Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2011 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b	2	3	4aI 4aII 4b 4c	Calificación

Ejercicio 1. En un juego la probabilidad de que el participante gane es *p*. El juego se juega tres veces independientes. Se definen los siguientes eventos: *A*={el participante gana el primer juego}; *B*={el participante gana el segundo juego}; *C*={el participante gana sólo un juego}.

- **a)** ¿Para qué valor de *p*, *C* es independiente de *A*? Justificar la respuesta.
- **b)** Para $0 < p < 1$, ¿pueden los tres eventos ser simultáneamente independientes (esto es $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$)?

Ejercicio 2. El tiempo que pasa hasta que entre una llamada de un *call-center* a cierta casa es una variable aleatoria que se puede modelar con distribución exponencial. Si la probabilidad de que entre una llamada de este tipo durante la próxima hora es 0.5, ¿cuál es la probabilidad de que entre una llamada de este tipo durante las próximas dos horas? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Cierta componente es necesaria para la operación de un sistema; en caso de falla debe ser reemplazada inmediatamente. El tiempo de vida de ese tipo de componentes es una variable aleatoria *X* con valor medio de 100 horas y desvío estándar de 30 horas. Estimar el número de componentes de ese tipo que debe haber en stock para que la probabilidad de que el sistema funcione continuamente por las siguientes 4000 horas sea 0.95 (Ignorar otro tipo de fallas en el sistema). Realizar claramente el planteo del problema y enunciar las propiedades y/o teoremas en los que se basa.

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar cada una de las respuestas.

- **a)** *X* es una variable aleatoria con valor esperado μ y varianza σ^2.
  - **I.** $\mu = \sigma^2$ si *X* tiene distribución Poisson.
  - **II.** $\mu > \sigma^2$ si *X* tiene distribución Binomial.
- **b)** Si dos variables aleatorias, *X* y *Y*, son independientes entonces $Corr(X, Y) = 0$.
- **c)** A partir de una muestra aleatoria de tamaño *n* de una variable aleatoria, *X*, con distribución normal de media poblacional μ y dispersión σ conocida, se halla un intervalo de confianza para μ con una confianza del $(1-\alpha)100\%$. Si se desea tener un intervalo con la mitad de la amplitud del hallado, manteniendo el nivel de confianza, se debe duplicar el tamaño de la muestra.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2011 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b 1c	2a 2b	3a 3b 3c	4	Calificación

Ejercicio 1. Cierto experimento aleatorio consiste en arrojar simultáneamente 2 monedas equilibradas, y luego volver a arrojar aquellas en las que se obtuvo ceca. Se definen las variables aleatorias: X que denota el número de monedas en las que sale cara en la primera tirada; Y que corresponde al número de monedas vueltas a tirar en las que sale cara.

a) Determinar la distribución conjunta de probabilidad $p_{X,Y}$. Presentarla matricialmente.

b) ¿Son independientes las variables Y y X? Demostrar la respuesta.

c) ¿Le corresponde a X un modelo de distribución conocida? Justificar la respuesta y en caso afirmativo, mencionarlo. Ídem para la variable Y, y para la variable $W_x=Y/X=x$ con x perteneciente al recorrido de X, o sea la distribución de Y sabiendo que $X=x$.

Ejercicio 2. Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria.

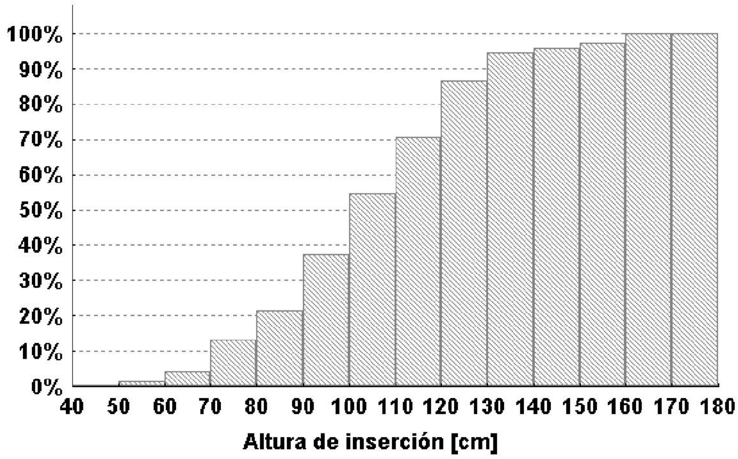
a) Dar la definición de muestra aleatoria.

b) Encontrar los valores de c y d que hacen verdadera la siguiente igualdad. Justificar la respuesta y mencionar todas las propiedades usadas.

$$\mathrm{E}[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2] = c\ \mathrm{E}[(X_1)^2] + d\ (\mathrm{E}[X_1])^2$$

Recordar: si X es una variable aleatoria, se verifica que $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$.

Ejercicio 3. La siguiente figura representa la distribución de frecuencias acumuladas de la variable *altura de inserción de la espiga* [cm] en una muestra de 75 plantas de maíz: Decidir si las siguientes conclusiones corresponden con lo que se deduce del diagrama. Justificar las respuestas.



a) La mediana de la muestra está entre 110 y 120 cm.

b) Las plantas con *alturas de inserción* entre 80 y 90 cm representan menos del 20% del total.

c) Hay más plantas con altura de inserción entre 140 y 150 cm que plantas con altura de inserción entre 110 y 120 cm.

Ejercicio 4. Intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ basado en una muestra para la media poblacional de una población normal con desvío estándar conocido. Presentar el tema, definir la variable aleatoria con la que se trabaja, deducir el intervalo de confianza correspondiente.

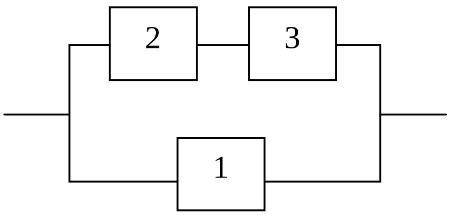
Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2011 – T3

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b	2	3a 3b	4	Calificación

Ejercicio 1. Se tienen 3 componentes idénticas que fallan en forma independiente y se conectan como indica la figura. Sean los eventos A_i = {i-ésima componente dura por lo menos t horas}, i = 1, 2, 3. Sea X el tiempo en que falla el sistema.



a) Expresar cada uno de los eventos $\{X \geq t\}$ y $\{X \leq t\}$ en términos de unión y/o intersección de A_1, A_2 y A_3 y/o de sus respectivos complementos.

b) Si cada componente tiene una duración exponencial con parámetro α con $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, calcular $P(X \geq t)$.

Ejercicio 2. La calibración de una balanza se revisa pesando 25 veces un espécimen de prueba de 10 *kg*. La balanza se manda a revisión si $\overline{X} \geq 10.1032 \vee \overline{X} \leq 9.8968$. Se supone que los resultados de diferentes pesos son independientes entre sí y que el peso en cada intento está normalmente distribuido con $\sigma = 0.2000$ *kg*. Se representa con μ el verdadero promedio de lectura de peso de la balanza. Escribir claramente cuál es el test de hipótesis que conduce a éste procedimiento de decisión: dar las hipótesis, describir los errores tipo I y tipo II en el contexto de la experiencia, hallar el valor de α y presentar un gráfico cualitativo de $\beta = \beta(\mu)$.

Ejercicio 3. **Simulación de una moneda perfecta.** Dada una moneda sesgada cuya probabilidad de cara es α ($0 < \alpha < 1$), se simula una moneda perfecta de la siguiente manera. Se lanza dos veces la moneda sesgada. Se interpreta *cara-cruz* como **éxito** y *cruz-cara* como **fracaso**; si ninguno de estos dos resultados ocurre, se repiten los lanzamientos hasta que se llega una decisión.

a) Demostrar que la probabilidad de éxito es ½.

b) Indicar el recorrido y dar la función de distribución puntual de probabilidad de la variable aleatoria X que indica el número de lanzamientos requeridos para llegar a una decisión,

Recordatorio: $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$ si $|q| < 1$, serie geométrica convergente.

Ejercicio 4. Sea $\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria de una distribución con valor esperado μ y varianza σ^2. Demostrar que el siguiente estimador es insesgado.

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

Observación: Expresión equivalente $S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]$.