

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo

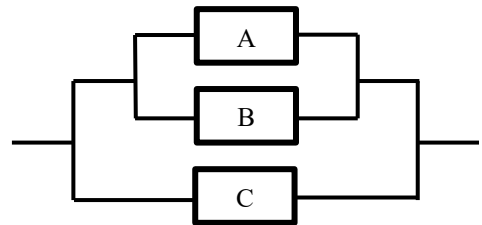
Estudiante Especialidad:

Año de cursado: Docente a cargo del curso:

| 1a | 1bi | 1bii | 2I | 2II | 3 | 4a | 4b | Calificación |
|----|-----|------|----|-----|---|----|----|--------------|
| | | | | | | | | |

Ejercicio 1. La vida útil de un tipo de componente medida en horas es una variable aleatoria T con distribución exponencial de valor esperado 1000 horas. Contestar las siguientes cuestiones justificando el planteo de cada respuesta.

- a) Calcular la duración que es superada por lo menos por el 80% de las componentes de este tipo.
- b) Se toman 3 componentes de este tipo –identificadas como A, B y C–, que fallan o funcionan en forma independiente, y se las conecta en un sistema como se muestra en la figura. Contestar las siguientes dos cuestiones.
 - i. Las tres componentes funcionan al ponerse en marcha el sistema y así siguen haciéndolo hasta que, en la hora 1000, A y B dejan de funcionar simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema siga funcionando por lo menos 200 horas más? Justificar la respuesta.
 - ii. Si se conoce que el sistema funciona hace más de 1000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que la componente A todavía esté funcionando?



Ejercicio 2. Prueba de Hipótesis. Responder en forma justificada.

| | |
|---|--|
| <p>I) En una prueba de hipótesis (elegir una proposición como verdadera):</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Se desea conocer el valor de cierto parámetro. b) Se construye una hipótesis nula sugerida por los datos. c) Se busca “evidencia” (pruebas) a favor de la hipótesis nula que se desea demostrar que es cierta. d) Ninguna de las anteriores es correcta. | <p>II) Ud. desea aportar evidencia de que un nuevo tratamiento es mejor que uno clásico. Escriba la hipótesis nula H_0:</p> <ol style="list-style-type: none"> a) El nuevo tratamiento no es mejor que el clásico. b) El nuevo tratamiento es mejor que el clásico. c) El rendimiento del nuevo tratamiento supera al clásico. d) Ninguna de las anteriores es correcta. |
|---|--|

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria discreta con distribución uniforme con recorrido R_X donde $R_X = \{-2, -1, 1, 2\}$. Sea $Y = X^2$. Calcular el coeficiente de correlación $CORR(X, Y)$. ¿Son variables aleatorias independientes? Justificar.

Ejercicio 4. Un informe reporta que la técnica gráfica de teletermometría de esfuerzo (GTS) detectó con precisión 48 de 60 casos conocidos de plaquetas con anomalías.

- a) Construir un intervalo de 90% de confianza para la verdadera proporción de plaquetas con anomalías que serían detectadas por la técnica GTS. Indicar todas las justificaciones que conducen al planteo hecho.
- b) Si se desea que el intervalo anterior se reduzca a la tercera parte, ¿con cuántos casos conocidos más se debería contar para obtenerlo?

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo

Estudiante Especialidad:

Año de cursado: Docente a cargo del curso:

| 1a | 1b | 1c | 1d | 2 | 3I | | 3II | | Calificación |
|----|----|----|----|---|-----|-----------------|-----|-----------------|--------------|
| | | | | | Rta | Justificaciones | Rta | Justificaciones | |
| | | | | | | | | | |

DEFINIR VARIABLES Y/O EVENTOS. JUSTIFICAR LOS PLANTEOS. NO SE CONSIDERARÁN CÁLCULOS DISPERSOS.

Ejercicio 1. En un depósito se almacenan componentes que son fabricadas por dos máquinas. La máquina *A* elabora el triple de lo que hace la máquina *B*. La vida útil de las que son elaboradas por la máquina *A*, es una variable aleatoria con distribución exponencial de valor esperado 4000 horas. Mientras que las que provienen de la máquina *B* tienen una vida útil con distribución exponencial de parámetro 2×10^{-4} horas⁻¹. Contestar las siguientes cuestiones justificando el planteo de cada respuesta.

- Se selecciona al azar una componente del depósito, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 6000 horas?
- Si se elige una componente al azar del depósito y su vida útil supera las 6000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina *B*?
- Calcular la duración que es superada por lo menos por el 80% de las componentes que provienen de la máquina *A*.
- Se eligen 36 componentes de las que provienen de la máquina *A*, ¿cuál es la probabilidad de que la duración promedio de la muestra supere las 4200 horas?

Ejercicio 2. La variable bidimensional (X, Y) puede tomar los valores:

$$\{(0, 0); (1, 1); (-1, 1); (1, -1); (-1, -1)\}$$

cada uno de ellos con igual probabilidad $1/5$. Determinar si X y Y son variables aleatorias independientes. Justificar.

Ejercicio 2. Intervalo de Confianza. Prueba de Hipótesis.

Tanto en **I)** como en **II)**: Indicar cuál es la opción elegida como respuesta y, además, elegir tres afirmaciones entre las descartadas, y dar una explicación clara y concisa de porqué cada una de ellas no se consideró como la respuesta pedida.

- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor la diferencia fundamental en el objetivo entre un intervalo de confianza y una prueba de hipótesis?
 - Un intervalo de confianza se usa para estimar un parámetro, mientras que una prueba de hipótesis se usa para describir los datos muestrales.
 - Un intervalo de confianza determina si un parámetro es significativamente diferente de un valor, mientras que una prueba de hipótesis estima un rango de valores para el parámetro.
 - Un intervalo de confianza proporciona un rango de valores plausibles para un parámetro poblacional, mientras que una prueba de hipótesis evalúa la evidencia contra una afirmación sobre un parámetro poblacional.
 - Ambos tienen el mismo objetivo: determinar el valor exacto de un parámetro poblacional.
 - Un intervalo de confianza se basa en el error estándar, mientras que una prueba de hipótesis se basa en la desviación estándar.
- Si un investigador desea saber si la media de una nueva población es diferente de un valor preestablecido de 100, ¿qué herramienta estadística sería más apropiada para responder directamente a esta pregunta de decisión?
 - Un intervalo de confianza para la media.
 - Una estimación puntual de la media.
 - Un histograma de la muestra.
 - Una prueba de hipótesis para la media.
 - El coeficiente de correlación.

Apellido y Nombre: **Especialidad:**.....

Definir claramente las variables utilizadas. Resolver los ejercicios con planteos adecuados expresados en forma clara. Cada una de las hojas utilizadas para la resolución deben tener nombre y apellido completo del estudiante. Para aprobar el examen se requiere responder en forma correcta al menos el 60% del mismo.

Ejercicio 1

El tiempo de vida útil (en años) de un transformador eléctrico en una subestación es una variable aleatoria continua que presenta la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3(b-x)^2 & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de b que determinan la función de densidad de X y calcule el tiempo medio de vida útil es de 1 año.

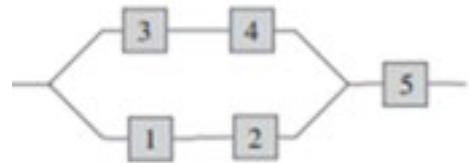
b) Obtener la función de distribución de X y a partir de ella calcular la probabilidad de que el tiempo de vida útil exceda de 0,5 años.

El costo de reemplazo incluye un costo fijo c_0 por la nueva instalación y un costo que aumenta proporcionalmente con X^2 por las pérdidas de eficiencia. Sea C es el costo total que está dado por la siguiente expresión $C = c_0 + c_1 X^2$, donde c_1 es una constante.

c) Hallar el costo esperado en que se incurre en términos de c_0 y c_1 .

Ejercicio 2

Considere el sistema de componentes conectados como muestra la figura. Si los componentes funcionan independientemente uno de otro con probabilidad p . Exprese la probabilidad de que el sistema funcione en función de p .



Ejercicio 3

Una máquina produce varillas cuya longitud (en cm) es una variable aleatoria con distribución normal de varianza 25. Se examina una muestra aleatoria de 38 varillas producidas por esa máquina y se registra una longitud promedio de 51,74 cm.

- Con un nivel de significación de 0,05, ¿Se puede garantizar que la longitud media de las varillas producidas por esa máquina supera los 50 cm?
- Calcular el valor P y verificar la correspondencia con la prueba.
- ¿Cuál es la probabilidad de asegurar que la longitud media de las varillas es superior a 50 cm cuando en realidad la longitud media es de 52,2 cm? ¿Qué nombre recibe la probabilidad hallada?

Ejercicio 4

En el evento “Desafío de Innovación en Software” los desarrolladores tienen un tiempo máximo de 17 minutos fijado por los organizadores. El desarrollador que participa debe completar su presentación y divide su proceso en tres etapas, cuyos tiempos de duración son variables aleatorias independientes que se distribuyen en forma normal, según se detalla a continuación:

- Introducción del problema y propuesta de solución: Media=2 minutos y desvío estándar=24 segundos.
 - Demostración del software innovador: Media=13 minutos y desvío estándar=2,6 minutos.
 - Resumen de beneficios y conclusiones: Media=1 minuto y desvío estándar=12 segundos.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el desarrollador no pueda terminar a tiempo su presentación?
 - Si un desarrollador, demoró en la demostración más 10 minutos, ¿Cuál es la probabilidad de que haya completado la demostración en un tiempo menor a la media?

Estudiante Especialidad:

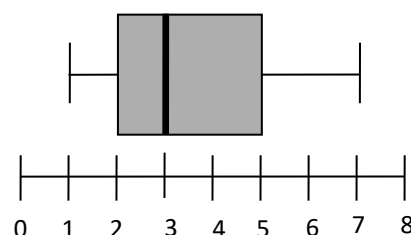
Ciclo Lectivo de Cursado: Docente a cargo del curso:

| Ejercicio 1 | | Ejercicio 2 | Ejercicio 3 | Ejercicio 4 | Calificación |
|-------------|---|-------------|-------------|-------------|--------------|
| a | b | | | a b | |

Ejercicio 1. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarlo. En caso de ser falsa dar un contraejemplo o una justificación clara.

- a) Dos variables aleatorias independientes tienen distribución Bernoulli verificándose que $X \sim Be(0,3) \wedge Y \sim Be(0,2)$, entonces $W = X + Y$ tiene distribución Binomial verificándose que: $W \sim Bi(n = 2; p = 0,5)$.

- b) De las mediciones hechas de un gran número de observaciones se ha obtenido el diagrama de caja y bigote de la figura. El porcentaje de observaciones entre 3 y 5 es aproximadamente el doble del que toman valores entre 1 y 2.

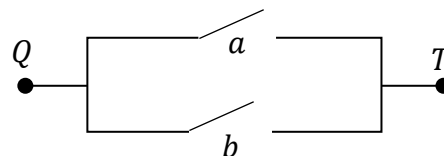


Ejercicio 2. Una sección de un circuito eléctrico consta de dos interruptores a y b conectados en paralelo como se muestra en la figura.

La probabilidad de que a esté cerrado y b esté abierto es 0,4, la de que a esté abierto y b esté cerrado es 0,1, y la probabilidad de que no pase corriente de Q a T es p .

Si se sabe que la corriente pasa de Q a T , la probabilidad de que un solo interruptor esté abierto es 0,625. Calcular el valor de p .

Justificar la respuesta con un planteo adecuado.



Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria normal con media μ y desvío σ . Hallar el mínimo tamaño de muestra que se debe tomar si se quiere que la probabilidad de que la **media muestral** sea mayor que $\mu + \sigma/16$, sea menor a 0,01.

Ejercicio 4. Una empresa considera la posibilidad de cambiar sus máquinas expendedoras automáticas por otras más modernas lanzadas al mercado recientemente. Se ha establecido la conveniencia de la inversión si se puede probar que el tiempo medio de atención por cliente sea inferior a los 2 minutos, y se desea que la probabilidad de tomar una decisión errónea en tal sentido valga 0,05. Se sabe que, con las máquinas actuales, el desvío estándar respecto del tiempo de atención es de medio minuto, teniéndose razones fundadas para asumir que con las máquinas nuevas no ha de modificarse. Se realizó un ensayo con las máquinas nuevas, en el cual se atendieron a 49 personas en 83,3 minutos.

- a) Diseñar una prueba de hipótesis adecuada a este problema, e indicar cuál sería la decisión recomendada. Justificar la propuesta. Indicar la distribución del estadístico usado.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de comprar las nuevas máquinas si con ellas el tiempo medio de atención fuera de 1,8 minutos? ¿Es esta una probabilidad de error o de acierto?

Estudiante Especialidad:

Año de cursado: Docente a cargo del curso:

| 1a | 1b | 1c | 2a | 2b | 3 | Calificación |
|----|----|----|----|----|---|--------------|
| | | | | | | |

Unas breves palabras. Cuidar la claridad de resolución de los problemas, evitando los cálculos dispersos, y dar la respuesta que se pide. Justificar los pasos. Deben definirse todas las letras que representan eventos y/o variables aleatorias en cada problema. Cualquier aclaración que se considere conveniente, escribirla. Utilizar cuatro o cinco decimales al expresar las probabilidades.

Ejercicio 1. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. De ser falsa dar un contraejemplo o una explicación clara.

- a) Sean A, B, C tres eventos definidos en un espacio muestral (con probabilidades no nulas) tales que A y B resultan independientes, y $A \subset C$. Entonces,

$$P(B/A \cap C) = P(B).$$

- b) Sean las variables aleatorias X y Y de valores esperados μ_X y μ_Y y sus varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 , respectivamente. Sea $Cov(X, Y)$ la covarianza y sea $Corr(X, Y)$ el coeficiente de correlación entre X y Y , respectivamente. Se define la variable aleatoria $W = \frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}$. Entonces,

$$V(W) = 2[1 + Corr(X, Y)].$$

- c) En una prueba de hipótesis bilateral sobre un parámetro poblacional, al acercarse hacia el valor del parámetro que establece la hipótesis nula desde valores poblacionales consistentes con la hipótesis alternativa, la potencia aumenta.

Ejercicio 2. Sea $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$ una muestra aleatoria de la variable X cuya distribución de probabilidad es:

| x | 0 | 1 | 2 |
|------------|-------------------|---------------|---------------|
| $P(X = x)$ | $1 - \frac{a}{2}$ | $\frac{a}{4}$ | $\frac{a}{4}$ |

$$0 < a < 1$$

- a) Analizar si $\hat{a} = \left(\frac{3}{4}\right)\bar{X}$ es un estimador insesgado de a .
- b) Para $a = \frac{4}{3}$, hallar el tamaño que debe tener la muestra (supuesto $n > 30$) para que la probabilidad de que \bar{X} supere a su valor esperado en por lo menos $\frac{1}{6}$ valga aproximadamente 0,05. Presentar un planteo justificado adecuado.

Ejercicio 3. En una línea de impresión el tiempo que lleva imprimir un artículo con el logo de la empresa es una variable aleatoria con distribución normal con una media de cinco segundos y un desvío estándar de un segundo, considerándose que el tiempo de impresión sobre cada artículo es independiente de los demás. La entrada a la línea de un artículo para iniciar el proceso de impresión y la salida del artículo anterior una vez que se completa sobre él el logo, lleva un tiempo fijo de medio segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total del proceso de impresión de 101 artículos en la línea no supere los 10 minutos? Justificar el planteo de la resolución con las propiedades y/o teoremas adecuados.