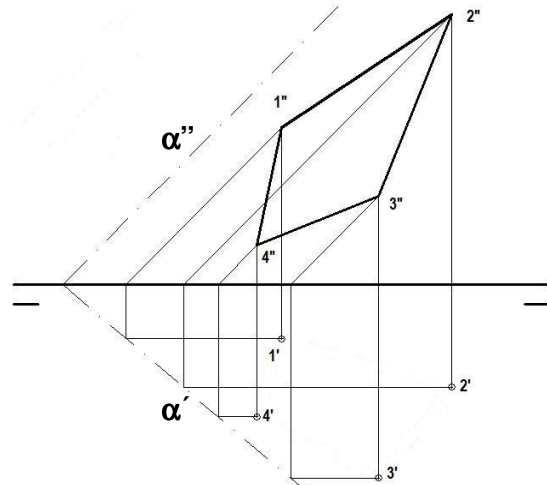
Determinar la proyección faltante de un cuadrilátero, conociendo las trazas del plano oblicuo α que lo contiene.



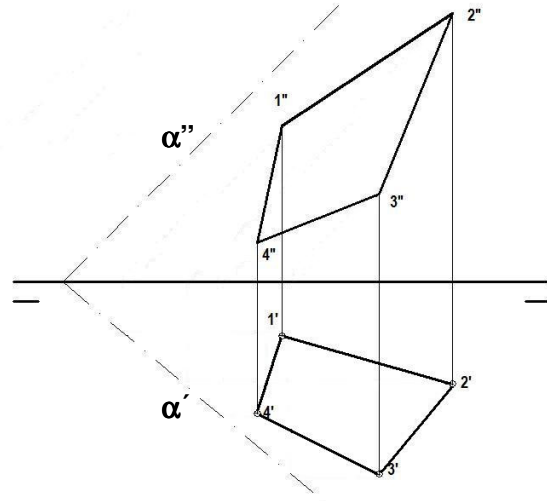
Por el punto **1** hago pasar un plano de canto auxiliar π , cuya traza π' intercepta a la traza α' en o' . Siguiendo esta traza, se encuentra con la proyección perpendicular de **1** determinando $1'$.



Por el mismo proceso, encuentro a las proyecciones de los puntos 2, 3 y 4 ($2'$, $3'$ y $4'$).

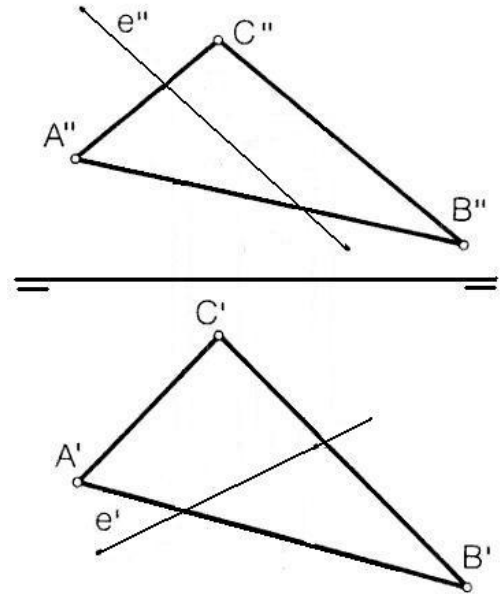


Uniendo estos puntos, determino la proyección faltante.



Ejercicio 2

Conocidas las proyecciones de una figura contenida en un plano oblicuo y de una recta oblicua, determinar la intersección de ambas entidades y la visibilidad de la recta.



Para resolver este ejercicio, se hace pasar un plano vertical α que contenga a la recta e .

Este cortará en su proyección horizontal al lado $A'B'$ en el punto $1'$, y al lado $C'B'$ en el punto $5'$.

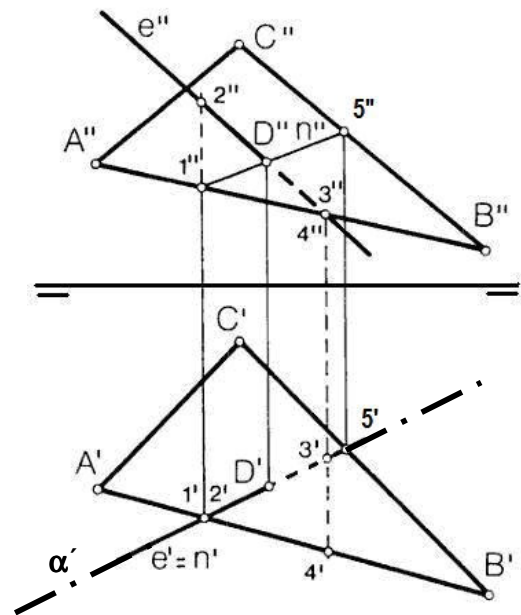
Proyectados ambos puntos hacia arriba, encontraremos las proyecciones $1''$ y $5''$.

Al mismo plano α pertenece el punto de intersección D de la recta con el plano de la figura triangular, que encontramos uniendo $1''$ y $5''$ (D'').

Trazando la auxiliar perpendicular hasta e' , encontramos el punto de intersección D' .

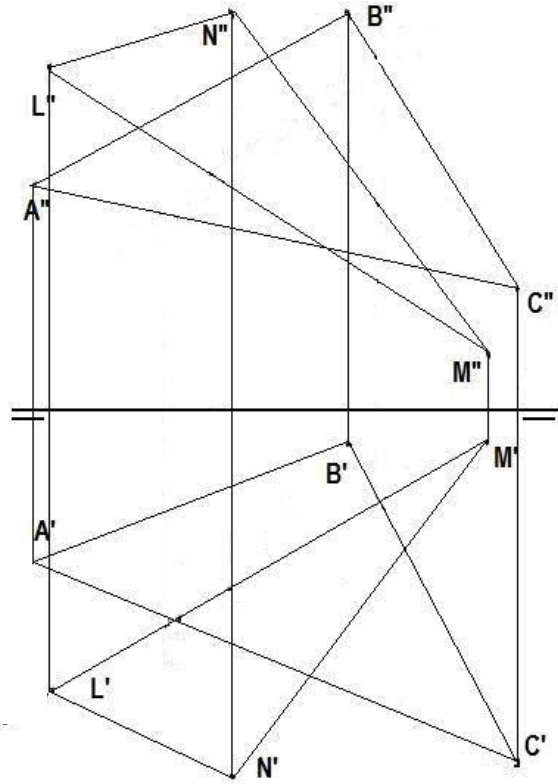
Para la visibilidad procedemos así: en el plano proyectante vertical, el tramo $2''D''$ tiene mayor cota que el tramo $D''3''$. Esto indica que está sobre la figura triangular y es visible en el plano proyectante horizontal. Por lo tanto, $D''3''$ no es visible.

En tanto que en el PPH $2'D'$ tiene mayor apartamiento que $D'3'$. Esto nos dice que está por delante de la figura triangular, por lo que es visible en el PPV, no así el tramo $D'3'$.



Ejercicio 3

Supongamos encontrar la intersección y determinar la visibilidad de dos triángulos, **ABC** y **LMN**, contenidos en dos planos oblicuos diferentes.



Imagino un plano vertical (α) que contenga al lado **LM**.

Dibujó la traza α' .

Este plano corta al lado **AC** en el punto **1**, y al lado **BC** en el punto **2**.

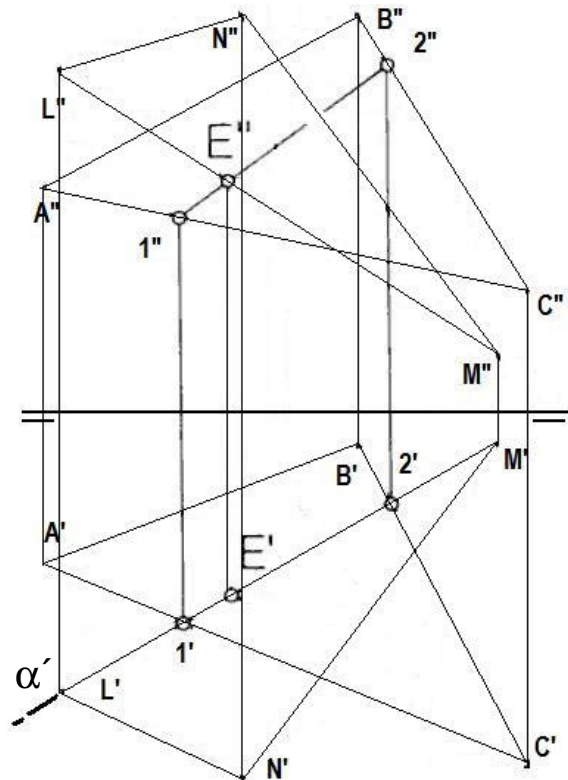
Dibujó **1'** y lo proyecto hasta **A''B''** determinando **1''**.

Hago lo mismo con el punto **2'** y **2''**.

Sobre el tramo **1-2** encontraré un punto de intersección entre los planos que contienen a los dos triángulos.

Si uno **1''** y **2''**, en el camino cortaré al lado **L''M''**, encontrando ese punto en común, al que llamaré **E''**.

Proyectando hacia **L'M'**, ubico el punto **E'**.



De manera semejante, imagino un plano de canto (β) que contenga al lado **MN** de uno de los triángulos.

Este corta a los lados **AB** en el punto **3**, y al lado **AC** del otro triángulo en **4**.

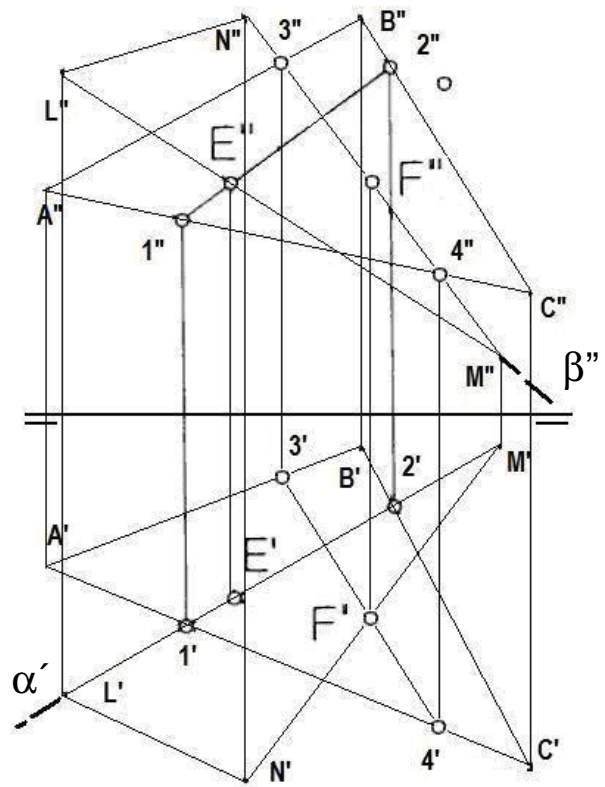
Sobre la traza β'' ubico a $3''$ y a $4''$.

Proyectando los mismos hacia $A'B'$ y sobre $A'C'$, dibujo $3'$ y $4'$.

En algún punto del segmento **3-4**, encontraré la intersección del mismo con el lado **MN** del triángulo.

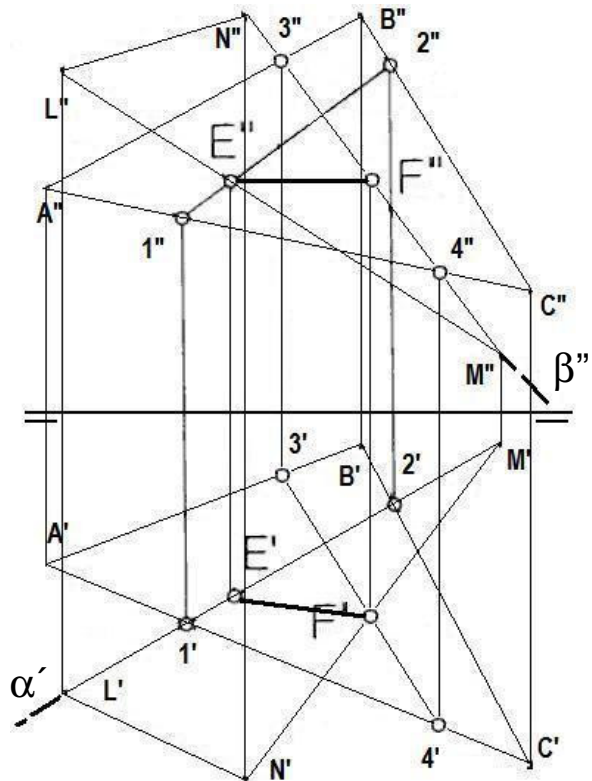
Este lo encuentro si uno $3'$ y $4'$ y corto a $M'N'$.

Llamaré F' a este punto y lo proyecto hasta el lado $M''N''$, determinando el punto F'' .



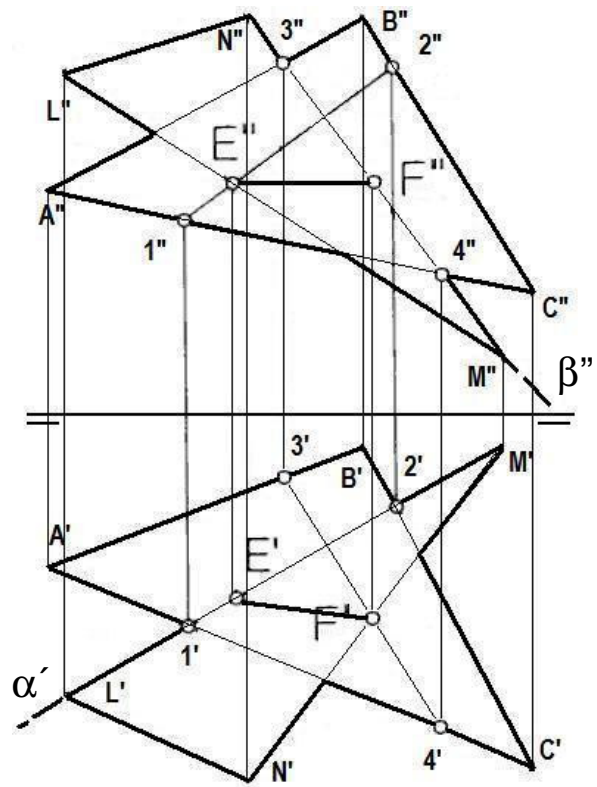
Como solo necesito dos puntos para determinar una recta (en este caso un segmento de intersección), puedo suponer que todos los puntos entre **E** y **F**, pertenecen tanto al plano del triángulo **ABC** como al plano del triángulo **LMN**.

Si los uno en sus dos proyecciones, encuentro la intersección entre ambos planos oblicuos.



Para determinar la visibilidad de los planos, primero observo lo siguiente.

Todos los contornos exteriores de las figuras, son visibles.



Para los tramos interiores de la figura, procedo según el siguiente método:

Tomo una intersección aparente (por ejemplo el punto $1'$), donde se ven "cortados" los lados $A'C'$ y $L'M'$.

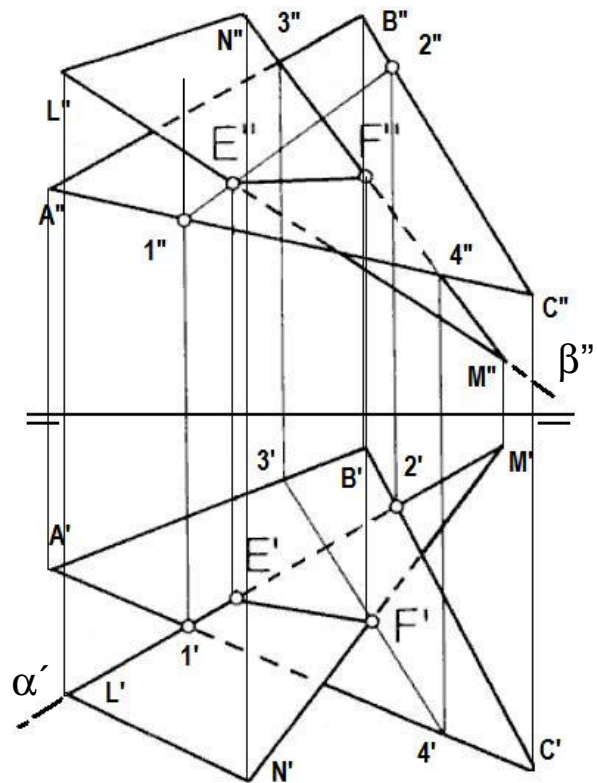
Desde ese punto trazo una línea auxiliar hasta el plano proyectante vertical.

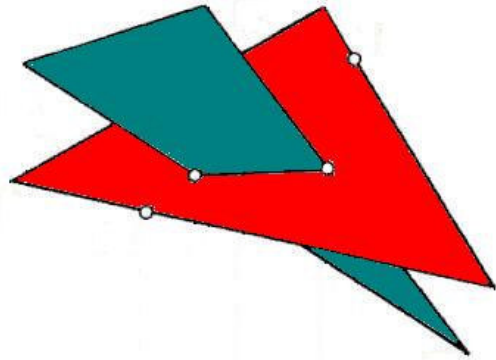
Allí observo que el lado $L''M''$ tiene mayor cota que el lado $A''C''$, midiéndome sobre esa línea auxiliar, mostrándome que ese lado del triángulo LMN está encima del lado AC del triángulo ABC , por lo tanto es visible en el plano proyectante horizontal desde $1'$ hasta E' .

Por consiguiente, $L'E'F'N'$, es visible.

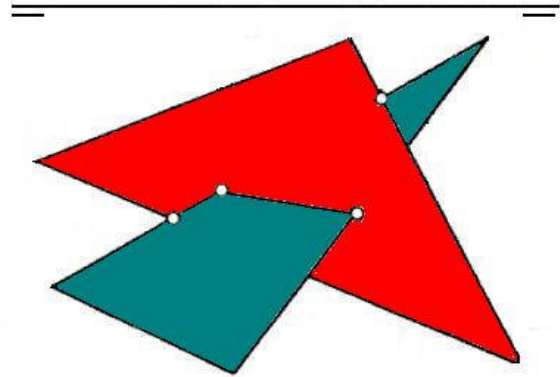
A cada punto de intersección y sobre el mismo segmento de recta, llegan un segmento visible y uno no visible, es decir: si $1'E'$ es visible, $E'2'$ es no visible; y si $N'F'$ es visible, F' es no visible hasta la intersección aparente con $B'C'$.

Para el resto de visibilidad, puedo utilizar otro punto de intersección aparente, como el $2'$, y de manera semejante puedo averiguar la visibilidad en el otro plano proyectante con otros puntos, como el $4''$ y el $3''$.



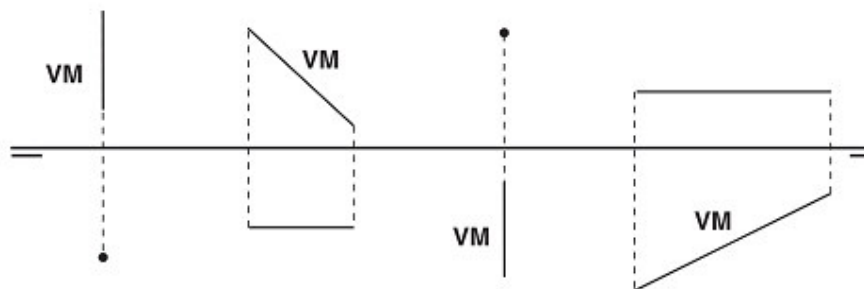


Coloreando los triángulos ABC y LMN, puedo tener una visión tridimensional de la intersección de los planos que los contienen.



VERDADERA MAGNITUD

La magnitud de la proyección de una recta es siempre menor o igual a la magnitud de la recta. Una recta está en verdadera magnitud (VM) en una proyección cuando es paralela a ese plano de proyección o está contenida en él.

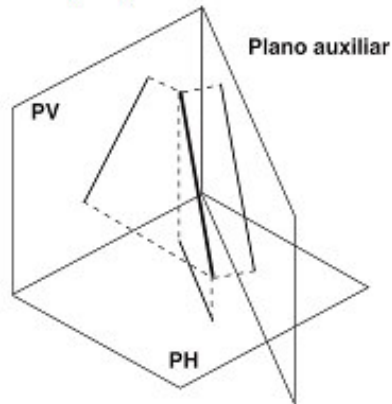


La verdadera magnitud se puede conseguir con alguno de los siguientes métodos: **Cambio de plano de proyección**, **Giro** o **Abatimiento**.

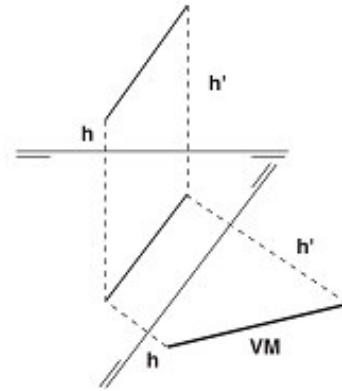
CAMBIO DE PLANO DE PROYECCIÓN

Cambiamos el plano de proyección para que quede la nueva línea de tierra paralela al plano de la recta y realizamos una nueva proyección sobre ese plano.

Dibujo espacial



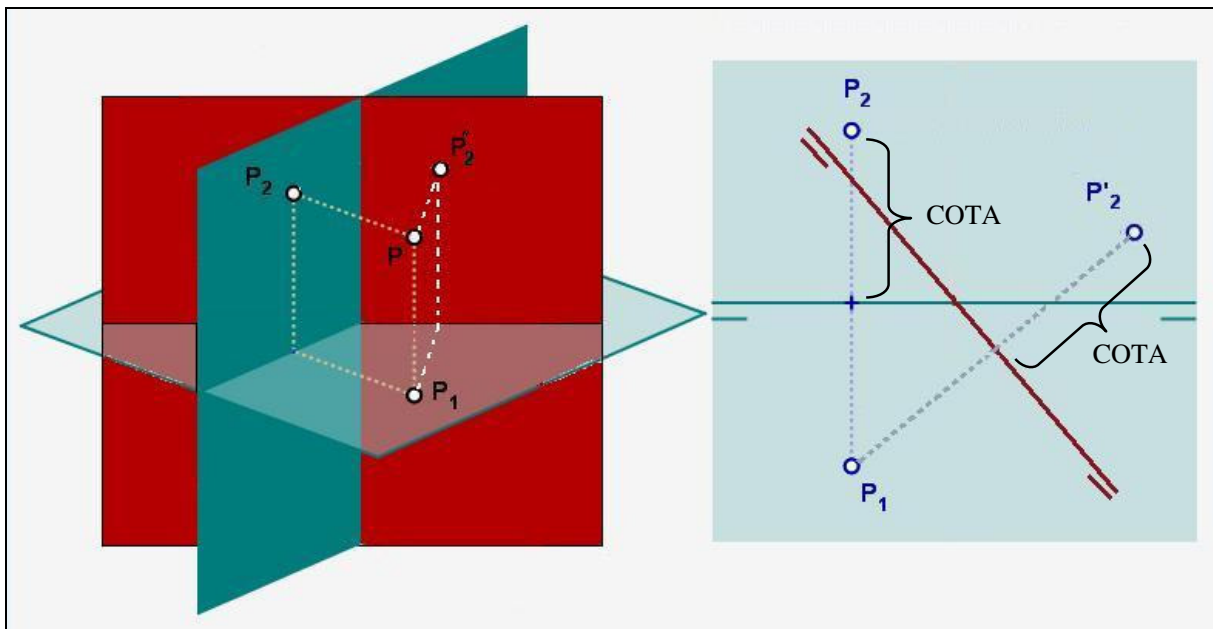
Dibujo descriptivo



Cambio de Plano Vertical

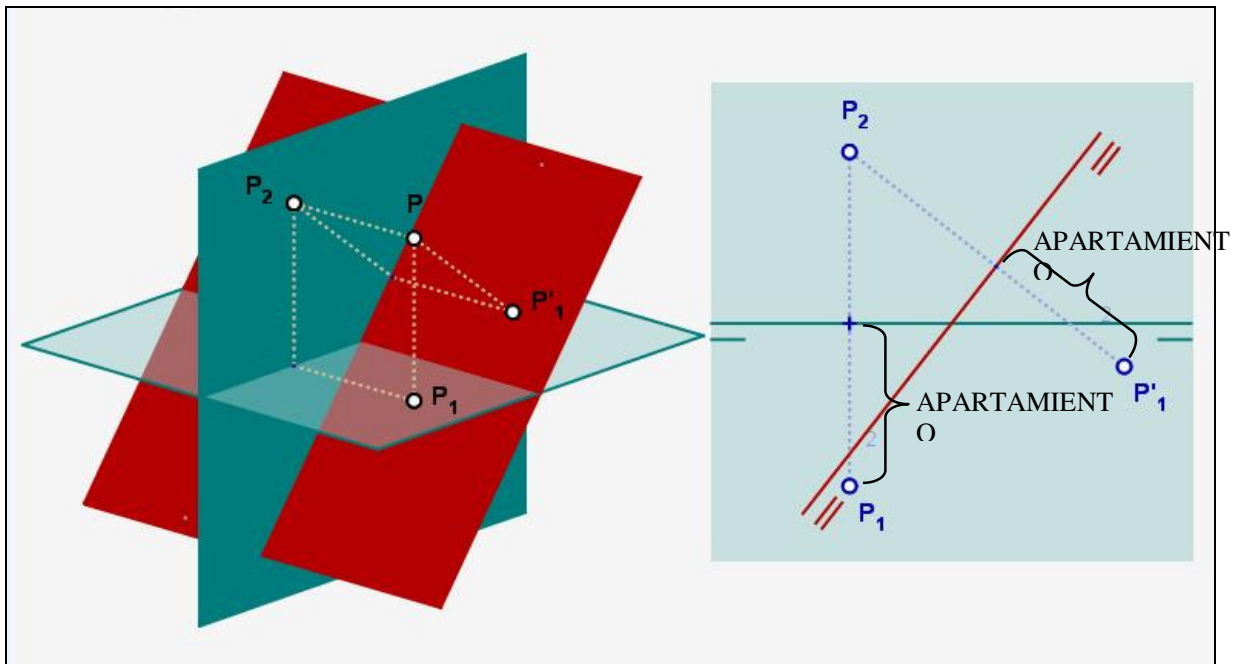
En el mismo, se cambia el plano proyectante vertical por otro, permaneciendo perpendicular al plano proyectante horizontal existente.

En este caso, se mantiene la misma proyección en el plano horizontal y permanece constante la altura o distancia al plano proyectante horizontal, es decir la cota, en tanto que se modifica el apartamiento.



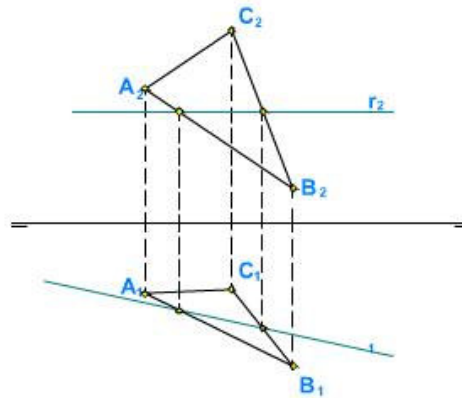
Cambio de Plano Horizontal

Al cambiar de plano horizontal de proyección tendremos una nueva proyección horizontal. La distancia del punto al plano vertical sigue siendo la misma, por lo que el apartamiento del punto, y por lo tanto la distancia de la nueva proyección horizontal a la línea de tierra, no varía. La cota (distancia del punto al plano horizontal) sí que será diferente.



EJERCITACIONES

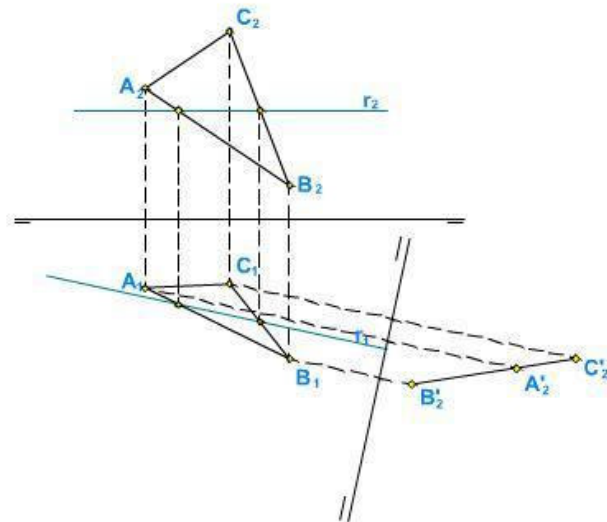
Mediante cambios de plano, conocer la verdadera dimensión de la figura **ABC**, contenida en un plano oblicuo.



El método consiste en trazar una recta auxiliar contenida en el plano de la figura. Por ejemplo la recta horizontal r .

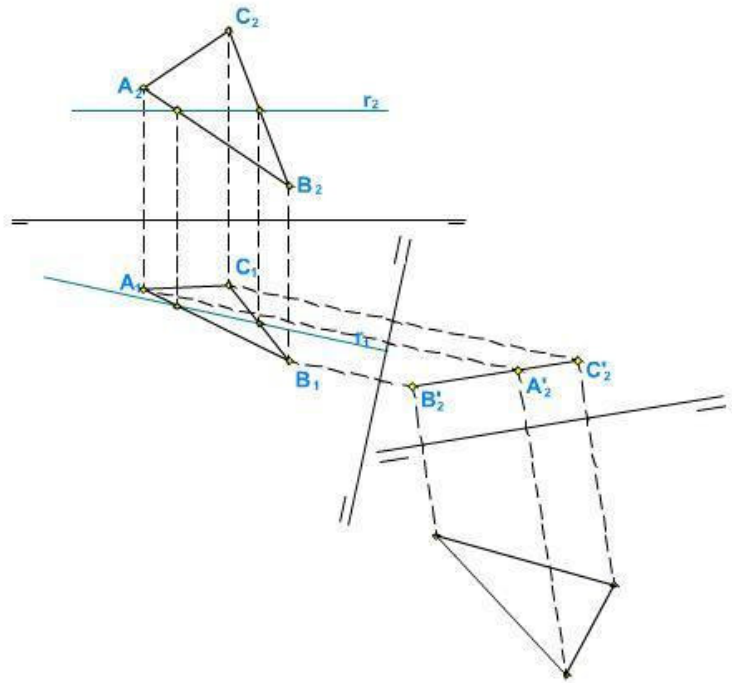
Realizo un cambio de plano (en este caso un cambio de plano vertical) de manera que alguna proyección de la recta (la contenida en el plano horizontal) quede perpendicular a la nueva línea de tierra.

Conservando las medidas de las cotas de los vértices de la figura, mi nueva proyección vertical será un segmento de recta.



Solamente faltará entonces realizar otro cambio de plano (ahora un cambio de plano horizontal) de manera de colocar mi nuevo plano con su línea de tierra paralelo a esta última proyección vertical, y proyectar los apartamientos correspondientes a cada vértice.

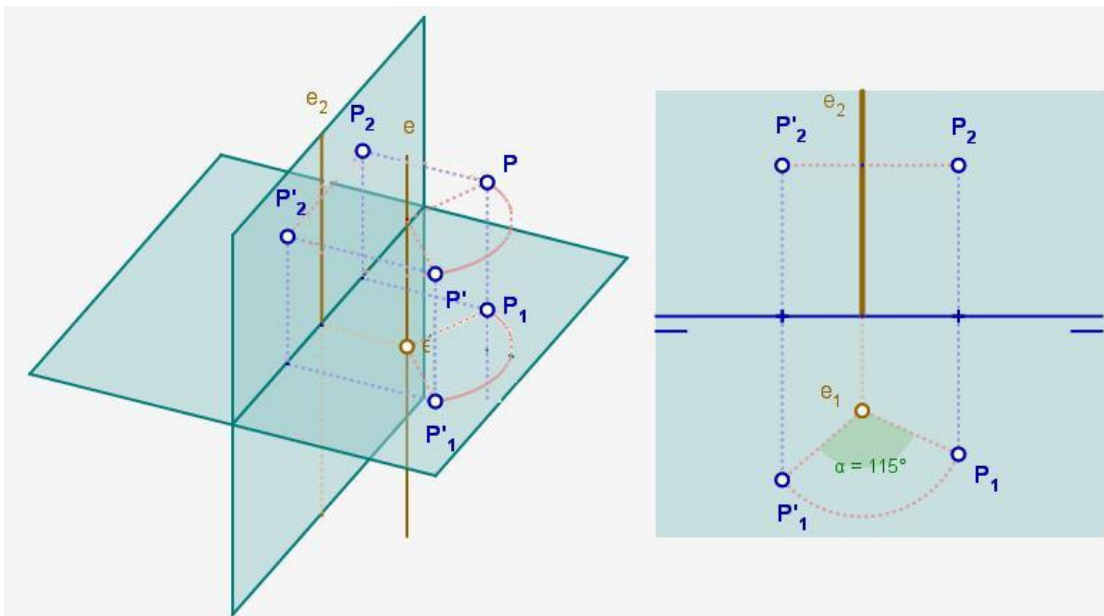
Tendremos entonces la verdadera dimensión de la figura **ABC**.



GIRO

Definimos un eje de giro perpendicular a alguno de los planos de proyección. Todos los puntos de la recta describen arcos de circunferencia alrededor de este eje, cuyos planos son perpendiculares al eje de rotación. La proyección horizontal de un arco de circunferencia horizontal es otro arco en verdadera magnitud, y la proyección vertical del mismo es un segmento de recta horizontal. Si el arco de circunferencia es vertical estas proyecciones se invierten.

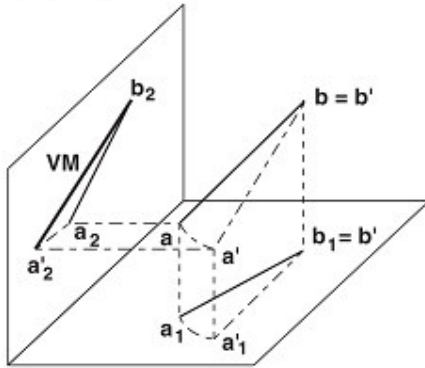
Al girar un punto alrededor de un eje perpendicular al plano horizontal, el punto y su proyección horizontal trazan en su recorrido un arco de circunferencia. La distancia de la proyección vertical a la línea de tierra (cota) se mantiene, ya que el punto no varía de altura. En un giro se deben de indicar el eje, el ángulo (en el gráfico ángulo **a**) y el sentido del giro (en el gráfico en sentido de las agujas del reloj cuando **a** es positivo y contrario a las agujas del reloj cuando es negativo).



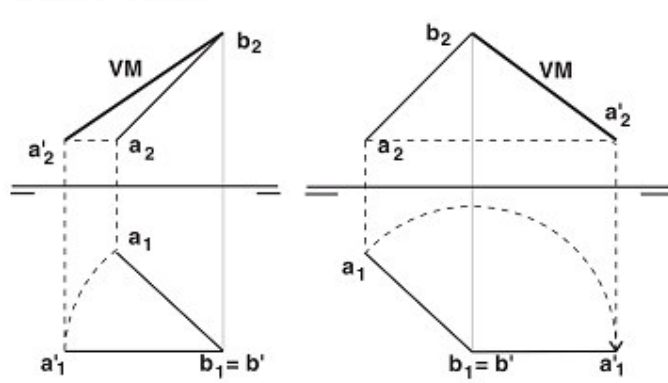
Verdadera Magnitud mediante Giro de una recta

Para obtener la verdadera magnitud del segmento de recta **ab**, tomo un eje perpendicular al plano proyectante horizontal que pase por uno de los extremos del segmento (punto **b**), y hago girar el otro hasta que la proyección quede paralela a la línea de tierra. Entonces trazo la nueva proyección y me quedará la verdadera magnitud del segmento.

Dibujo espacial

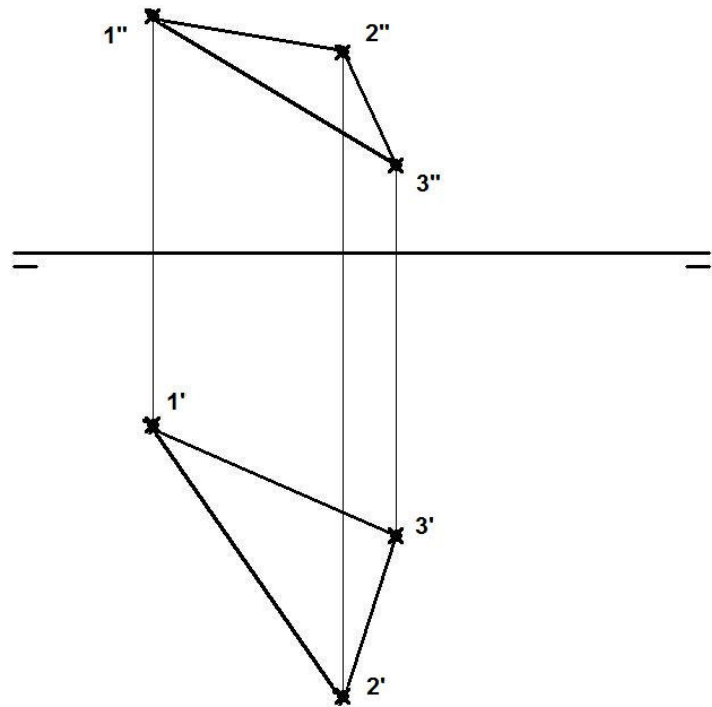


Dibujo descriptivo

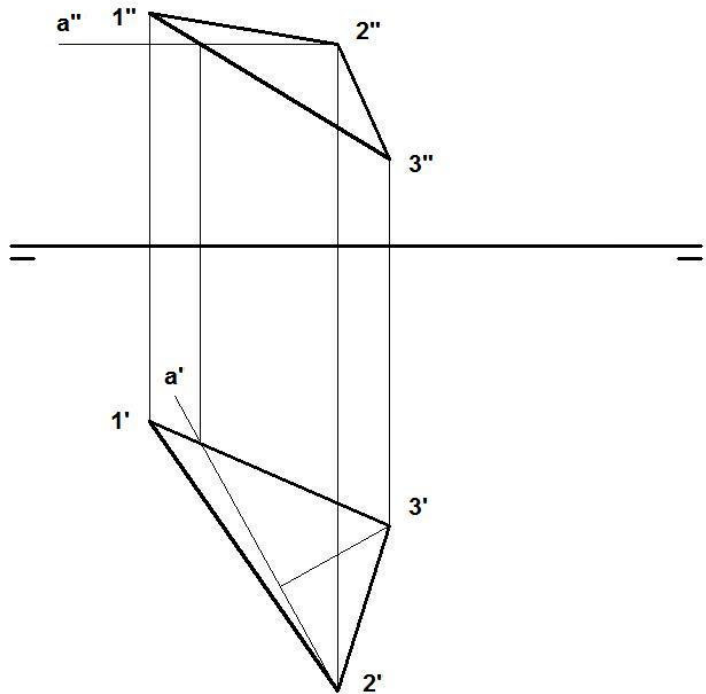


EJERCITACIONES

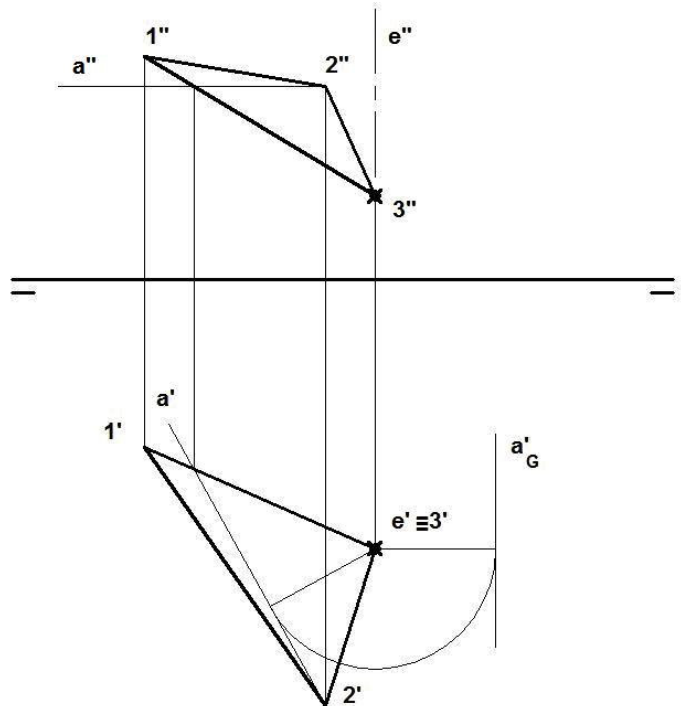
Aprovechando el concepto anterior, podemos averiguar la verdadera magnitud del triángulo **1-2-3** contenido en un plano oblicuo.



Tracemos una recta auxiliar horizontal **a** que esté contenida en el plano de la figura con sus proyecciones **a''** y **a'**.
Tracemos también una perpendicular, siempre en el mismo plano, a la proyección de **a** en el plano proyectante horizontal que pase por el punto **3**.



Si hacemos pasar por el punto **3** un eje de giro **e** perpendicular al plano horizontal, y alrededor de este eje **e** giramos la recta **a** y su perpendicular, de manera que la perpendicular quede paralela a la línea de tierra y la proyección **a'** perpendicular a la misma. Llamaremos a esta recta **a'_G** (girada).

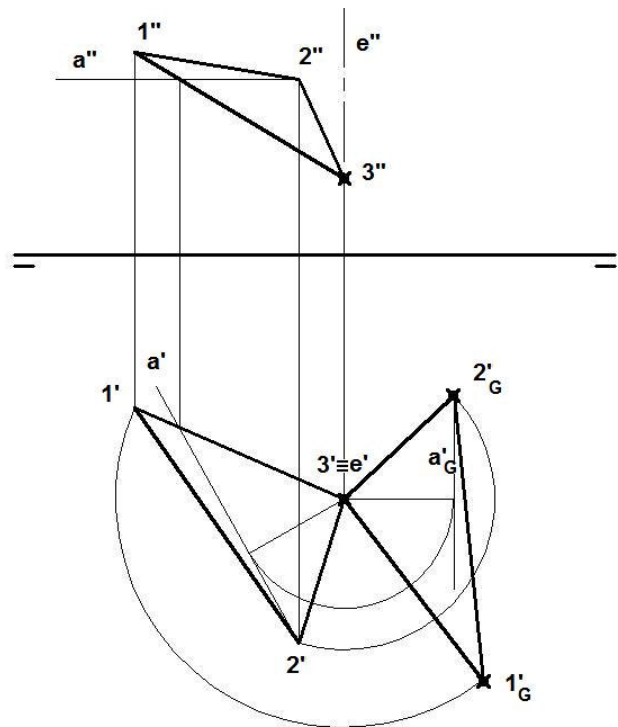


Haciendo centro en el eje, trazamos dos giros desde el punto $1'$ y $2'$ con el mismo ángulo de abertura que usamos para girar a' .

De esta manera obtenemos los puntos $1'_G$ y $2'_G$.

Con estos puedo dibujar la figura girada.

El único punto que no cambia de posición es el punto 3 con sus proyecciones $3''$ y $3'$, ya que por el mismo pasa el eje de rotación.

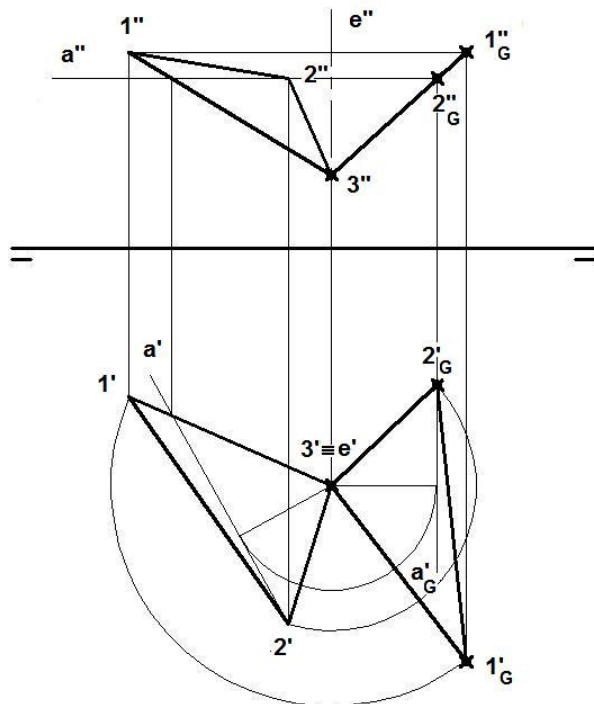


Desde los puntos $1'_G$ y $2'_G$, tiro las proyecciones de los mismos hacia el plano proyectante vertical.

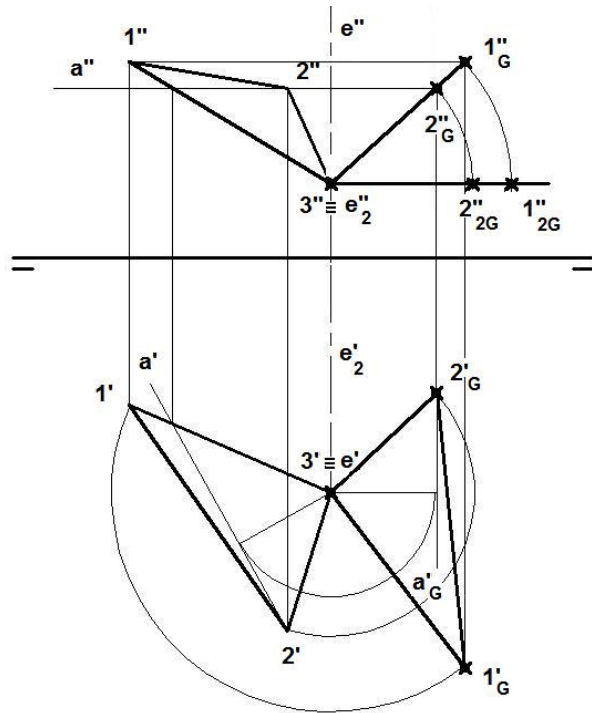
En un giro sobre un eje perpendicular al plano proyectante horizontal, los puntos mantienen sus cotas, de manera que trazando una línea auxiliar paralela a la línea de tierra desde $1''$ y $2''$, encuentro los puntos $1''_G$ y $2''_G$.

Uniéndolos con $3''$, obtengo la proyección sobre el plano proyectante vertical.

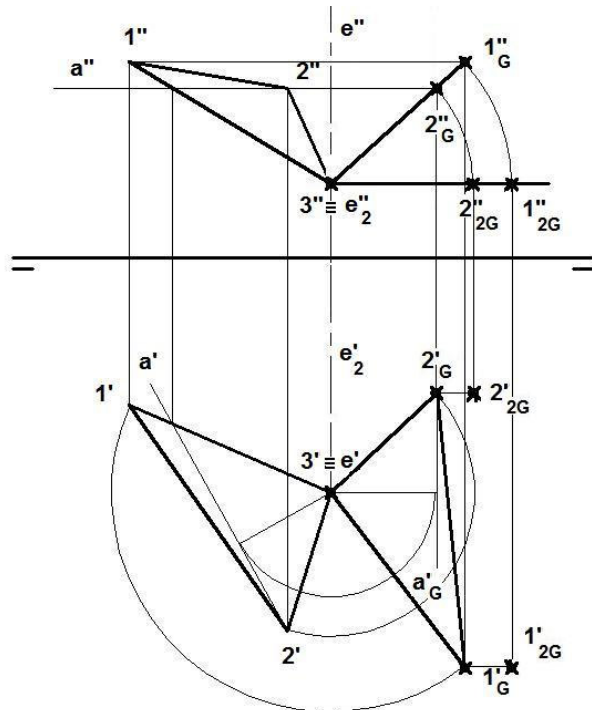
Como puedo observar, este giro me ubica la figura en un plano de perfil.



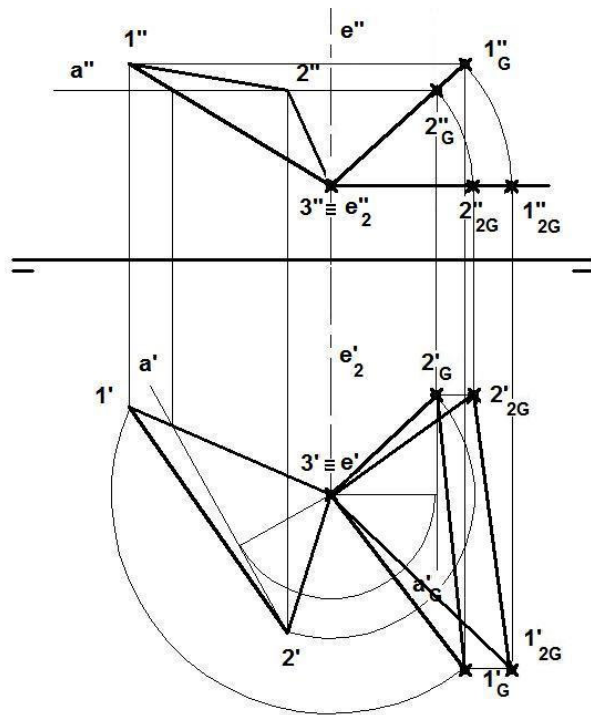
Ahora, hago pasar otro eje de giro (e_2), esta vez perpendicular al plano proyectante vertical, por el mismo punto 3. Sobre este eje, giro el plano que contiene a la proyección $3''-2''_G-1''_G$ hasta que se coloque paralelo a la línea de tierra, uniendo entonces los puntos $3''-2''_{2G}-1''_{2G}$ (proyección del segundo giro). Recordemos que si una figura está en un plano paralelo a alguno de los planos de proyección, se puede ver en su proyección su verdadera magnitud.



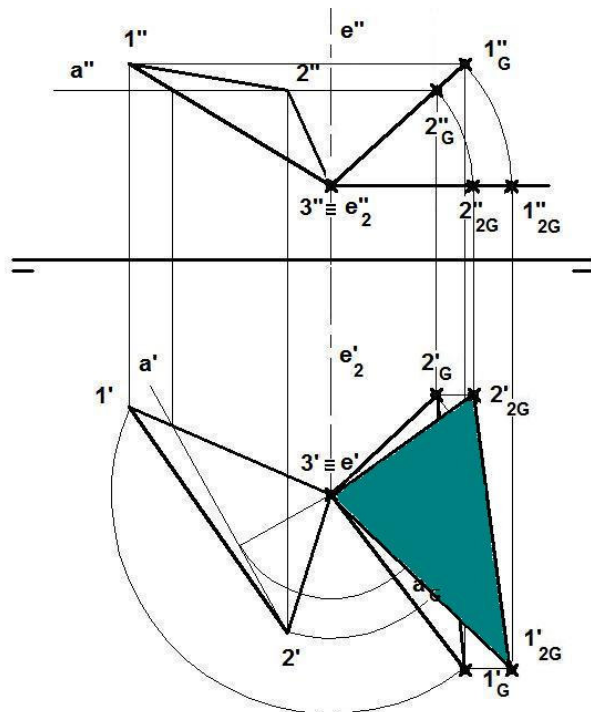
Recordando que los puntos que giran sobre un eje perpendicular al plano proyectante vertical mantienen constante su distancia al mismo, es decir su apartamiento, trazamos desde $2''_{2G}$ y $1''_{2G}$ líneas de proyección hacia el plano proyectante horizontal, las que interceptaremos con líneas auxiliares paralelas a la línea de tierra desde $2'_G$ y $1'_G$, encontrando los puntos $2'_{2G}$ y $1'_{2G}$.



Uniéndolos entonces entre sí los puntos $3'$, (único punto que no gira) con $2'_{2G}$ y $1'_{2G}$, obtengo en verdadera magnitud la figura triangular **1-2-3**.



Si lo coloreo, puedo observar con más claridad lo obtenido.



REBATIMIENTO

Otro método utilizado fundamentalmente para determinar las verdaderas magnitudes, es el de rebatimiento.

Consiste en girar una figura alrededor de un eje hasta ubicarla en un plano paralelo a uno de los planos de proyección, para que aparezca en verdadera magnitud en una de las proyecciones.

Es muy útil porque con un procedimiento simple, con un sólo eje de giro, podemos obtener el “molde” de la figura en verdadera magnitud.

Este eje de giro, lo obtengo de la traza de algún plano contra los de proyección.

Consideremos el plano oblicuo de la *figura 1*. Si lo abatimos sobre su traza horizontal hasta que coincida con el plano proyectante horizontal (*figura 2*), obtenemos la verdadera magnitud de la distancia **Hi V_o**.

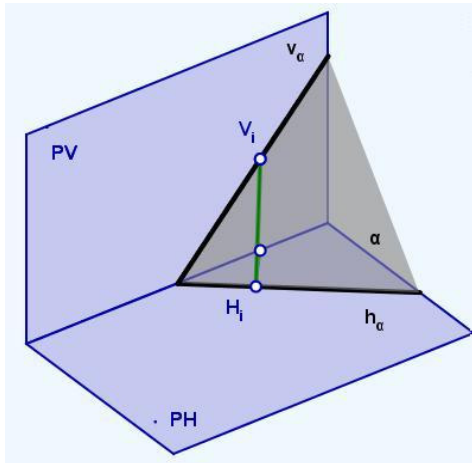


figura 1

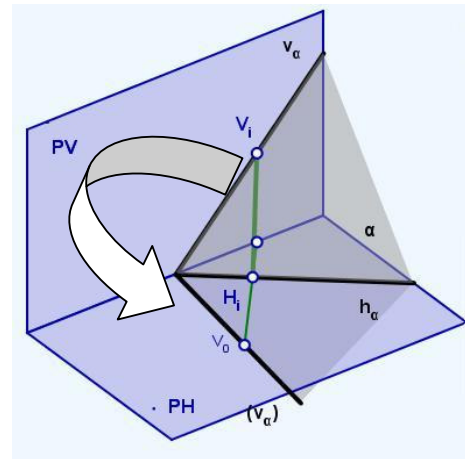
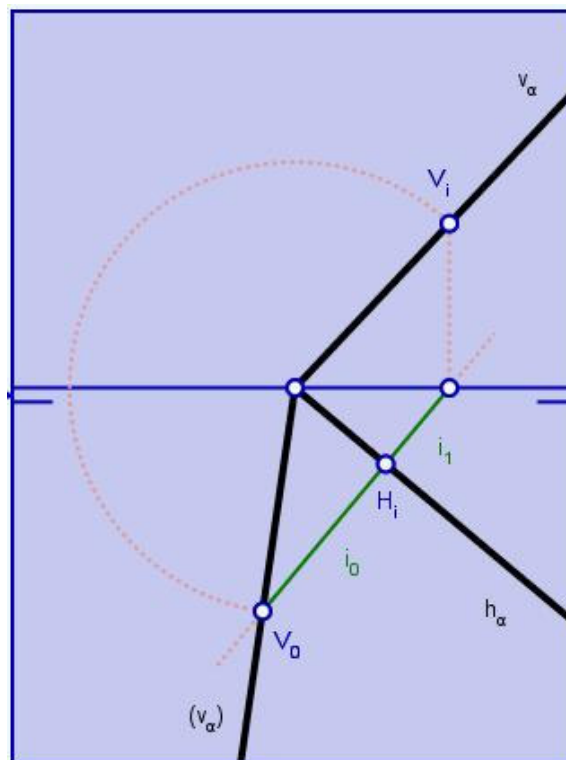


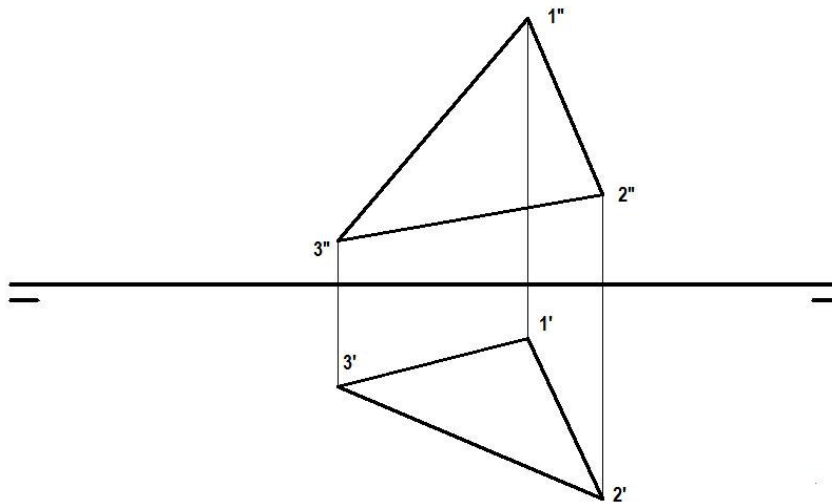
figura 2

La representación en Monge será la siguiente.

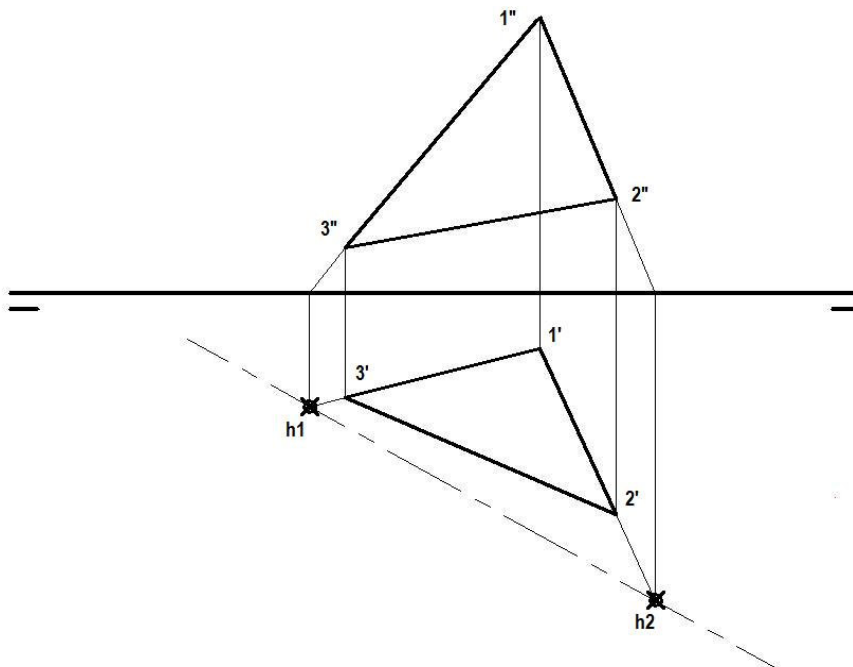


EJERCITACIONES

Supongamos que conociendo las proyecciones de una figura triangular contenidas en un plano oblicuo, debemos encontrar las verdaderas magnitudes de los lados del mismo.

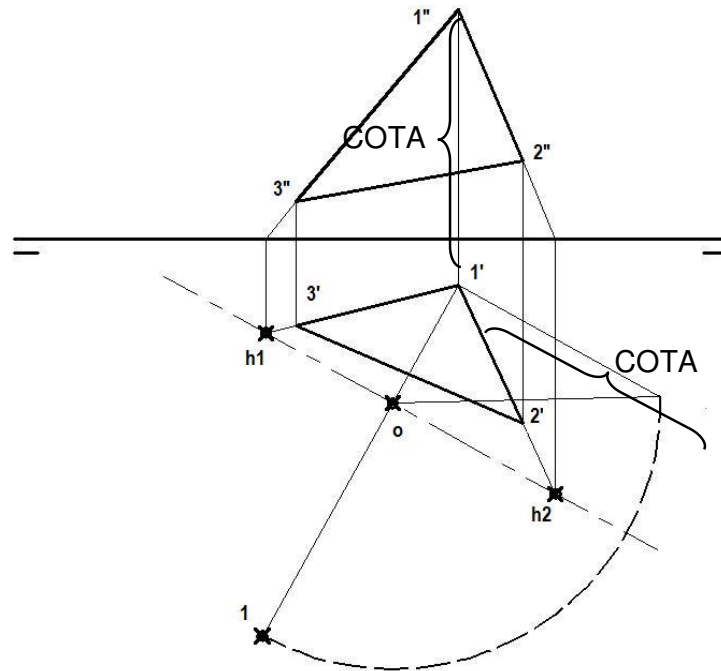


Hago pasar un plano de canto auxiliar por el lado **1-2**. Por su intersección con la línea de tierra bajo una línea proyectante auxiliar (que sería su traza en el plano horizontal) y prolongaría el lado **1'-2'** hasta cortar esa línea auxiliar. De esta manera obtengo el punto **h2**, que es un punto de la traza horizontal del plano oblicuo que contiene la figura. De manera semejante hago pasar otro plano de canto auxiliar por **1-3** para obtener otro punto de la traza (**h1**) y la puedo dibujar. Sobre esta traza voy a rebatir el plano de la figura.



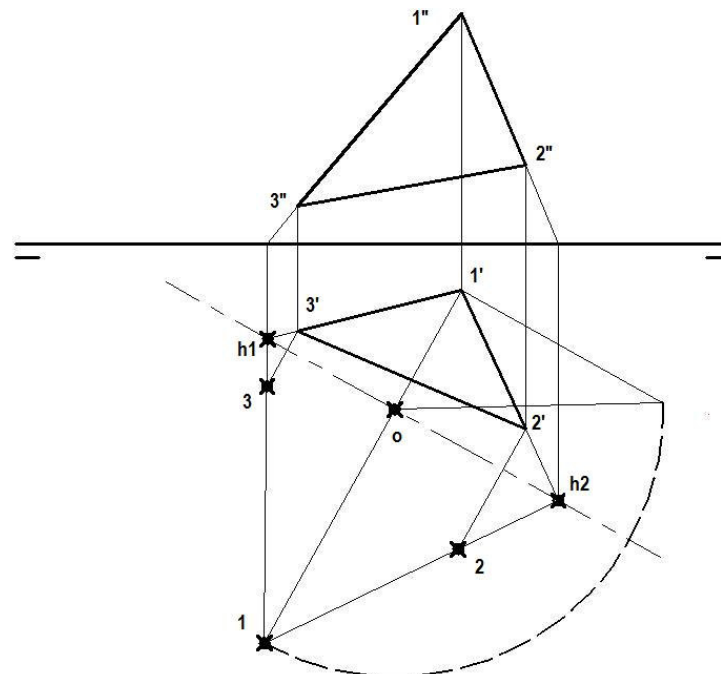
Desde $1'$ traza una línea auxiliar perpendicular a la traza. Esta línea se corta con la traza en o y contendrá el punto 1 rebatido. Dibuja una paralela a la traza que pase por la proyección $1'$ y marco sobre esta la **cota** del punto 1 .

Con centro en el punto o , dibujo un arco hasta cortar a la perpendicular a la traza y obtengo el punto 1 rebatido sobre el plano proyectante horizontal.

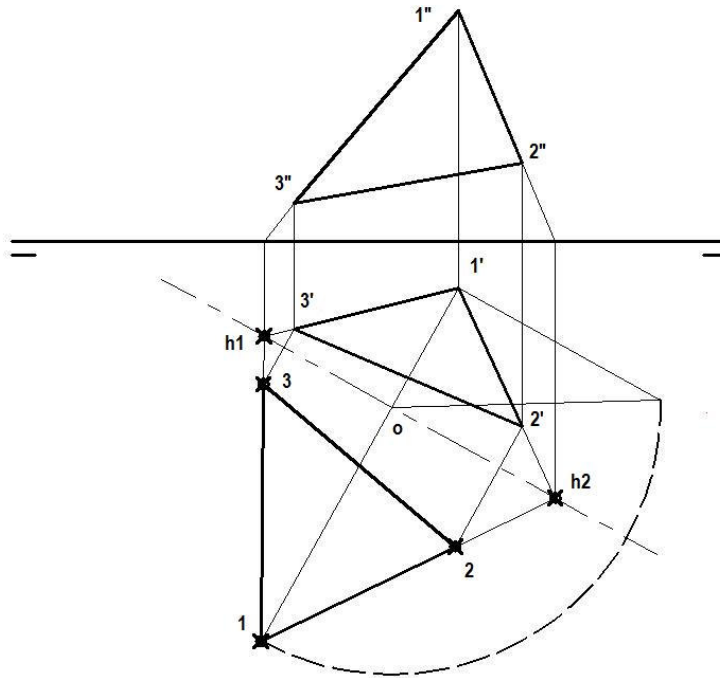


Sobre la auxiliar $h2-1$ encontraré el punto rebatido 2 . Esto lo hago proyectando en forma perpendicular a la traza desde el punto $2'$.

De modo semejante procedo para encontrar el punto rebatido 3 .



Finalmente, uniendo **1**, **2** y **3**, tengo en verdadera magnitud la figura triangular.



Bibliografía consultada.

- *Geometría descriptiva* (Donato Di Pietro)
- www.ieshuarte.com/dibujo (Francisco Molina)
- *Método Monge: Proyecciones Ortogonales Concertadas.* (D.I. Patricia Muñoz)
- *Universidad Centroamericana "José Simeón Cañas" (UCA)*
Facultad de Ingeniería y Arquitectura - Departamento de Organización del Espacio (Herbert Ernesto Granillo Dubón).
- www.tododibujo.com
- <http://www.educacionplastica.net>