Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Julio 2012 – T1

Alumno .... **Especialidad:** ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… **Profesor:** ……………………..

1a 1b 1c 1d	2	3a 3b	4a 4b	Calificación

Ejercicio 1. Sean tres cajas. La Caja 1 contiene 2 bolillas rojas y 2 azules, la Caja 2 contiene 3 bolillas rojas y 1 azul, y la Caja 3 está inicialmente vacía. Se extraen al azar de manera independiente una bolilla de la Caja 1 y una bolilla de la Caja 2 y se las coloca en la Caja 3.

a) Sea X la variable aleatoria que se corresponde con el número de bolillas rojas que hay en la Caja 3 luego de la operación detallada. Dar el recorrido de X y su distribución de probabilidad puntual.

b) Luego de la operación se extrae una bolilla de la Caja 3, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea roja?

c) Después de la operación se extrajo una bolilla al azar de la Caja 3 y ésta resultó roja, ¿cuál es la probabilidad de que la restante bolilla en la Caja 3 también sea roja?

d) Sea Y la variable aleatoria que se corresponde con el número de bolillas rojas que se extraen de la Caja 1 durante la operación detallada. Dar su distribución de probabilidad puntual, indicar si tiene una distribución conocida. ¿Es Y independiente de X? ¿Es X independiente de Y? Justificar estas últimas cuestiones.

Ejercicio 2. Se tiene un sistema compuesto por n elementos cuya probabilidad de funcionamiento es p. Hallar la probabilidad de que el sistema no funcione si las componentes –supuestas de comportamiento independiente– están conectadas en serie y si están conectadas en paralelo.

Ejercicio 3. La intensidad relativa de una señal de sonido se puede modelar con una variable aleatoria X cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbf{R}$$ (conocida con el nombre de Distribución de Laplace).

Se sabe además que una cierta señal de sonido es claramente perceptible para el oído humano medio si la intensidad relativa medida por X está entre -2.1 y 2.1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al enviar una tal señal, ésta no sea percibida claramente por los destinatarios (suponiendo que los mismos son personas de capacidad auditiva media)?

b) Comparar el valor esperado y la varianza de una variable con esta distribución y el valor esperado y la varianza de una variable con distribución exponencial de parámetro $\alpha=1$.

Ejercicio 4. Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ y $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ dos muestras aleatorias de tamaño $n=100$ de dos variables independientes con el mismo valor medio μ y desvíos conocidos $\sigma_1=\sigma$ y $\sigma_2=3\sigma$, respectivamente. Se define $W = \overline{Y} - \overline{X}$.

a) Indicar que tipo de distribución tiene W, justificando la respuesta. Hallar su valor esperado y la varianza.

b) Calcular $P\left(\left|\overline{Y} - \overline{X}\right| > 0.5\sigma\right)$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Julio 2012 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b 1c	2	3a 3b	4	Calificación

Ejercicio 1. Sea X el número que se obtiene al arrojar un dado cargado. Se sabe que:

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{6}+\varepsilon \text{ y que } P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{1}{6}-\varepsilon$$

donde $0<\varepsilon<(1/6)$. Un apostador tira el dado: si sale 1 ó 2 pierde una cantidad $2a$; si sale 3 pierde a; si sale 4 gana a; si sale 5 ó 6 gana $2a$. Aquí a representa una cantidad de dinero fija. Sea G la ganancia del jugador en una apuesta.

a) Calcular $E(G)$ y $V(G)$.

b) ¿Es conveniente participar en este juego? Justificar la respuesta a partir de un cálculo adecuado.

c) Sea $\varepsilon=1/10$. El apostador tira el dado 50 veces de manera independiente y obtiene las ganancias $G_1, G_2, \ldots, G_{50}$. Estimar la probabilidad de que la ganancia total, esto es $S=\sum_{i=1}^{50} G_i$, sea positiva.

Ejercicio 2. La división de investigaciones sobre el consumo de una fábrica de automóviles tiene un presupuesto de \$3000 para determinar la proporción de consumidores, p, que prefieren un nuevo diseño para la parrilla del radiador. La estimación debe ser correcta con un margen de cinco puntos porcentuales, con una confianza del 95%. Se toma una muestra aleatoria. El costo de la encuesta es de \$1000 para la administración de la misma más \$5 por entrevista. ¿Puede estimarse la proporción con la precisión requerida con el presupuesto de \$3000 suponiendo que $p=0.50$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Test de hipótesis e intervalos de confianza

a) Dos de los métodos más importantes de la inferencia estadística son los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis. Ambos se basan en el mismo grupo de conceptos, pero se utilizan con fines diferentes. Explicar claramente esa diferencia en los objetivos de cada método.

b) Explicar la diferencia entre un error de tipo I y un error de tipo II en un test de hipótesis.

Ejercicio 4. Sean X, Y, Z variables aleatorias independientes con valores esperados nulos y varianzas $V(X)=V(Y)=V(Z)=\sigma^2$. Calcular el coeficiente de correlación lineal $Corr(U,V)$ donde $U=X+Y$ y $V=X-Z$. Deducir la respuesta justificando los distintos pasos realizados.
Recordar que si R y T son dos variables aleatorias $Cov(R,T)=E(RT)-E(R)E(T)$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRH –Octubre 2012

Apellido(s): ....Nombre(s): ....

Año y N° de Libreta: ....Docente: ....

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Calificación

1) Una máquina produce X_n lámparas especiales durante el dia n-ésimo, donde las X_n son v.a. i.i.d., con media 8 y desvío estándar de 2.

a) Encontrar, en forma aproximada, la probabilidad de que el total de lámparas producidas en 100 días sea menor que 860. Justifique su procedimiento.

b) Encontrar, en forma aproximada, el valor de n que cumpla que

$$P(X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n \geq 550) \leq 0{,}01$$

2) Se está pensando en implementar un nuevo método de producción de cierto artículo para mejorar el rendimiento de la materia prima que se utiliza en su desarrollo, medido en el valor medio de los costos de producción del artículo. Este cambio involucra la compra de nuevas maquinarias y el adiestramiento del personal. Se decide concretar la decisión basándose en una prueba de hipótesis. Se pueden plantear dos premisas iniciales que dan lugar a la hipótesis nula al plantear el test: una es que el nuevo método mejora el rendimiento (el costo de producción medio baja con respecto al método actual) y la otra es que el nuevo método no mejora el rendimiento.

a) ¿Cuál de las dos hipótesis le conviene tomar como hipótesis nula al gerente técnico? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué tipo de error cometería en los siguientes casos: i) la hipótesis de que el nuevo método mejora el rendimiento se acepta erróneamente? ii) la hipótesis de que el nuevo método mejora el rendimiento es erróneamente rechazada?

c) Explicar cómo se implementa el test de hipótesis.

3) Sean X e Y variables aleatorias independientes que tienen una varianza común σ^2 y sea $W = X - a.Y$, con $a \neq 0$. Calcule:

a) la covarianza entre X y W

b) el coeficiente de correlación lineal entre X y W.

Recuerde que si R y T son dos variables aleatorias, Cov(R,T)=E(RT)-E(R)E(T) y Corr(R,T)= $\mathrm{Cov}(R,T)/[V(R)V(T)`]^{1/2}$

4) Sean A, B y C tres eventos de un espacio muestral. Probar que si $P(A \cap B) \neq 0$, entonces:

$$P[C/(A \cap B)] = \{[P[(C \cap A) / B)]\} / P(A/B)$$

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2012

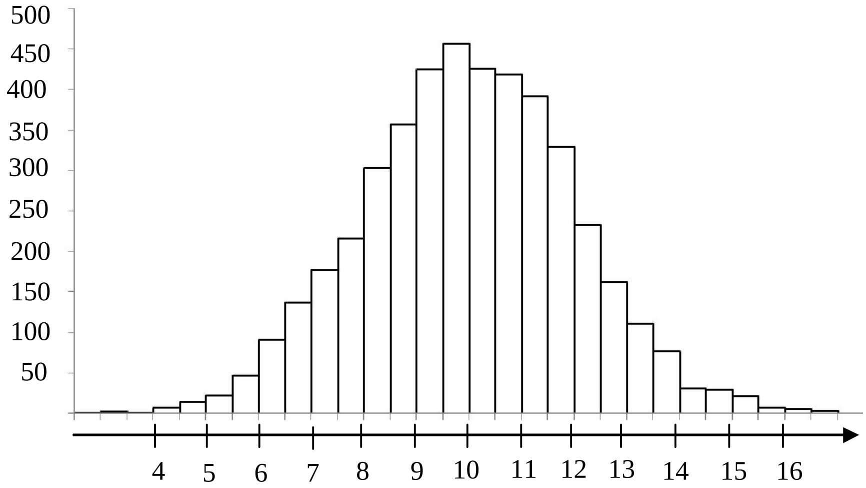
Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b	2a 2b	3	4a 4b	Calificación

Calificación Final: ……………………….

Ejercicio 1. El gráfico que se muestra corresponde a un histograma de 4500 datos correspondientes a una variable aleatoria X. En el eje vertical se encuentra la frecuencia absoluta, y en el horizontal los límites de clases. Se ha propuesto que el modelo de distribución normal se puede ajustar a X.



a) A partir del gráfico y de las consideraciones necesarias, estimar el valor numérico de los parámetros que definen la variable aleatoria continua normal asociada con los datos. Explicar la elección.

b) En función de la elección hecha en a), evaluar numéricamente la probabilidad de que $X \leq 13.5$.

Ejercicio 2. Una compañía está entrevistando potenciales empleados. Supongamos que cada candidato está calificado o no calificado con probabilidad q y $1-q$, respectivamente. La compañía trata de determinar si el candidato está calificado o no calificado haciendo un cuestionario de 10 preguntas de verdadero o falso. Un candidato calificado tiene una probabilidad p de responder correctamente una pregunta, mientras que un candidato no calificado tiene una probabilidad p de responder incorrectamente una pregunta. Las respuestas a diferentes preguntas se suponen independientes. La compañía decide que cualquier candidato que responda al menos 8 respuestas correctas será considerado como calificado; en otro caso será considerado no calificado.

a) Deducir una fórmula que corresponda a la probabilidad que tiene este test de discernir correctamente si un candidato es calificado o es no calificado para el empleo.

b) Evaluar numéricamente la fórmula obtenida si $q = 0.6$ y $p = 0.9$.

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de media poblacional μ y dispersión σ desconocida. Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño n. Deducir la expresión del intervalo de confianza para μ con una confianza del $(1-\alpha)100\%$. Justificar los distintos pasos de la demostración mencionando las propiedades y/o teoremas usados.

Ejercicio 4. Sean X y Y variables aleatorias independientes que tienen una varianza común, σ^2, y sea $W=aX-Y$ con $a\neq 0$

a) ¿Cuál es la covarianza $Cov(X, W)$?

b) Calcular el coeficiente de correlación lineal $Corr(X, W)$

Deducir las respuestas justificando sus pasos. Recordar que si R y T son dos variables aleatorias $Cov(R,T)=E(RT)-E(R)E(T)$ y $Corr(R,T)=Cov(R,T)/[V(R)V(T)]^{1/2}$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2012

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a 1b	2a 2b	3	4a 4b 4c	Calificación

Calificación Final: ……………………….

Ejercicio 1. Bajo ciertas condiciones, un jugador tiene una probabilidad p de ganar un juego. Supongamos que se juega –manteniendo las condiciones– dicho juego tres veces. Sean los eventos definidos a continuación.

A: el jugador gana el primer juego; *B:* el jugador gana el segundo juego; y, *C:* el jugador gana exactamente una vez.

a) ¿Existe algún valor de p para el cual los eventos A y C resulten independientes? Justificar la respuesta con un planteo adecuado. De existir, indicar su valor o valores.

b) Para $0 < p < 1$, ¿pueden los tres eventos ser mutuamente independientes? Nota: ¿Puede darse $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$? Justificar claramente la respuesta.

Ejercicio 2.

a) Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p, X~Bin(n;p), con $np(1-p) > 3$, y sean a y b dos valores del recorrido de X. Se desea calcular la probabilidad $P(a < x \leq b)$ utilizando la aproximación normal de la distribución binomial para realizar dicho cálculo. Explicar cuáles son los pasos a seguir. Indicar la corrección por continuidad (conocida también como de medio punto) apropiada para dicho cálculo.

b) Sea X la variable aleatoria correspondiente a la temperatura medida en grados Celsius (C) en una región geográfica y en una época del año particular. Se conoce que X tiene distribución normal de valor medio 30 C y desvío estándar 2 C. Un turista americano planea visitar el sitio y convierte las temperaturas en C a grados Fahrenheit (F) multiplicándolas por 9/5 y adicionándoles luego 32. ¿Qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria temperatura en F y cuánto valen los parámetros que la caracterizan?

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con valor esperado $E(X)=\mu$ y varianza $V(X)=\sigma^2$. Al considerar una muestra aleatoria de tamaño 2 de dicha variable, $\{X_1, X_2\}$, la varianza muestral satisface que $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$. Demostrar que S^2 es un estimador insesgado de σ^2.

Ejercicio 4. En el control estadístico de un proceso se toma una muestra de tamaño n (n>30), $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, y se diseña una prueba de hipótesis formulando, en la hipótesis nula, que la media del proceso, μ, es igual a la media nominal, μ_0. La región de rechazo de la hipótesis nula está definida por

$$\left\{\overline{X} = \overline{x} \in \mathbf{R} \,/\, \overline{x} \leq \mu_0 - 2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \vee \overline{x} \geq \mu_0 + 2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

La constante σ es la dispersión poblacional que se supone conocida.

a) Presentar el planteo del test mencionando las justificaciones que se consideren pertinentes.

b) ¿Cuánto vale es el nivel de significación de este test?

c) ¿Cuánto vale la probabilidad de error de Tipo II cuando $\mu = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$?