Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Mayo 2018

Alumno .... **Especialidad:** ....

Año de cursada …………………… **Profesor:** ……………………………………………

1	2 a b	3	4 a b c	Calificación

Ejercicio 1.

Sean A y B eventos de un mismo espacio muestral tales que: $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$; $P(\overline{A \cup B}) = 0{,}42$. ¿Son independientes A y B? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2.

Sea un examen del tipo múltiple opción con c opciones para cada respuesta donde $c \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. Un alumno estudió lo suficiente como para tener una probabilidad p de conocer la respuesta de cada pregunta. Si no conoce la respuesta, elige una opción al azar.

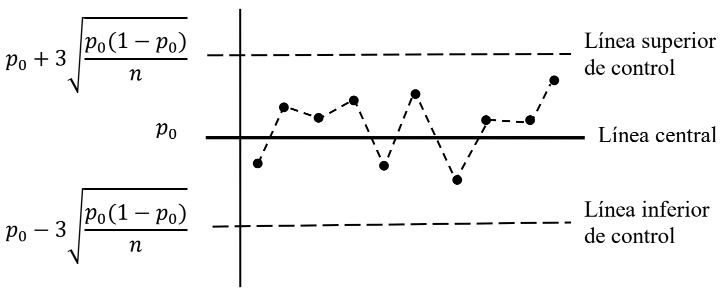
a) Si el alumno responde correctamente una pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que supiese la respuesta?

b) El examen consta de 10 preguntas de este tipo, con $c = 4$ opciones en cada una de ellas. Cada pregunta bien contestada vale 1 punto, sino 0 puntos. El alumno contesta cada pregunta en forma independiente según se explicara en el enunciado con $p = 0{,}5$. ¿Cuál es la nota esperada de su examen? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Enunciar el Teorema Central del Límite y dar un ejemplo donde se use.

Ejercicio 4. A fin de controlar la proporción de unidades defectuosas de artículos producidos en serie, los ingenieros de control de calidad toman grandes muestras al azar de tamaño n, a intervalos regulares y trazan las proporciones de unidades defectuosas en las nuestras en un diagrama de control como el de la figura. El proceso se considera bajo control cuando la proporción poblacional de defectuosos es p_0 y la proporción muestral de defectuosos se ubica entre los límites superior e inferior del control 3-sigma dados por

$$p_0 + 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \text{ y } p_0 - 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}.$$



a) ¿Con qué test de hipótesis se vincula este gráfico de control? Detallar cuál es el estadístico de prueba y que distribución tiene; cuáles son las hipótesis nula y alternativa.

b) ¿Qué significado tienen los errores tipo I y II, respectivamente en este test?

c) ¿Cuál es el valor del nivel de significación α del test?

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Julio 2018 T1

Alumno .... Especialidad: ....

Año de cursada …………………… Profesor: …………………………………………

1 a b	2 i ii	3 a b	4 a b	Calificación

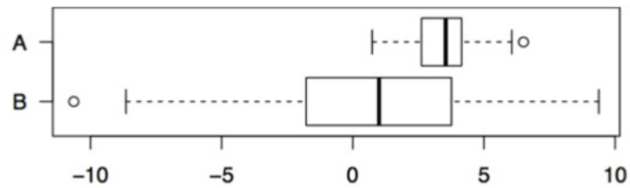
Calificación Final: ……………………………………..

Ejercicio 1. Tres personas juegan con un dado de la siguiente forma. Cada una lanzará el dado a lo sumo una vez. Si la primera en lanzar saca un seis, gana y se acaba la partida; si no saca un seis, lanza la segunda, que gana si obtiene un cinco o un cuatro, acabando la partida. Si tampoco gana ésta, lanza el dado la tercera, que gana si obtiene tres, dos o uno. Aunque no gane la tercera, la partida se termina.

a) En una partida sin ganadores, ¿cuál es la probabilidad de que el primero que lanza haya obtenido un 5?

b) Sea Y la variable aleatoria que indica la cantidad de veces que se tira el dado. Calcular el valor esperado de Y.

Ejercicio 2. La figura corresponde a los diagramas de caja y bigote de dos distribuciones A y B. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones puede formularse observando los gráficos y justificar concisamente el porqué.



i) La mediana de A es mayor a la de B.

ii) Ambas distribuciones son prácticamente simétricas.

Ejercicio 3. Sea un estimador insesgado.

a) Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones sobre el estimador es verdadera o falsa, justificando concisamente el porqué.

i) Su valor esperado coincide con un valor muestral.

ii) Su valor esperado coincide con un parámetro poblacional.

iii) Es de varianza mínima.

b) ¿Para qué se usan los estimadores? Dar un ejemplo e indicar qué estima.

Ejercicio 4.

a) En una prueba de hipótesis cuyas hipótesis nula y alternativa se simbolizan por H_0 y H_a, identificar cada una de las siguientes probabilidades.

i) Equivocarse al rechazar H_0.

ii) Equivocarse al no rechazar H_0.

iii) No rechazar H_0 cuando H_0 es válida.

b) En referencia a un intervalo de confianza para la media poblacional de una población con distribución Normal con desvío conocido basado en una muestra aleatoria, si se aumenta el nivel de confianza entonces aumenta la amplitud del intervalo. ¿Es esta afirmación verdadera o falsa? Justificar claramente la respuesta.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRH – Julio/Agosto 2018 – Tema 2

Apellido(s): .... **Nombre(s): ....**

Especialidad: .... **Docente: ....**

Ejercicio 1 a b c	Ejercicio 2 a b c	Ejercicio 3 a b	Ejercicio 4 a b c	Calificación

Calificación definitiva: ……………………………………..

Ejercicio 1.- Debido a la crisis energética, se está evaluando la posibilidad de cortar el suministro eléctrico en los hogares entre las 18:00 y las 22:00 hs. Esta decisión se tomará si el consumo promedio, μ, en el horario mencionado supera a μ_0.
Sean *a* y *b* números reales positivos, de módulo menor o igual a 1.

i) Como la decisión tendrá un alto costo político, es necesario que la probabilidad de cometer un error al afirmar que el consumo medio es mayor que μ_o cuando en realidad no lo es, sea igual a *a*.
ii) Se quiere que la probabilidad de no cortar el suministro eléctrico cuando en realidad no es necesario sea *b*.

Se supone que el consumo de electricidad en los hogares tiene una distribución normal.

a) Plantear las hipótesis adecuadas para el problema indicando el estadístico de prueba y su distribución.
b) Las probabilidades indicadas en (i) y (ii), ¿son errores? ¿Por qué? ¿Cómo se denomina a la cantidad indicada en (ii)?
c) Calcular las probabilidades de los errores Tipo I y II, siempre que no estén en el enunciado.

Ejercicio 2.-
a) Definir sucesos mutuamente excluyentes y sucesos independientes. Expresar las definiciones en lenguaje formal y en lenguaje coloquial.
b) Indicar cómo se calcula la probabilidad de la unión de dos sucesos. Escribir la fórmula y demostrarla explicando todos los pasos seguidos.
c) Determinar cómo se modifica la fórmula anterior en el caso de sucesos mutuamente excluyentes y en el caso de sucesos independientes.

Ejercicio 3.- Las personas adultas mayores de 40 años enferman de la enfermedad B sólo si tuvieron de niños la enfermedad A. Los que sí tuvieron ambas enfermedades representan el 18% de los casos. Y la probabilidad de que haber tenido A es 0,45.
a) Construir una tabla de doble entrada que indique la situación del problema. ¿Hay algún valor inusual en la tabla? Si lo hay, indicar cuál es y por qué.
b) Construir también un diagrama de árbol asociado al problema, indicando el valor de la probabilidad de ocurrencia en cada una de las ramas y qué representa formalmente dicho valor.

Ejercicio 4.- Para cada uno de los siguientes enunciados, indicar si es verdadero (V) o falso (F). Si es falso, justificar por qué y enunciar una aseveración correcta.
a) Para poder realizar cálculos de probabilidades mediante la distribución hipergeométrica, es necesario conocer la estructura de la población.
b) En una distribución de probabilidad de una v.a.d., ningún valor de probabilidad puede ocurrir más de una vez.
c) Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de la que se conoce su valor esperado. Esta información es suficiente para escribir su función de densidad.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH

Alumno .... Especialidad: ....

Año de cursada …………………… Profesor: …………………………………………

1	**2** **a b c**	**3** **a b**	**4**	**Calificación**

1) Una fábrica produce X_i artículos en el día i con i=1, 2,…, n donde las X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valor medio 5 y varianza 9. Resolver una sola de las siguientes cuestiones. Justificar el planteo.
a) Hallar, aproximadamente, el mayor valor de n tal que
$$P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 200 + 5n\right) \leq 0.05\,.$$
b) Sea N el primero de los días en el cual el número de artículos totales producidos excede a 1000. Calcular, aproximadamente, la probabilidad de que $N \geq 220$.

2) Se está pensando en implementar un nuevo método de producción de cierto artículo para mejorar el rendimiento de la materia prima que se utiliza en su desarrollo, medido en el valor medio de los costos de producción del artículo. Este cambio involucra la compra de nuevas maquinarias y el adiestramiento del personal. Se decide concretar la decisión basándose en una prueba de hipótesis. Se pueden plantear dos premisas iniciales que dan lugar a la hipótesis nula al plantear el test: una es que el nuevo método mejora el rendimiento (el costo de producción medio baja con respecto al método actual) y la otra es que el nuevo método no mejora el rendimiento.
a) ¿Cuál de las dos hipótesis le conviene tomar como hipótesis nula al gerente técnico? Justificar la respuesta.
b) ¿Qué tipo de error cometería en los siguientes casos: i) la hipótesis de que el nuevo método mejora el rendimiento se acepta erróneamente? ii) la hipótesis de que el nuevo método mejora el rendimiento es erróneamente rechazada?
c) Explicar cómo se implementa el test de hipótesis.

3) Sean X y Y variables aleatorias independientes que tienen una varianza común σ^2 y se definea $W = X - aY$, con $a \neq 0$. Calcular:
a) la covarianza entre X y W.
b) el coeficiente de correlación lineal entre X y W.

Recordar que si R y T son dos variables aleatorias:
$$Cov(R,T) = E(RT) - E(R)E(T) \;\text{ y }\; Corr(R,T) = Cov(R,T)/[V(R)V(T)]^{1/2}$$

4) Sean A, B y C tres eventos de un espacio muestral. Probar que si $P(A \cap B) \neq 0$, entonces:
$$P[C\,/\,(A \cap B)] = \{[P[(C \cap A)\,/\,B)]\}\,/\,P(A\,/\,B)$$

Probabilidad y Estadística. UTN-FRH – Diciembre 2018 – T1 07 12 2018

Apellido(s): …………………………………. Nombre(s): …………………………………….

Año de Cursado: ……………………………Docente: ……………………………………….

Ejercicio **1** **a b c**	Ejercicio **2**	Ejercicio **3** **a b**	Ejercicio **4** **a b**	**Calificación**

1) Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial.

a) Indique sus parámetros, su recorrido y presente su función de densidad y distribución.

b) Indique su media y su varianza.

c) Supongamos que la duración garantizada de un componente electónico con una probabilidad 0,90 es de 4000 hs. ¿Dicho valor es el primer decil ó el noveno decil? Nota: se considera que la duración en hs de dicho componente sigue una distribución exponencial.

2) Defina error cuadrático medio de un estimador de un parámetro poblacional y deduzca la expresión que lo vincula con el sesgo y la varianza del estimador.

3) Se está estudiando el rendimiento de un proceso químico. Se sabe que el desvío del rendimiento de este proceso es 2 % y que se distribuye normalmente. En los últimos 6 días de operación de la planta se obtuvieron los siguientes rendimientos expresados en porcentajes: 91,6 ; 89,0 ; 90,9 ; 91,3 ; 92,3 ; 91.

a) ¿Se tienen suficientes evidencias para afirmar que el rendimiento medio supera al 90 % , usando un nivel de significación de 0,05? Haga un completo y detallado ensayo de hipótesis acorde a la situación planteada.

b) ¿Cuál es la probabilidad (en forma aproximada) de concluir que el rendimiento es superior al 90 % si el verdadero rendimiento medio fuera del 90,9 % ? ¿Es esta probabilidad un error?

4) Considere dos variables aleatorias discretas cuya función de probabilidad conjunta se presenta en la siguiente tabla

X / Y	0	1	2
0	0	1/6	2/6
1	1/6	0	0
2	1/6	1/6	0

a) Determine la covarianza entre ambas variables.

b) Diga si las variables X e Y son independientes. Justifique claramente la respuesta.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Diciembre 2018 T3

Alumno .... **Especialidad:** ....

Año de cursado …………………… **Profesor:** …………………………………………

1	2a 2b	3	4	5	Calificación propuesta

Calificación Final: ……………………………………..

Ejercicio 1. Completar la siguiente tabla con SI o con NO.

En una colección de mediciones numéricas, el 50% central de los datos se encuentra siempre:

Característica	SI o NO
En un intervalo simétrico con respecto a la mediana	
En un intervalo simétrico con respecto a la media	
Por encima del percentil 25	
En un intervalo de amplitud igual al rango intercuartílico	
En un intervalo simétrico con respecto al segundo cuartil	

Justificar las respuestas.

Ejercicio 2. Una prueba de laboratorio para diagnosticar cierta enfermedad es tal que $P\left(A/F\right) = P\left(\overline{A}/\overline{F}\right) = 0{,}95$ donde

A: la persona examinada contrajo la enfermedad.

F: el resultado de la prueba indica que la persona examinada contrajo la enfermedad.

a) Supongamos que la probabilidad de que una persona que se examina padezca la enfermedad es 0,005, ¿cuál es la probabilidad de que una persona que según la prueba contrajo la enfermedad la padezca?

b) Si $P\left(A/F\right) = P\left(\overline{A}/\overline{F}\right) = p$, y $P(F) = 0{,}005$, ¿para qué valor de p es $P\left(F/A\right) = 0{,}95$? Interpretar el resultado.

Ejercicio 3. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de las que se conoce que $P(X > 3) = P(Y > 3) = e^{-6}$. Se definen las variables $U = X - Y$ y $W = -3Y$. Hallar el valor de la covarianza entre U y W.

Ejercicio 4. Una compañía debe diseñar un sistema de muestreo rutinario para controlar la recepción de grandes partidas de un producto. El proveedor desea tener la seguridad de que le rechacen a lo sumo el 5% de las partidas buenas, que son aquellas que cumplen con la especificación de que la resistencia media a la rotura mínima es de 1250 kg. A su vez, el cliente desea rechazar al menos el 90% de las partidas malas, que son aquellas cuya resistencia media es inferior a 1100 kg. Ambos firman un contrato en el cual constan las condiciones anteriores, estableciéndose que la decisión de rechazar o aceptar una partida se tomará en función del resultado de una muestra de n unidades elegidas al azar de la misma. Existen registros históricos por los cuales se sabe que es desvío de la resistencia a la rotura es de 180 kg.

¿A qué tipo de prueba de hipótesis responde el planteo? Definir la variable aleatoria y el estadístico de prueba. Explicitar, de haberlas, todas las justificaciones adicionales que permiten este planteo. ¿Cuál es la información concreta que se da en el enunciado?

Deducir la fórmula general del tamaño n de la muestra para este tipo de test.

Examen Final de Probabilidades y Estadística - UTN FRH – 21/12/18

Alumno .... Especialidad: ....

Año de cursado ……………………………. Profesor: ……………………………….

1	2a 2b	3a 3b	4a 4b	5	NOTA

1) Completar la siguiente tabla con SI o con NO.

En una colección de mediciones numéricas, el 50% central de los datos se encuentra siempre:

Característica	SI o NO
En un intervalo simétrico con respecto a la mediana	
En un intervalo simétrico con respecto a la media	
Por encima del percentil 25	
En un intervalo de amplitud igual al rango intercuartílico	
En un intervalo simétrico con respecto al segundo cuartil	

Justificar las respuestas.

2) Una cobertura se produce superponiendo capas muy finas de pintura. El espesor X de **cada capa** es una variable aleatoria Uniforme (0,08 mm; 0,10 mm).

a) Calcular $P(|X - E(X)| < 0{,}005/X > 0{,}09)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cobertura de 40 capas supere los 3,7 mm? Justificar el planteo de este cálculo.

3) Una urna contiene 3 bolillas numeradas del 1 al 3. Se realizan dos extracciones sin reposición. Sea X el número obtenido en la primera extracción y sea Yel número obtenido en la segunda extracción.

a) Calcular $Cov(X, Y)$.

b) ¿Son X e Y independientes? Justificar.

4) Se realizó un estudio para determinar qué servicios prefieren los adultos en la telefonía celular. Los resultados del estudio concluyeron que 73% de usuarios de teléfonos celulares deseaban servicios de e-mail, con un margen de error de ±4% utilizando un nivel de confianza 0,88.

a) Para realizar esta estimación, se utilizó el estimador $\hat{p}$. Indicar cuál es la distribución de probabilidad del $\hat{p}$ justificando el origen de la misma. Indicar además cuáles son las condiciones que se requieren en este caso para que los resultados sean válidos.

b) Si se desea incrementar el nivel de confianza al 95%, manteniendo el tamaño de muestra, ¿Cuál será el nuevo error de muestreo?

5) Sean dos eventos A y B tales que $P(A/B) = P(\bar{A}/\bar{B}) = 0{,}95$. Se sabe que $P(B) = 0{,}005$. Hallar $P(B/A)$. Desarrollar el cálculo en forma clara.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – 01/03/19

Alumna/o .... Especialidad: ....

Año de cursada ……………………. Profesor: ………………………………………..

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	Calificación

Unas breves palabras. Cuidar la claridad de resolución de los problemas, evitando los cálculos dispersos, y dar la respuesta que se pide. Deben definirse todas las letras que representan eventos y variables aleatorias en cada problema. Cualquier aclaración que se considere conveniente, escribirla. Utilizar cuatro decimales al expresar las probabilidades.

Ejercicio 1. Se tienen dos cajas A y B las cuales contienen un total de t bolas cada una. La caja A contiene m bolas blancas y n bolas negras; la caja B contiene el doble de bolas blancas y la mitad de bolas negras que la caja A. Se elige una caja de forma tal que la probabilidad la elegida sea la caja B es el doble de probabilidad de sea la caja A.

a) Si al elegir una bola resultó negra, ¿qué caja fue más probable haber elegido? Justificar la respuesta.

b) ¿Son independientes el color de la bola obtenida y la caja elegida? Justificar.

Ejercicio 2. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias Bernoulli de parámetros p_1 y p_2 respectivamente.

a) Si se conoce que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$, escribir la distribución conjunta de probabilidades $p_{X1,X2}$ en una tabla. ¿Son independientes X_1 y X_2?

b) Indicar si la siguiente proposición es verdadera o falsa:
"Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias Bernoulli de parámetros p_1 y p_2 de las que se conoce que $\text{Cov}(X_1,X_2)=0$, entonces X_1 y X_2 son independientes."

c) Si $p_1 = p_2 = 0{,}7$ y $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0{,}1$, calcular $\text{Cov}(Y_1,Y_2)$, siendo $Y_1=X_1(1-X_2)$ y $Y_2=X_2(1-X_1)$.
Sugerencia: hallar previamente la distribución conjunta de probabilidades $p_{Y1,Y2}$.

Ejercicio 3. La dilatación de ciertos rieles de ferrocarril de 50 metros cuando la temperatura varía de 10°C a 40°C sigue una distribución Normal, pero no se conoce su valor medio, por lo que se requiere de su estimación. Para ello se tomó aleatoriamente una muestra de la dilatación de 10 rieles obteniendo los siguientes resultados (en metros):

0,008; 0,032; 0,023; 0,015; 0,022; 0,004; 0,028; 0,042; 0,06, 0,018

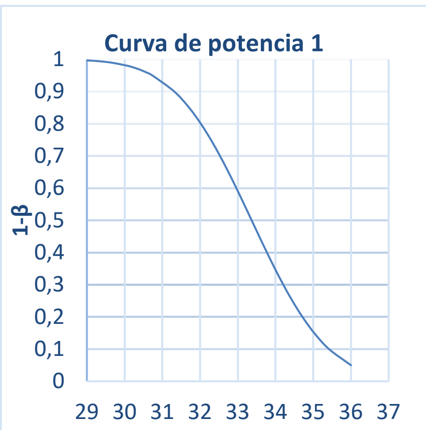
a) Determinar un intervalo de confianza del 98% para el valor medio de dilatación e interpretar el resultado.

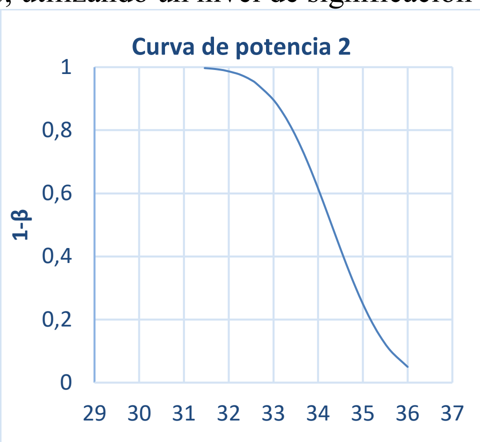
b) Se desea verificar si el valor medio es mayor a 0,02 metros. Si así fuese habría que revisar las instalaciones debido al espacio ya establecido entre riel y riel. ¿Cuál sería la conclusión a un nivel de significación de 0,05? ¿Qué error se podría estar cometiendo al tomar esta decisión?

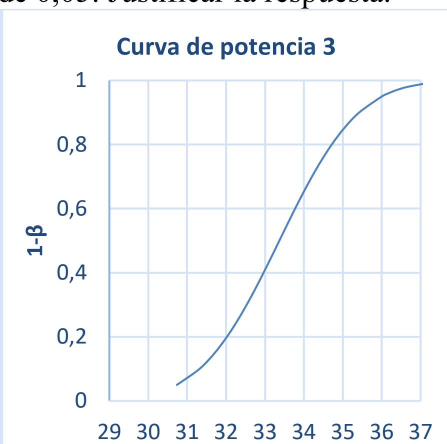
Ejercicio 4. Se ha propuesto un nuevo diseño para el sistema de frenos de un automóvil. Se sabe que, para el sistema actual, el verdadero valor medio de distancia de frenado bajo ciertas condiciones específicas es μ_0. Se propone que el nuevo diseño se ponga en práctica, sólo si al medir n distancias de frenado el promedio muestral resulte menor a 33,368 m.

a) Establecer las hipótesis correspondientes al problema en estudio, el estimador del parámetro y la condición de rechazo en función de μ_0. Indicar cualquier supuesto necesario.

b) ¿Cuál de las siguientes curvas de potencias es el correspondiente al análisis? A partir del gráfico seleccionado determinar los valores de μ_0 y n, utilizando un nivel de significación de 0,05. Justificar la respuesta.







Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Febrero/Marzo 2019 – T3

Alumno .... **Especialidad:** ....

Año de cursado …………………… **Profesor:** ………………………………………

1	2a 2b	3	4	Calificación propuesta

Calificación Final: ……………………………………..

Ejercicio 1. Se tienen dos cajas A y B las cuales contienen un total de t bolas cada una. La caja A contiene m bolas blancas y n bolas negras; la caja B contiene el doble de bolas blancas y la mitad de bolas negras que la caja A. Se elige una caja de forma tal que la probabilidad la elegida sea la caja B es el doble de probabilidad de sea la caja A. Esa caja, sin rotular, se envía a un operador. Dicho operador selecciona una bola de la caja que le entregan. Si la bola es negra, rotula la caja con la letra A; si es blanca, rotula la caja con la letra B.

¿Cuál es la probabilidad de que la caja quede mal rotulada? La respuesta debe ser numérica. Justificar los pasos del cálculo.

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Sea $Y = n - X$.

a) Describir un experimento aleatorio donde se pueda usar el modelo binomial sin aproximación. ¿Qué representa X y qué representa Y en dicho experimento?

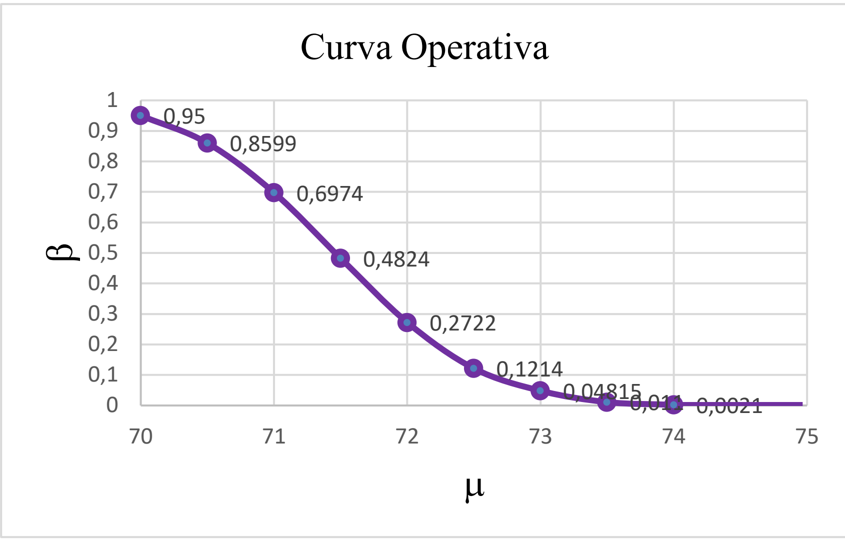
b) Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa.

"Si $X \sim Bi(n, p)$ y se define $Y = n - X$, entonces la distribución de Y es conocida"

Justificar la respuesta. Si resultase verdadera, ¿qué tipo distribución tiene Y y cuáles son sus parámetros?

Ejercicio 3. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes con distribución normal de valor medio nulo, de las además se conoce que $P(X > 3) = P(Y < -3) = 0,0668$. Se definen las variables $U = 5X - Y$ y $W = -Y$. Hallar el valor de la covarianza entre U y W. Justificar los pasos del cálculo.

Ejercicio 4. Sea un prueba de hipótesis para la media μ de una variable aleatoria X con distribución normal basado en una muestra de tamaño n con un nivel de significación α con σ conocido. El estadístico de prueba usado es $\bar{X}$. La figura corresponde a la curva operativa (curva OC), esto es el gráfico de β en función de μ.



a) ¿Se puede identificar si la prueba es de cola derecha, izquierda o de dos colas? En caso afirmativo plantear la hipótesis nula y alternativa.

b) ¿Se puede hallar el nivel de significación? En caso afirmativo dar el valor.

c) ¿Es posible identificar el valor de μ_0?

d) Si se conoce que n=100, ¿cuál es el valor de σ?

Justificar en forma clara la obtención de las respuestas.