

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH

Alumno: **Especialidad:**

Profesor con quien cursó: **Año de cursado:**

		1			2	3			Calificación Propuesta
a	b	c	d	e	I	II	III		

Calificación Final:

Problema 1. El importe de las compras de un cliente de un comercio expresado en \$, X , se distribuye exponencialmente con valor esperado \$50. Los importes de las compras entre clientes son independientes. Se ha decidido bonificar a los próximos 100 clientes de la siguiente forma:

- Importes inferiores a \$50, se bonifican \$3,00.
- Importes entre \$50 y \$75, se bonifican \$4,00.
- Importes que superen los \$75, se bonifican \$7,00.

- a) Escribir la función de densidad y la función de distribución de X .
- b) Definir la variable Y como la bonificación en \$ a un cliente y mencionar las características de la misma, su valor esperado y su varianza.
- c) Entre los tres primeros clientes de los próximos 100, ¿cuál es la probabilidad de efectuar exactamente \$21,00 de bonificación?

Sea W la bonificación total, expresada en \$, realizada a los próximos 100 clientes.

- d) ¿A cuánto \$ se espera ascienda W ? Justificar el planteo y realizar el cálculo adecuado para dar la respuesta.
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que W sea mayor a \$430? Justificar el planteo y realizar el cálculo adecuado para dar la respuesta.

Problema 2. Con el objetivo de evaluar el rendimiento de los trabajadores, una empresa registra el tiempo que tardan en realizar una determinada tarea. Los resultados obtenidos de un total de 80 encuestados se dan en la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

Intervalo (min)	(0; 2]	(2; 4]	(4; 8]	(8; 9]	(9; 10]
f_i	32	24	12	8	4

¿Qué porcentaje de los trabajadores encuestados demora entre 1 y 7 minutos en la realización de la tarea?

Problema 3. Indicar la opción correcta para la respuesta de cada una de las siguientes preguntas. Justificar en cada caso.

Pregunta I. Sean X y W dos variables aleatorias tales que $E(X)=3$, $E(W)=8$, $E(X \cdot W)=18$ entonces:

- a) X y W son independientes; b) X y W son dependientes; c) no se puede decidir si X y W son independientes o dependientes.

Pregunta II. En una prueba de hipótesis, con un menor nivel de significación la probabilidad de rechazar una hipótesis nula que es realmente verdadera:

- a) disminuye; b) aumenta; c) no varía; d) no se sabe.

Pregunta III. En una prueba de hipótesis, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera la hipótesis alternativa se denomina:

- a) potencia de la prueba; b) área encerrada por la región crítica; c) nivel de confianza de la prueba; d) ninguna de las anteriores.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Julio 2017 (T1)

Alumno Especialidad:

Año de cursada Profesor:

1			2			3	4				Calificación
a	b	c	a	b	c		a	b	c	d	

Ejercicio 1.

Sean A y B dos eventos de probabilidad no nula definidos en un mismo espacio muestral. Establecer si cada una de las siguientes proposiciones verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

- a) Si $P(A) > 1/2$ y $P(B) > 1/2$ entonces $P(A \cap B) > 0$.
- b) Si $P(A) \leq P(B)$ entonces $A \subseteq B$.
- c) $P(B) = P(A/B) = P(C/A \cap B) = p$ con $0 < p < 1$, entonces $P(A \cap B \cap C) = p^3$.

Ejercicio 2. Sea una sucesión infinita de ensayos independientes Bernoulli donde la probabilidad de éxito de cada uno es p con $0 < p < 1$. Si X es el número de ensayos hasta que se obtiene el primer éxito entonces X es una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p , $X \sim \text{Geo}(p)$ con $0 < p < 1$.

- a) Deducir que $P(X \geq n) = (1 - p)^{n-1}$ con $n \in \mathbf{N}$.
- b) Demostrar que X carece de memoria, esto es $P(X \geq n + h / X \geq n) = P(X \geq h)$ con $n, h \in \mathbf{N}$.
- c) Sea $Y \sim \text{Geo}(p)$, idéntica e independiente de X , vinculada al mismo experimento. Se define $W = X + Y$. Indicar el recorrido de W , R_W , y calcular las probabilidades para los tres primeros valores de R_W .

Recordatorio: Suma de los m primeros términos de una sucesión geométrica:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{m-1} = a \frac{1 - q^m}{1 - q} \text{ con } q \neq 1, m \in \mathbf{N}.$$

Ejercicio 3. Las puntuaciones en un examen siguen, en una cierta población, una distribución normal de media 50 y desvío estándar 10. Si se quiere clasificar la población en cuatro grupos de igual tamaño, ¿cuáles serán las puntuaciones que delimiten estos grupos?

Ejercicio 4. Indicar cuál es la opción válida. Justificar la respuesta.

- a) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta la hipótesis alternativa es:
 - La potencia de la prueba.
 - El nivel de confianza.
 - El área de la región crítica.
 - Ninguna de las anteriores.
- b) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es:
 - La potencia de la prueba.
 - El nivel de confianza.
 - El área de la región crítica.
 - Ninguna de las anteriores.
- c) Se realiza un test de hipótesis bilateral para la media μ de una variable aleatoria con distribución normal, con nivel de significación α .
 - i) La región de no rechazo de H_0 es:
 - A la derecha de un valor crítico.
 - A la izquierda de un valor crítico.
 - Entre dos valores críticos.
 - Fuera del intervalo comprendido entre dos valores críticos.
 - ii) Se rechaza H_0 cuando el valor- p es:
 - Mayor que α .
 - Menor que α .
 - Menor que $\alpha/2$.
 - Mayor que $\alpha/2$.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Julio 2017 (T2)

Alumno **Especialidad:**

Año de cursada **Profesor:**

1	2	3	4	5	6 a b	Calificación

Ejercicio 1. Un príncipe italiano preguntó en una ocasión al famoso físico Galileo (1564-1642, Pisa - Italia), ¿por qué cuando se lanzan tres dados, se obtiene con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque se puedan obtener de seis maneras distintas cada una? Dar una respuesta justificada a la pregunta del príncipe. Calcular las dos probabilidades.

Ejercicio 2. En el punto de partida de un laberinto hay tres orificios iguales A , B y C . Si el individuo de prueba elige A , vuelve al punto de partida después de recorrer dos metros. Si elige B recorre cinco metros y vuelve al mismo punto. Si elige C sale al exterior recorriendo un metro. ¿Cuál es el valor medio de la distancia que recorre el individuo de prueba antes de salir, si siempre elige un orificio al azar entre los que son distintos de los seleccionados en veces anteriores?

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de valor esperado $E(X)=b$ con $b>0$. Calcular el primer cuartil. Realizar el planteo adecuado.

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria, probar que $Cov(X, -X + a) < 0 \forall a$ constante y cualquiera sea la distribución de X .

Ejercicio 5. El consumo de cierto producto en una familia de 4 miembros durante los meses de verano es una variable aleatoria X con distribución uniforme entre $(a, a+400)$ con $a \in \mathbf{R}_{>0}$. Sea $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ una muestra aleatoria de consumos de distintas familias. Demostrar que la media muestral \bar{X} es un estimador sesgado de a .

Recordatorio: $X \sim U(a, b)$ con $a < b, E(X) = \frac{a+b}{2}; V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Ejercicio 6. Indicar cuál es la opción válida. Justificar la respuesta.

- | | |
|---|--|
| <p>a) La probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> La potencia de la prueba. <input type="checkbox"/> El nivel de confianza. <input type="checkbox"/> El área de la región crítica. <input type="checkbox"/> Ninguna de las anteriores. | <p>b) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta la hipótesis alternativa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> La potencia de la prueba. <input type="checkbox"/> El nivel de confianza. <input type="checkbox"/> El área de la región crítica. <input type="checkbox"/> Ninguna de las anteriores. |
|---|--|

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Septiembre 2017

Alumno: **Especialidad:**

Profesor con quien cursó: **Año de cursado:**

1	2 a b	3	4 a b c	5	Calificación Propuesta

Calificación Final:

Problema 1. Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral E . ¿Es posible que se verifique en simultáneo que $P(A/B) = \frac{1}{3}, P(B/A) = \frac{1}{10}, P(B) = \frac{1}{2}$? En caso negativo, justificar la respuesta. En caso afirmativo, dar un ejemplo.

Problema 2. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de distribución está definida por

$$F(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1. \\ b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Determinar las constantes a y b . Justificar la respuesta.
- b) Hallar el valor esperado de X , $E(X)$.

Problema 3. Una moneda equilibrada se tira 50 veces. Usando el Teorema Central del Límite, estimar la probabilidad de que menos de 20 de las tiradas resulten en cara. Presentar el planteo adecuado, definir la/s variable/s usada/s y la distribución correspondiente.

Problema 4. Se realiza un test de hipótesis sobre la efectividad de una droga nueva en el tratamiento de una dolencia específica. El test tiene las siguientes hipótesis nula y alternativa, respectivamente.

H_0 : La droga no es efectiva. H_1 : La droga es efectiva.

- a) Si se decide “no rechazar” la hipótesis nula, ¿cuál deberá ser la presentación de la conclusión? Marcar la correcta.
 - () Hay evidencia suficiente para creer que la droga no es efectiva.
 - () Hay evidencia suficiente para creer que la droga es efectiva.
 - () No hay evidencia suficiente para creer que la droga no es efectiva.
 - () No hay evidencia suficiente para creer que la droga es efectiva.
- b) Explicar en el contexto del problema cuál es el error Tipo I.
- c) ¿Qué representa la potencia del test de hipótesis?

Problema 5. ¿Cuánto y cómo se debe modificar el tamaño n de una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con distribución normal, para reducir la longitud del intervalo de confianza para la media poblacional μ a la cuarta parte de su extensión manteniendo el mismo nivel de confianza? Justificar la respuesta.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Diciembre 2017 (T2)

Alumno **Especialidad:**

Año de cursada **Profesor:**

1			2		3			Calificación
a	b	c	a	b	a	b	c	

- 1) Una prueba de opción múltiple tiene dos preguntas, *I* y *II*. Cada pregunta contiene dos respuestas, *a* y *b*, una correcta y otra falsa. La respuesta correcta está, indistintamente, en *a* o en *b*. Contestar correctamente una pregunta significa ganar un punto, no contestar una pregunta (dejar en blanco) implica cero punto, y contestar mal implica perder un punto. Un estudiante contesta “al azar” (marca *a*, marca *b* o deja en blanco con probabilidad 1/3 para cada uno de estos eventos). Sea X_i el puntaje obtenido en la pregunta *i* con $i=1, 2$. La nota final obtenida por el alumno, X , es la suma de las notas de cada pregunta.
- a) Demostrar que es equiprobable sacarse $-1, 0$ ó 1 en cada pregunta y presentar una tabla de distribución conjunta de X_1 y X_2 .
- b) Hallar la probabilidad puntual $p_X(x) \forall x \in R_X$. Calcular el valor esperado y el desvío estándar de X .
- c) Si el examen fuera de n preguntas de este tipo y se aprobara con $X \geq \sqrt{\frac{8n}{3}}$, ¿qué porcentaje de alumnos aprobaría el examen si todos contestaran “al azar” tal como está explicado en el enunciado general? Justificar adecuadamente el planteo y la resolución.
- 2) Se sabe que la vida útil de ciertos componentes electrónicos es una variable aleatoria continua medida en años de duración, de la cual se tiene la siguiente información:
- $$P(X \leq x) = 1 - e^{-x} \quad \forall x \geq 0.$$
- a) ¿Tiene la variable aleatoria X sigue una distribución conocida? De ser así indicar cuál distribución es y el parámetro que la caracteriza con su correspondiente valor, dar el valor esperado y la varianza.
- b) Se conectan en paralelo n de estas componentes. Dar la expresión para la probabilidad de que el sistema funcione más de a horas (con $a > 0$).
- 3) Una compañía debe diseñar un sistema de muestreo rutinario para controlar la recepción de grandes partidas de un producto. El proveedor desea tener la seguridad de que le rechacen a lo sumo el 5% de las partidas buenas, que son aquellas que cumplen con la especificación de que la resistencia media a la rotura mínima es de 1250 kg. A su vez, el cliente desea rechazar al menos el 90% de las partidas malas, que son aquellas cuya resistencia media es inferior a 1100 kg. Ambos firman un contrato en el cual constan las condiciones anteriores, estableciéndose que la decisión de rechazar o aceptar una partida se tomará en función del resultado de una muestra de n unidades elegidas al azar de la misma. Existen registros históricos por los cuales se sabe que es desvío de la resistencia a la rotura es de 180 kg.
- a) ¿A qué tipo de prueba de hipótesis responde el planteo? Explicitar, de haberlas, todas las justificaciones adicionales que permiten este planteo. Deducir la fórmula general del tamaño n de la muestra para este tipo de test.
- b) Hallar el valor de n correspondiente a los datos del caso planteado en particular.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Diciembre 2017 (T3)

Alumno **Especialidad:**

Año de cursada **Profesor:**

1					2		3	Calificación
a	b	c	d	e	a	b		

- Establecer si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

 - Al analizar las siguientes dos colecciones de datos:
 I) 2, 3, 3, 5, 7, 7, 8 II) 2, 4, 4, 5, 6, 7, 8
 se observa que ambas tienen el mismo rango, la misma media y la misma mediana pero que la dispersión de la colección I es menor que la dispersión de la II.
 - Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral. Es imposible que se verifique simultáneamente que: $P(A/B) = \frac{1}{10}$, $P(B/A) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{2}$.
 - Sea $X \sim Be(p)$ de la que se toma una muestra aleatoria $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$. Sólo si $n < 30$ se puede afirmar que $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ es una variable aleatoria con distribución Binomial de parámetros n y p .
 - Al calcular un intervalo de confianza a partir de los datos de una muestra aleatoria, si se aumenta el nivel de confianza, disminuirá el ancho del intervalo.
 - Una cierta hipótesis nula se rechaza en una prueba de hipótesis con un nivel de significación de 0,02. Con los mismos datos, tampoco se rechazaría si el nivel de significación fuese de 0,05.

- La intensidad relativa de una señal de sonido se puede modelar con una variable aleatoria X cuya función de densidad es

$$f_x(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbf{R} \text{ (conocida con el nombre de Distribución de Laplace).}$$

Se sabe además que una cierta señal de sonido es claramente perceptible para el oído humano medio si la intensidad relativa medida por X está entre -2.1 y 2.1 .

 - ¿Cuál es la probabilidad de que al enviar una tal señal, ésta no sea percibida claramente por los destinatarios (suponiendo que los mismos son personas de capacidad auditiva media)?
 - Comparar el valor esperado y la varianza de una variable con esta distribución y el valor esperado y la varianza de una variable con distribución exponencial de parámetro $\alpha=1$.

- La división de investigaciones sobre el consumo de una fábrica de automóviles tiene un presupuesto de \$3000 para determinar la proporción de consumidores, p , que prefieren un nuevo diseño para la parrilla del radiador. La estimación debe ser correcta con un margen de cinco puntos porcentuales, con una confianza del 95%. Se toma una muestra aleatoria. El costo de la encuesta es de \$1000 para la administración de la misma más \$5 por entrevista. ¿Puede estimarse la proporción con la precisión requerida con el presupuesto de \$3000 suponiendo que $p=0,50$? Justificar la respuesta.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Febrero/Marzo 2018

Alumno **Especialidad:**

Año de cursada **Profesor:**

1	2	3	4	Calificación Propuesta

Calificación Final:

Ejercicio 1. $A, B,$ y C son tres eventos de un mismo espacio muestral con las siguientes características simultáneamente:

A y C son independientes,

B y C son independientes,

A y B son disjuntos,

$P(A \cup C) = 2/3, P(B \cup C) = 3/4, P(A \cup B \cup C) = 11/12.$

Encontrar $P(A), P(B)$ y $P(C)$. Justificar los pasos del cálculo.

Ejercicio 2. En una gran población del interior, la proporción de personas que padecen de daltonismo es p . Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n de la población. Se definen las variables aleatorias

X : Número de personas daltónicas en la muestra.

Y : Número de personas sin daltonismo en la muestra.

Hallar $E(2X+2Y)$ y $COV(X,Y)$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Probar que si Z es una variable aleatoria con distribución normal de valor medio 0 y varianza 1, entonces $P(-c \leq z \leq c) = a$ es equivalente a $\Phi(c) = (1+a)/2$. Mencionar las propiedades usadas.

Nota: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Ejercicio 4. Al operar un equipo eléctrico con energía de baterías, es menos costoso reemplazar todas las baterías a intervalos fijos que reemplazar cada batería individualmente cuando se ha gastado, siempre y cuando el desvío estándar de tiempo de vida sea menor que cierto límite evaluado en 5 horas. Se supone que el tiempo de vida, X , de este tipo de equipos es una variable aleatoria con distribución normal. Probar la hipótesis $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 25$ contra la alternativa $\sigma^2 < 25$ si se usa una muestra aleatoria de 28 valores de tiempos de vida cuyo desviación estándar muestral resultó $s = 3.5$ horas. ¿Cuál es el consejo, reemplazar las baterías en forma sistemática en conjunto o individualmente? Justificar la respuesta a partir de cálculos apropiados.

Examen Final de Probabilidad y Estadística - UTN FRH – Febrero/Marzo 2018

Alumno **Especialidad:**

Año de cursado **Profesor:**

a	b	1 c.i	c.ii	2	3	4	Calificación Propuesta

Calificación Final:

Ejercicio 1. Se emplea un plan de aceptación de lote de muestreo secuencial con la siguiente característica:

Se extrae un elemento del lote y se inspecciona. Si resulta defectuoso, se rechaza el lote; si no es defectuoso, se extrae otro elemento y se inspecciona. Si este segundo elemento resulta defectuoso, se rechaza el lote; sino se extrae otro elemento y así siguiendo la secuencia. Si para la cuarta extracción no se rechazó el lote, el mismo se acepta. El lote tiene un gran número de elementos.

- a) El consumidor está dispuesto a tolerar hasta un 20% de defectuosos en el lote. Evaluar la probabilidad de aceptar un lote con mayor porcentaje de defectuosos de los que el consumidor está dispuesto a tolerar (riesgo del consumidor).
- b) Al productor le preocupa que le rechacen un lote que contenga un 10% (o menos) de defectuosos por considerarse de buena calidad. Evaluar la probabilidad de rechazar un lote de buena calidad (riesgo del productor).
- c) Se muestrea un lote con 10% de defectuosos. Cada extracción e inspección de un elemento tiene un costo de \$100. Sea X el costo (en \$) del muestreo.
 - i. Indicar el recorrido, las probabilidades puntuales y el valor esperado de X .
 - ii. Si en el muestreo ya se llevan gastados \$200, ¿cuál es la probabilidad de que se gasten solo \$100 más? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Nombrar tres tipos de métodos gráficos con los que se puede representar un conjunto de datos. Mencionar un ejemplo del tipo de datos que se podría representar con cada uno de ellos (no hace falta escribir la colección de datos en concreto).

Ejercicio 3. Definir estimador insesgado de un parámetro θ . Dar un ejemplo de estimador insesgado y demostrar que lo es.

Ejercicio 4. ¿Cuánto y cómo se debe modificar el tamaño n de una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con distribución normal con dispersión poblacional σ conocida, para disminuir a la cuarta parte la longitud de la región de no rechazo de la hipótesis nula en un test de hipótesis bilateral para la media poblacional μ ,

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0,$$

manteniendo el mismo nivel de significación α ? Justificar la respuesta con una presentación adecuada.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRH –Febrero 2018 – Tema 3

Apellido(s): **Nombre(s):**

Año de Cursada: **Docente:**

Ejercicio 1					Ejercicio 2	Ejercicio 3			Ejercicio 4	Calificación
a	b	c	d	e		a	b	c		

Calificación definitiva:

Ejercicio 1. Un fabricante desea probar que la duración media, medida en kilómetros recorridos, de las superficies de rodadura de las llantas que fabrica, supera los 35000 km. Tras consultar con el experto en Estadística de la fábrica, pone a prueba 8 llantas, y si la media de las superficies de rodadura supera en duración los 35505,6 km, se puede asegurar que la duración media de dichas superficies es mayor que 35000 km. Las 8 llantas son elegidas aleatoriamente y se supone que la duración de la superficie de rodadura de cualquiera de ellas es una v.a. normal con desvío estándar de 2000 km. Con respecto a la prueba de hipótesis propuesta por el experto, indique:

- La variable sobre la cual se formulan las hipótesis y dichas hipótesis.
- El estadístico de prueba y su distribución.
- El nivel de significación y su significado en el contexto del problema. Indique cual es la zona de rechazo.
- La probabilidad de que el fabricante asegure, basado en la prueba, que la duración media es mayor que 35000 km si ésta es de 36855,6 km.
- Suponga que Ud. efectúa una prueba de hipótesis de una cola, pero por distracción, termina realizando una prueba bilateral con el mismo nivel de significación. Explique si obtendría usted la misma conclusión, justificando su respuesta.

Ejercicio 2. Según la convención introducida por J. W. Tukey (en su libro *Análisis Exploratorio de Datos*) para la construcción del diagrama de caja o *boxplot*, son valores aceptables aquellos mayores que $q_1 - 1,5 d$ y menores que $q_3 + 1,5 d$, donde d es la distancia intercuartílica para la muestra considerada.

Calcule la probabilidad de que una variable aleatoria X tome valores aceptables si tiene distribución exponencial de parámetro α .

Ejercicio 3.

- Defina sucesos mutuamente excluyentes y sucesos independientes. Expresé las definiciones en lenguaje formal y en lenguaje coloquial.
- Indique cómo se calcula la probabilidad de la unión de dos sucesos. Escriba la fórmula y mencione de dónde se obtiene.
- Determine cómo se modifica la fórmula anterior en el caso de sucesos mutuamente excluyentes, sucesos independientes y sucesos colectivamente exhaustivos.

Ejercicio 4. Se tiene una muestra aleatoria de tamaño $n=6$ de una población con $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. Se tienen dos estimadores de μ :

$$M_1 = \frac{2}{9}(X_1 + X_2 + X_3) + \frac{1}{9}(X_4 + X_5 + X_6)$$

$$M_2 = \frac{3}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) - \frac{1}{2}X_6$$

Determine cuál es el mejor estimador de μ , justificando su respuesta.