Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Mayo 2011

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b	2a 2b 2c	3a 3b 3c 3d	Calificación

Ejercicio 1. Una bolsa tiene 5 monedas equilibradas, de las cuales 2 tienen CARA en ambos lados. Se extrae una moneda al azar y se pone en la mesa (sin mirar).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la faz inferior de la moneda sea CARA?

b) Se mira y se ve que la faz superior de la moneda es CARA ¿cuál es la probabilidad de que la faz inferior sea CARA?

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson.

a) Mencionar el parámetro que la caracteriza, la función de probabilidad, dar su valor esperado y su varianza.

b) Describir algún experimento aleatorio donde se la utilice.

c) ¿Con qué otras variables aleatorias está vinculada y cómo? Explicar.

Ejercicio 3. En los miembros de cierta población se encuentra definida una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desvío estándar conocido σ. El promedio de una muestra aleatoria de tamaño n extraída de esa población es una variable aleatoria. La muestra se extrae con reemplazo o bien se cumple que el tamaño de la muestra es despreciable frente al de la población.

a) Dar la definición de muestra aleatoria.

b) Describir la distribución de probabilidades del promedio muestral indicando claramente recorrido, función de probabilidad, valor esperado y varianza.

c) Deducir como se puede calcular el tamaño n de la muestra para obtener un intervalo de confianza para la media poblacional μ si se estipula que la semilongitud del intervalo de confianza sea ε y que la confianza sea $(1 - \alpha)100\%$.

d) Plantear para μ el test de hipótesis de cola superior, de nivel de significación α, a partir de una muestra de tamaño n y deducir la región de rechazo de la hipótesis nula.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Julio 2011 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1	2	3a 3b	4	Calificación

Ejercicio 1. Un productor de piezas mecánicas sabe que el número de defectuosas por caja es una variable aleatoria, X, que se puede considerar con distribución Poisson con una media de cinco. El costo de producción de una caja es de $50.

¿Cuál de las dos siguientes políticas conviene más al productor? Justificar la respuesta con un cálculo adecuado. Sugerencia: calcular el valor esperado de la ganancia con cada política.

Política I: Vender la caja a $80 sin ofrecer garantía.

Política II: Vender la caja a $100 ofreciendo una nueva gratis al cliente en caso de que en la caja vendida se encuentren más de 6 piezas defectuosas?

Ejercicio 2. En éste problema consideramos familias con 3 hijos y suponemos que las 8 configuraciones posibles VVV, VVM, VMV, etc… donde se refieren a V: el hijo es varón y M: el hijo es mujer, son equiprobables. Sea A el suceso de que una familia escogida al azar tenga como máximo un hijo varón, y B el suceso de que tenga al menos un hijo de cada sexo. Analizar si A y B son o no independientes. Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla; si es falsa dar un contraejemplo.

a) Si A y B son dos eventos de un mismo espacio muestral, entonces

$$P\left[(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B).$$

b) Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, entonces la proporción muestral $\hat{p}=\frac{X}{n}$ es un estimador insesgado de p cuyo desvío estándar nunca supera el valor $\sqrt{\frac{1}{4n}}$.

Ejercicio 4. Sea una prueba de hipótesis de dos colas, de nivel de significación α para la media μ de una población normal con desvío estándar conocido σ a partir de una muestra de tamaño n. La hipótesis nula es H_0: $\mu=\mu_0$.

Presentar el planteo del test de hipótesis. Definir los errores tipo I y II. Deducir la expresión que permita calcular la probabilidad $\beta=\beta(\mu_v)$ de cometer error tipo II.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Julio 2011 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b 1c	2a 2b	3	4	Calificación

Ejercicio 1. Un proveedor de acceso a Internet tiene dos servidores en paralelo, de modo que si al menos uno de ellos anda se da una conexión exitosa al cliente cuando lo solicita. Cada servidor tiene una probabilidad ¼ de estar fuera de servicio independientemente del otro.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuando un cliente se conecte, obtenga el servicio?

b) Supongamos que un cliente trata de conectarse 5 veces, suficientemente espaciadas en el tiempo como para que los estados del sistema en esas ocasiones se puedan considerar independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga acceso a Internet en 3 de las 5 ocasiones?

c) En las mismas condiciones, un sistema en paralelo de dos componentes de funcionamiento independiente, si el tiempo de vida de cada componente se considera una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de parámetro α (en 1/*seg*), ¿cuál es la probabilidad de que el sistema dé un servicio sin fallas durante $1/\alpha$ segundos?

Ejercicio 2. Sea $\{X_1;\ X_2;\cdots;\ X_n\}$ una muestra aleatoria de una población cualquiera.

a) Dar la definición de muestra aleatoria e indicar al menos dos aplicaciones de la misma.

b) En un experimento se obtienen los siguientes valores observados $\{x_1;\ x_2;\cdots;\ x_n\}$. Si se suma una constante $c\neq 0$ a cada uno de las x_i, obteniéndose $y_i=x_i+c$, ¿cómo se relaciona la media muestral y la mediana de los $\{y_i\}$ con la respectiva media muestral y mediana de los $\{x_i\}$ ¿Cómo se relacionan sus varianzas muestrales, S_y^2 y S_x^2?

Ejercicio 3. ¿Cuánto y cómo se debe modificar el tamaño n de una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con distribución normal con dispersión poblacional σ conocida, para disminuir a la mitad la longitud de la región de no rechazo de la hipótesis nula en un test de hipótesis bilateral para la media poblacional μ,

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_1: \mu \neq \mu_0,$$

manteniendo el mismo nivel de significación α?

Justificar la respuesta iniciando el desarrollo con la presentación del test de hipótesis, el estadístico de prueba, el cálculo de la región de rechazo.

Ejercicio 4. Sean Y y X dos variables aleatorias. Demostrar que cualesquiera sean los valores a, b, c y d, resulta

$$Cov(aX+b, cY+d) = ac\,Cov(X,Y)$$

donde Cov indica la covarianza.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Septiembre 2011

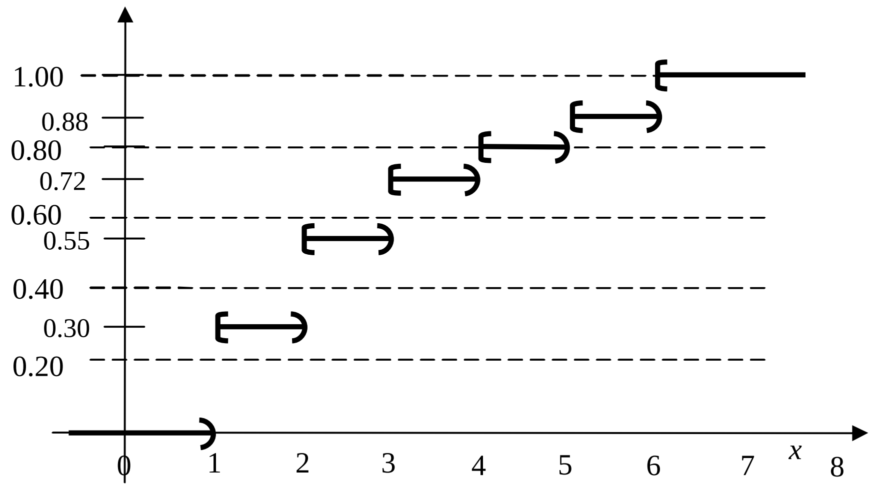
Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1	2a 2b 2c	3a 3b	4	Calificación

Ejercicio 1. Sean A, B y C tres eventos definidos en un mismo espacio muestral. Se sabe del evento A que contiene a B y que es disjunto con C. También se sabe que el evento A es dos veces más probable que B, tres veces más probable que C y una vez y media más probable que su complemento (A^C). Encontrar $P(B \cap C)$ y $P(B \cup C)$.

Ejercicio 2. La figura corresponde a las frecuencias relativas acumuladas de la variable X definida como “el número de personas que conviven” observada en un complejo de viviendas. Se sabe que en 85 viviendas conviven 3 personas. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando la respuesta.



a) En la cuarta parte de las viviendas solo conviven 2 personas.
b) En 100 viviendas conviven como mínimo 5 personas.
c) El número mínimo de personas que conviven en el 20% de las viviendas con más miembros es 3.

Ejercicio 3. Dos máquinas de llenado de botellas tienen la misma tasa media μ. La varianza del llenado de la máquina 1 es σ_1^2 y para la máquina 2 es $\sigma_2^2 = b\sigma_1^2$, $b>0$. Se tienen n_1 observaciones independientes en el llenado de la máquina 1 y n_2 observaciones independientes en el llenado de la máquina 2.

a) Mostrar que $\hat{\mu} = a\overline{X}_1 + (1-a)\overline{X}_2$ con $0 < a < 1$, es un estimador insesgado para μ.
b) Hallar el valor de a que minimiza la varianza de éste estimador.

Ejercicio 4. Sea una prueba de hipótesis de cola derecha, de nivel de significación α para la media μ de una población normal con desvío estándar conocido σ a partir de una muestra aleatoria de tamaño n. La hipótesis nula es H_0: $\mu=\mu_0$.

Presentar el planteo del test de hipótesis. Definir los errores tipo I y II. Deducir la expresión que permita calcular la probabilidad $\beta=\beta(\mu_v)$ de cometer error tipo II.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2011 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b 1c	2a 2b 2c	3	4	Calificación

Ejercicio 1. Se tiran dos monedas equilibradas y luego se vuelven a tirar sólo aquellas que salieron cara en la primera tirada. Sea X la variable aleatoria que indica el número de cecas en la primera tirada, y sea Y el número de cecas en la segunda tirada.

a) Graficar un diagrama de árbol y mostrar en una tabla la distribución conjunta de probabilidades $p_{x,y}$.

b) Si el número total de cecas obtenidas $(X+Y)$ es 2, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera tirada no haya habido cecas

c) Dar una fórmula para $E(Y/X)$ justificando la respuesta.

Ejercicio 2 Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo.

a) Si el coeficiente de correlación lineal de dos variables aleatorias, X y Y, es nulo, $Corr(X,Y)=0$, entonces dichas variables son independientes.

b) Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias, entonces
$$V(a_1X_1+a_2X_2)=a_1V(X_1)+a_2V(X_2) \qquad \forall a_1, \forall a_2 \in \mathbf{R}.$$

c) Sea X una variable aleatoria con valor medio μ y varianza σ^2. Si X tiene distribución Poisson, entonces $\mu=\sigma^2$.

Ejercicio 3. Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ y $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ dos muestras aleatorias de dos variables independientes con distribución normal con el mismo valor medio μ y varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente. Demostrar, justificando los distintos pasos, que $P(\overline{X}>\overline{Y})=0.5$.

Sugerencia. Definir $W=\overline{X}-\overline{Y}$ y analizar que distribución tiene.

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria con media poblacional μ y dispersión σ desconocidas. Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño n. Deducir la expresión del intervalo de confianza para μ con una confianza del $(1-\alpha)100\%$. Justificar los distintos pasos de la demostración mencionando las propiedades y/o teoremas usados y/o condiciones que se requieren para la validez de la respuesta.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2011 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b 1c 1d	2a 2b	3	4	Calificación

Ejercicio 1. Se sabe que la opinión de una población se divide en dos opciones (A y B). No hay individuos indecisos. Sin embargo, al consultar un individuo al azar por su opción de preferencia, éste puede no responder a la pregunta. Sea p la probabilidad de que un individuo prefiera la opción A y sean q_1 y q_2 las probabilidades de que un individuo consultado, conteste a la pregunta dado que su opción de preferencia es la A o la B respectivamente. Suponemos además que aquellos que responden no mienten.

- **a)** Calcular las siguientes probabilidades: I) de que un individuo al ser consultado, efectivamente conteste; II) de que un individuo conteste efectivamente la opción A; III) de que la respuesta sea la opción A, dado que el individuo contestó alguna opción.
- **b)** En una población suficientemente grande, se consulta a n individuos. Sea X la variable aleatoria "número de respuestas de A en la muestra". Hallar $P(X=k)$ con $0 \le k \le n$, $E(X)$ y $V(X)$.
- **c)** Se propone usar como estimador de p a la proporción de respuestas por la opción A en la muestra. ¿Esto es correcto? Justificar la respuesta.
- **d)** Sea p_A la proporción de respuestas A. Indicar los pasos necesarios para hallar un intervalo de confianza de un $(1-\alpha)100\%$ de confianza para p_A. Plantear y justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo.

- **a)** Sean A y B dos eventos del mismo espacio muestral. Si $P(A)=P(B)=p$, entonces $P(A \cap B) \le p^2$.
- **b)** Sean A y B dos eventos del mismo espacio muestral. Si $P(A)>0, P(B)>0$ y $P(A/B)>P(A)$, entonces $P(B/A)>P(B)$.

Ejercicio 3 Sean μ y a números reales con $a \neq 0$ y sea $\sigma > 0$, y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ un conjunto de n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que $E(\varepsilon_1)=0$, $E[(\varepsilon_1)^2]=1$. Se definen las variables aleatorias

$$X_i = \mu + ia + \sigma\varepsilon_i \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Suponiendo que n es par, se definen las variables aleatorias

$$Y_1 = X_2 - X_1, Y_2 = X_4 - X_3, Y_3 = X_6 - X_5, \ldots, Y_{n/2} = X_n - X_{n-1}.$$

Demostrar que las variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n/2}$ son independientes idénticamente distribuidas con $E(Y_i)=a$ y $V(Y_i)=2\sigma^2$.

Ejercicio 4. Una socióloga se interesa en la eficacia de un curso de entrenamiento diseñado para lograr que más conductores utilicen los cinturones de seguridad en los automóviles. ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa si comete un error del tipo II al concluir de forma errónea que el curso de entrenamiento es efectivo? Explicar.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2011 – T3

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b 1c	2a 2b	3a 3b	4a 4b	Calificación

Ejercicio 1. *Una versión de Batalla Naval.* Sea el siguiente tablero en el que hay un barco representado por los casilleros marcados con una **X**. El jugador atacante realiza dos disparos (esto es, elige dos casilleros distintos de manera sucesiva) con la siguiente estrategia: al primer disparo lo elige al azar. Si acierta (esto es, si da en un casillero marcado con una **X**) entonces al segundo disparo lo elige al azar entre los cuatro casilleros más cercanos que limitan con el primero. Si no acierta el primer disparo entonces al segundo lo elige al azar entre todos los casilleros restantes.

	1	2	3	4	5
A					
B			**X**		
C		**X**	**X**	**X**	
D					
E					

Calcular las siguientes probabilidades:
a) De acertar el primer disparo;
b) de acertar el segundo disparo sabiendo que acertó el primero;
c) de que haya acertado el primer disparo dado que acertó el segundo.

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo.

a) Sean A y B dos eventos del mismo espacio muestral. Si $P(\overline{A})=\alpha$ y $P(\overline{B})=\beta$, entonces $P(A\cap B)\geq 1-\alpha-\beta$.

b) Si el coeficiente de correlación lineal de dos variables, X, Y, es nulo, entonces dichas variables son independientes.

Ejercicio 3.
a) Se acusa a una empresa de discriminación en sus prácticas de contratación. ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa si un jurado comete un error tipo II al encontrar que la empresa es culpable?
b) En base a una muestra aleatoria de tamaño n extraída de una población normal con desvío estándar conocido, se establecieron dos intervalos de confianza para la media poblacional. El primero del 95% de confianza y el segundo del 99% de confianza. Hallar cuánto vale el cociente de las amplitudes de dichos intervalos. Realizar el planteo correspondiente.

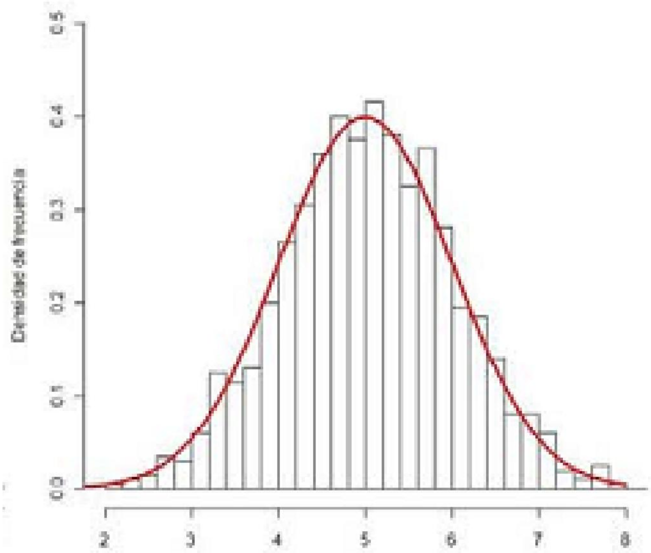
Ejercicio 4. Hay dos opciones para construir un dispositivo. La primera es fabricarlo con un paralelo de dos componentes idénticas e independientes cuya probabilidad de falla es 0.20. La segunda es utilizar una única componente cuya vida útil puede modelarse con una variable aleatoria exponencial cuya vida media es de 10000 horas.
a) ¿Cuál de las opciones conviene más si el dispositivo se utilizará 300 horas?
b) ¿Cambia la respuesta si el dispositivo se utilizará 1000 horas?
Justificar las respuestas con un planteo y un cálculo adecuado.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2012 – T1

Alumno .... **Especialidad:** ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… **Profesor:** ……………………..

1	2	3	4a 4b	Calificación



Ejercicio 1.
Sea X la variable aleatoria que corresponde al diámetro, en mm, de un eje producido por una empresa. La figura representa el histograma del diámetro de 1000 de esos ejes. Se ha superpuesto una curva continua que representaría la función de densidad de X en un modelo continuo. A partir de la figura, estimar: ¿qué tipo de distribución tiene X, y cuáles son los valores numéricos de los parámetros que la caracterizan? Justificar el cálculo.

Ejercicio 2. Sean A, B, C tres sucesos de un mismo espacio muestral tales que las probabilidades $P(B\cap C)$, $P(\overline{B}\cap C)$ y $P(C)$ son no nulas. Indicar si la expresión

$$P(A\cap B/B\cap C)P(B/C)+P(A\cap B/\overline{B}\cap C)P(\overline{B}/C)$$

es igual a alguna de las siguientes:

i) $P(A\cap B/C)$, ii) $P(A\cap B)$; iii) $P(A/C)$; iv) o a ninguna de ella.

Justificar la respuesta con un cálculo apropiado.

Ejercicio 3. Sea una muestra aleatoria de tamaño $2n$ de una población denotada por X tal que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Sean los siguientes dos estimadores para μ:

$$\overline{X}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \text{y} \quad \overline{X}_2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i\ .$$

¿Cuál es el mejor estimador de μ? Explicar la elección.

Ejercicio 4. Sea X_F la variable aleatoria que corresponde al punto de fusión de una cierta aleación en grados Fahrenheit, cuya distribución se supone normal con desvío estándar conocido σ_F. A partir de una muestra aleatoria de tamaño n se estima la media poblacional μ_F con un intervalo del $(1-\alpha)100\%$ de confianza.

a) Deducir la expresión del intervalo de confianza.

b) El intervalo obtenido se presenta en un informe técnico, sin registrar los datos individuales de la muestra. Un lector de dicho reporte, necesita el intervalo expresado en escala Celsius. Realiza las modificaciones necesarias. ¿En cuánto y cómo se ha modificado la longitud total del intervalo original? ¿Se modificó la confianza del intervalo?

Nota: El vínculo entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) es lineal y está dado por $C=(5/9)(F-32)$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2012 – T2

Alumno .... **Especialidad:** ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… **Profesor:** ……………………..

1	2	3a 3b 3c	4a 4b	Calificación

Ejercicio 1. El tiempo de reparación (en horas) T de un artículo sigue, aproximadamente, una distribución de probabilidad con densidad $f(t) = te^{-t} \quad t \geq 0$. El costo de reparación de uno de dichos artículos es $C = S + bT$, donde la constante b es un costo por unidad de tiempo y la variable aletoria S toma los valores s_1 y s_2 con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Calcular el costo esperado de reparación C. Dar la respuesta en términos de s_1. s_2, p y b.

Nota: $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad a \neq 0, n > 0$; $\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) \quad a \neq 0$.

Ejercicio 2. Sean A, B, C tres sucesos de un mismo espacio muestral tales que la probabilidad $P(A \cap B) \neq 0$. Analizar la validez de la expresión:

$$P(C / A \cap B) = \frac{P(C \cap A / B)}{P(A / B)}.$$

Si es válida, demostrarla; si no lo es, dar un contraejemplo.

Ejercicio 3. Se tienen 3 cajas. La Caja 1 contiene 2 bolillas azules y 2 rojas; la Caja 2 contiene 3 bolillas azules y 1 roja; la Caja 3 está inicialmente vacía. Se extraen al azar de manera independiente una bolilla de la Caja 1 y una bolilla de la Caja 2, y se las coloca en la Caja 3. Se proponen dos hipótesis relativas a la Caja 3.

H_0: las dos bolillas son azules; H_1: al menos una de las bolillas no es azul.

El criterio para decidir entre una u otra hipótesis es el siguiente: se hacen dos extracciones con reposición de la Caja 3, y no se rechaza H_0 en caso de que en cada una las dos extracciones se obtenga una bolilla azul; se rechaza H_0 en caso contrario.

a) Hallar las probabilidades correspondientes a los eventos: en la Caja 3 hay 2 bolillas azules, hay una bolilla de cada color, hay 2 bolillas rojas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar H_0 cuando H_1 es verdadera? ¿Esta decisión corresponde a un error o a un acierto? Si es a un error, ¿de qué tipo de error se trata?

c) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera? ¿Esta decisión corresponde a un error o a un acierto? Si es a un error, ¿de qué tipo de error se trata?

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[\mu-1;\mu+1]$ donde μ es un parámetro desconocido; y sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria de X. Resulta que la variable aleatoria promedio muestral, $\overline{X}$, es un estimador insesgado de μ y $V(\overline{X}) = \frac{1}{3n}$.

a) Definir que es una muestra aleatoria.

b) Deducir como se puede construir un intervalo de confianza aproximado para μ con una confianza del $(1-\alpha)100\%$ cuando la muestra es grande. Mencionar el/los teorema/s adecuados que dan validez a este planteo.

Probabilidad y Estadística. U.T.N. – F.R.Haedo – Febrero/Marzo 2012 – T3

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1	2a 2b 2c	3a 3b 3c	4	Calificación

Ejercicio 1. Sean A, B, C tres eventos de un mismo espacio muestral. Se conoce que A incluye a B y que es disjunto con C. También se sabe que A es tres veces más probable que C, una vez y media más probable que su complemento, A^C, y que $P(B/A) = 1/4$. Hallar $P(B \cup C)$.

Ejercicio 2. Un modem de alta velocidad transmite, a modo de idioma binario, señales de valores -1 y $+1$ respectivamente. La probabilidad de transmitir un -1 es p. Sea X la variable aleatoria correspondiente a esa señal enviada. La línea por la que se envía introduce un ruido aditivo aleatorio, Y, de distribución normal con valor medio 0 y varianza σ^2 (independiente de lo transmitido). El receptor de la señal decide que el modem envió un -1, si lo que recibe (suma de la señal enviada y el ruido de línea, $W = X + Y$) es menor que $a \in \mathbf{R}_{[-1\,;\,1]}$. En caso contrario decide que lo enviado fue un $+1$.

a) Presentar un diagrama de árbol que esquematice la situación. Encontrar una fórmula para la probabilidad de error del receptor. Expresar dicha fórmula en función de p, σ, a y de probabilidades asociadas con valores de una variable normal estándar, Z.
b) Calcular numéricamente la probabilidad de error del receptor para $p = 2/5$, $a = 1/2$ y $\sigma^2 = 1/4$.
c) Para un valor genérico p, hallar la covarianza entre las variables X y W. Indicar para que valor de p es máxima esta covarianza.

Ejercicio 3. Se recibe una caja con 10 unidades de una pieza y se desea ensayar la hipótesis H_0: “las diez piezas son buenas”, extrayendo una única unidad de la caja. La condición de rechazo, obvia, es que la pieza extraída sea defectuosa. Si la pieza extraída es buena, no se puede rechazar la hipótesis nula.

a) Escribir una hipótesis alternativa H_1 razonable en el contexto del problema planteado.
b) Calcular la probabilidad de cometer error de tipo II (β) para las alternativas de que haya 1, 2, …, K piezas defectuosas en la caja con K = 1; 2; …; 10.
c) Graficar $\beta(K)$.

Ejercicio 4. Sea p la proporción de individuos que en una población cumplen con una propiedad específica, cuyo valor se desea estimar. Se va a seleccionar una muestra aleatoria grande de n individuos, y X es el número de éxitos de la muestra. Plantear y desarrollar la deducción de un intervalo de confianza para la p con una confianza del $(1-\alpha)100\%$. Justificar adecuadamente.