Propiedad de la varianza muestral.

Sea $\{X_1; X_2; \cdots; X_n\}$ una muestra aleatoria de una distribución con valor esperado μ y varianza σ^2. Entonces la varianza muestral definida por

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[X_i - \overline{X}\right]^2\right\}$$

es un estimador insesgado de σ^2.

Nota. Tener presente que la equivalencia de las siguientes expresiones algebraicas:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \left(\overline{X}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right) + \left(\overline{X}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - 2\overline{X}\cdot n\cdot\overline{X} + n\cdot\left(\overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - n\cdot\left(\overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - n\cdot\left[\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n}\left(X_i\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

Muestra aleatoria: conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Demostración. Que S^2 sea un estimador insesgado de σ^2 significa que $E\left(S^2\right) = \sigma^2$, y es lo que hay que demostrar.

Como $\{X_1; X_2; \cdots; X_n\}$ es una muestra aleatoria, entonces se trata de un conjunto de variables aleatorias idénticas e independientes. Así:

$$E\left(X_i\right) = \mu \quad i = 1; 2; \cdots; n \text{ y } V\left(X_i\right) = \sigma^2 \quad i = 1; 2; \cdots; n.$$

De la fórmula práctica de calcular la varianza para una v.a. Y se deduce:

$$V(Y) = E\left(Y^2\right) - \left[E(Y)\right]^2 \Rightarrow E\left(Y^2\right) = V(Y) + \left[E(Y)\right]^2.$$

$$E\left(S^2\right) = E\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right]\right\} = E\left\{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]\right\}$$

$$E\left(S^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right)\right] - \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right\}$$

$$(n-1)E\left(S^2\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right)\right] - \frac{1}{n}\left\{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^2\right\}$$

Por independencia de las X_i, la varianza de su suma es la suma de las varianzas:

$$(n-1)E\left(S^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[V(X_i) + \left\{E\left(X_i\right)\right\}^2\right] - \frac{1}{n}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} V(X_i)\right) + \left[\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right]^2\right\}$$

$$(n-1)E\left(S^2\right) = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \mu^2\right)\right] - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\mu\right)^2\right]$$

$$(n-1)E\left(S^2\right) = n\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 + \left(n\mu\right)^2\right]$$

$$(n-1)E\left(S^2\right) = n\sigma^2 + n\mu^2 - \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{1}{n}n^2\mu^2$$

$$(n-1)E\left(S^2\right) = (n-1)\sigma^2 + (n-n)\mu^2 \Rightarrow (n-1)E\left(S^2\right) = (n-1)\sigma^2 \Rightarrow E\left(S^2\right) = \sigma^2$$