

## Propuesta temas Probabilidad y Estadística

### Unidad nº 1 Introducción a la Probabilidad

Noción de probabilidad. Espacio muestral. Evento. Diagrama de Venn. Diagrama de árbol. Probabilidades a priori, empírica, subjetiva. Axiomas de probabilidad. Reglas de adición e intersección. Eventos mutuamente excluyentes. Eventos independientes. Probabilidad condicional. Teorema de probabilidad total. Teorema de Bayes. Sistemas de componentes conectados en serie y en paralelo.

- Presentación de los temas, definiciones y conceptos fundamentales de la unidad.
- Trabajo con unión, intersección y complemento de eventos.
- Propiedades y cálculo de probabilidades.
- Definición de los tipos de eventos.
- Demostración de que la probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de su intersección.
- Extensión de la expresión de la probabilidad para la unión de tres conjuntos.
- Manejo de diagramas de Venn y de árbol.
- Demostración de que la independencia de dos sucesos  $A$  y  $B$  implica la independencia de los pares  $A^c$  y  $B$ ;  $A$  y  $B^c$ ;  $A^c$  y  $B^c$ .
- Demostración de la ley la Probabilidad Total.
- Enunciado del teorema de Bayes.
- Demostrar que  $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$ .
- Componentes conectados en serie y paralelo.

### Unidad nº 2 Estadística Descriptiva

Diagrama de distribución de frecuencias. Histograma. Polígono de frecuencia. Diagramas de puntos y de tallo y hojas. Gráfica de frecuencia acumulada. Rango. Medidas de tendencia central: media, mediana, moda, media geométrica. Medida de variabilidad o dispersión: desviación media, varianza, desviación estándar. Momentos. Curtosis. Asimetría. Percentiles. Diagrama de Pareto. Gráfica de serie de tiempo. Diagrama de cajas y bigote. Implementación computacional.

- Concientización de los cuidados en la lectura atenta de gráficos.
- Definición de las medidas de tendencia central y de variabilidad.
- Cambio de escala en el conjunto de mediciones  $y_i = ax_i + b$  con  $i=1, 2, \dots, n$ , y como modifica las medidas de tendencia central y de variabilidad.
- Mención de momentos, curtosis, asimetría.
- Diagrama de caja y bigote o boxplot.
- Manejo de datos agrupados.
- Mención de diagrama de Pareto, gráfica de serie de tiempo, diagrama de dispersión.
- Trabajo práctico de computación.

### Unidad nº 3 Variables aleatorias discretas

Modelos determinísticos y modelos aleatorios. Introducción a las variables aleatorias discretas y continuas. Funciones de distribución de probabilidad y función de distribución acumulada para variables discretas. Valor esperado y varianza. Propiedades. Momentos. Funciones de variables aleatorias discretas. Distribuciones especiales discretas: Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica e Hipergeométrica. Parámetros característicos, valor esperado y varianza. Aplicaciones.

- Concepto básico de variable aleatoria.
- Definición y propiedades de la función de probabilidad de masa para variables aleatorias discretas y de la función de distribución acumulada.

- Definición y propiedades del valor esperado. Valor esperado de una función de v.a.d.
- Definición de momentos.
- Definición y propiedades de la varianza. Demostración de la fórmula abreviada para el cálculo de la varianza  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .
- Enunciado del teorema: Sea  $X$  una v.a. y  $\{M_i, 1 \leq i \leq n\}$  una partición del espacio muestral  $E$ . Entonces:
  - $E(X) = \sum E(X/M_i) \cdot P(M_i)$
  - $V(X) = \sum V(X/M_i) \cdot P(M_i) + \sum [E(X/M_i) - E(X)]^2 \cdot P(M_i)$
- Variables aleatorias discretas especiales
  - Definición de v.a. Bernoulli. Aplicaciones. Deducción del valor esperado y la varianza.
  - Definición de v.a. Binomial. Aplicaciones. Deducción del valor esperado y la varianza.
  - Presentación de la v.a. Hipergeométrica y de la v.a. Binomial Negativa. Aplicaciones.
  - Definición de v.a. Geométrica. Aplicaciones.
  - Definición de la v.a. Poisson. Aplicaciones. Deducción del valor esperado y la varianza.
  - Mención de la distribución Poisson como un límite de una v.a. binomial:  $b(x;n,p) \rightarrow p(x;\lambda)$  con  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda > 0$ .
  - Proceso de Poisson con tasa de sucesos  $\alpha, \lambda = \alpha t$ .

#### **Unidad nº 4 Variables aleatorias continuas**

Funciones de densidad de probabilidad y de probabilidad acumulada. Valor esperado y varianza. Momentos. Propiedades. Percentiles. Función de variable aleatoria continua. Distribuciones especiales continuas. Distribución exponencial negativa. Distribución Normal. Estandarización de la variable y aplicaciones. Aproximación normal de la distribución binomial. Nociones de distribuciones Gamma, Beta y Weibull.

- Definición y propiedades de la función de densidad de probabilidad y de la función de probabilidad acumulada.
- Definición y propiedades del valor esperado y la varianza.
- Definición de momentos.
- Valor esperado de una función de v.a.c.
- Variables aleatorias continuas especiales.
  - Definición de la distribución exponencial negativa. Aplicaciones. Deducción del valor esperado, la varianza y la mediana.
  - Definición de la distribución normal. Parámetros característicos. Propiedades de la función densidad de probabilidad de la distribución normal. Aplicaciones. Estandarización de la v.a. Uso de tabla.
  - Explicación de la aproximación normal de la distribución binomial. Corrección por continuidad.
  - Presentación de las distribuciones Gamma, Beta y Weibull.
- Presentación de función de v.a.c. Ejemplos y aplicaciones.

#### **Unidad nº 5 Variables aleatorias bidimensionales y de mayor dimensión**

Distribuciones de probabilidad conjunta, marginales y condicional. Covarianza. Coeficiente de correlación.

Desigualdad de Chebyshev Combinación lineal de un número finito de variables aleatorias. Teorema Central del Límite.

Muestra aleatoria. Estadísticos. Distribuciones de la media muestral y de la varianza muestral.

Generación de números al azar. Simulaciones numéricas.

- Definición y propiedades de las distribuciones de probabilidad conjunta, marginales y condicionales.
  - Caso discreto. Distribución conjunta de probabilidades o función de probabilidad de masa conjunta  $p_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$ . Función de probabilidad de masa marginal de  $X$ ,  $p_X(x)$ , y de  $Y$ ,  $p_Y(y)$ . Condición de independencia. Representaciones gráficas.
  - Caso continuo. Función de densidad de probabilidad conjunta  $f_{X,Y}(x,y)$ . Funciones de densidad de probabilidad marginal,  $f_X(x)$  y  $f_Y(y)$ . Funciones de densidad de probabilidad condicional  $f_{Y/X}(y/x)$  y  $f_{X/Y}(x/y)$ . Condición de independencia. Representaciones gráficas.
- Valores esperados, covarianza y correlación. Casos discreto y continuo.
  - Definición y propiedades.
  - Demostración de  $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$
  - Demostración de  $V(aX+bY)$ ,  $Cov(aX+bY)$ ,  $Corr(aX+bY)$ . Casos general y expresión para v.a. independientes.
  - Definición y cálculo de valor esperado de  $X$  condicionado por  $Y$  o función de regresión de  $X$  sobre  $Y$ ,  $E_{X/Y}(x/Y=y)$  y de función de regresión de  $Y$  sobre  $X$ ,  $E_{Y/X}(y/X=x)$ .
- Propiedad reproductiva de la distribución normal. Aplicaciones.
- Expresiones de la desigualdad de Chebyshev. Aplicaciones.
- Enunciado del Teorema Central del Límite. Aplicaciones.
- Muestra aleatoria y estadísticos.
  - Definición de muestra aleatoria.
  - Deducción del valor esperado y de la varianza de la v.a. media muestral  $\bar{X}=(X_1+X_2+\dots+X_n)/n$  y de la suma  $T=X_1+X_2+\dots+X_n$  de una muestra aleatoria. Deducción del valor esperado de la v.a. varianza muestral  $S^2$ .
  - Introducción a la generación de números aleatorios y su implementación en programas computacionales.

## **Unidad nº 6** Estimación de parámetros

Estimación puntual y por intervalos. Consistencia, suficiencia y eficiencia. Intervalos de confianza basados en una sola muestra: intervalos basados en una población con distribución normal para la media con dispersión conocida o desconocida –distribución  $T$  de Student– y para la varianza –distribución  $\chi^2$ –; intervalos para muestras grandes para la media y la proporción de una población. Intervalos de confianzas basados en dos muestras: contraste entre medias poblacionales.

- Estimadores puntuales. Estimador de  $\theta = \hat{\theta}$ .
  - Definición de sesgo:  $(E[\hat{\theta}] - \theta)$  y condición de insesgado. Varianza de un estimador,  $V(\hat{\theta})$
  - Demostración de la igualdad  $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + (\text{sesgo})^2$  donde  $ECM(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - \theta]^2$  es el error cuadrático medio del estimador.
- Intervalos de confianza. Definición.
  - Deducción del I.C. para la media poblacional de una población normal con varianza conocida. Deducción del vínculo entre el tamaño muestral, la amplitud del intervalo y el nivel de confianza.

- Deducción del I.C. para la media poblacional de una población normal con varianza desconocida.
- Deducción del I.C. para la media poblacional de una población normal arbitraria a partir de una muestra grande. Deducción del vínculo entre el tamaño muestral, la amplitud del intervalo y el nivel de confianza.
- Deducción del I.C. para la varianza poblacional de una población normal.
- Deducción del I.C. para la proporción poblacional a partir de una muestra grande. Deducción del vínculo entre el tamaño muestral, la amplitud del intervalo y el nivel de confianza.
- Deducción del I.C. para la diferencia de las medias poblacionales de dos poblaciones normales independientes con varianzas conocidas.
- Deducción del I.C. para la diferencia de las medias poblacionales de dos poblaciones normales independientes con varianzas desconocidas pero supuestas iguales.
- Deducción del I.C. para la diferencia de las medias poblacionales de dos poblaciones independientes con muestras grandes.

#### **Unidad n° 7 Prueba de hipótesis**

Prueba de hipótesis estadística. Pruebas respecto a la media, varianza y proporciones. Errores tipo I y II. Potencia. Error máximo del intervalo de aceptación. Tamaño de la muestra. Prueba de diferencia entre promedios para pares de muestras. Nociones de bondad de ajuste.

- Definición de prueba de hipótesis. Explicación del procedimiento.
- Definición de errores tipo I y II. Definición de nivel de significación, nivel de confianza y potencia de una prueba de hipótesis.
- Diferencias entre una prueba de hipótesis y un intervalo de confianza.
- Prueba de hipótesis de nivel de significación  $\alpha$  para la media  $\mu$  de una población normal con desvío estándar conocido  $\sigma$  a partir de una muestra de tamaño  $n$  de hipótesis nula es  $H_0: \mu=\mu_0$ . Deducción de las regiones de rechazo para las hipótesis alternativas  $H_a: \mu>\mu_0$ ,  $H_a: \mu<\mu_0$ ,  $H_a: \mu\neq\mu_0$ . Deducción de la expresión de la probabilidad  $\beta(\mu_v)$  del error tipo II en los tres casos. Deducción del tamaño muestral para que la prueba mantenga su nivel de significación  $\alpha$  y tenga un valor  $\beta(\mu_v)=\beta$  en el valor alternativo  $\mu_v$ .
- Prueba de hipótesis de nivel de significación  $\alpha$  para la media  $\mu$  de una población normal con desvío estándar desconocido  $\sigma$  a partir de una muestra de tamaño  $n$  de hipótesis nula es  $H_0: \mu=\mu_0$ . Deducción de las regiones de rechazo para las hipótesis alternativas  $H_a: \mu>\mu_0$ ,  $H_a: \mu<\mu_0$ ,  $H_a: \mu\neq\mu_0$ .
- Prueba de hipótesis de nivel de significación  $\alpha$  para la media  $\mu$  de una población arbitraria a partir de una muestra grande de tamaño  $n$  de hipótesis nula es  $H_0: \mu=\mu_0$ . Deducción de las regiones de rechazo para las hipótesis alternativas  $H_a: \mu>\mu_0$ ,  $H_a: \mu<\mu_0$ ,  $H_a: \mu\neq\mu_0$ .
- Prueba de hipótesis de nivel de significación  $\alpha$  para la varianza  $\sigma^2$  de una población normal a partir de una muestra de tamaño  $n$  de hipótesis nula es  $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$ . Deducción de las regiones de rechazo para las hipótesis alternativas  $H_a: \sigma^2>\sigma_0^2$ ,  $H_a: \sigma^2<\sigma_0^2$ ,  $H_a: \sigma^2\neq\sigma_0^2$ .
- Prueba de hipótesis de nivel de significación  $\alpha$  para una muestra grande de tamaño  $n$  (grande) en relación con la proporción poblacional  $p$  que cumple determinada característica de hipótesis nula es  $H_0: p=p_0$ . Deducción de las

regiones de rechazo para las hipótesis alternativas  $H_a: p > p_0$ ,  $H_a: p < p_0$ ,  $H_a: p \neq p_0$ . Deducción de la expresión de la probabilidad  $\beta(\mu_v)$  del error tipo II en los tres casos. Deducción del tamaño muestral para que la prueba mantenga su nivel de significación  $\alpha$  y tenga un valor  $\beta(\mu_v) = \beta$  en el valor alternativo  $\mu_v$ .

- Prueba de hipótesis de nivel de significación  $\alpha$  para la diferencia de las medias  $\mu_X$  y  $\mu_Y$  de dos poblaciones con desvíos estándar conocidos  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$  a partir de muestras de tamaños  $n_X$  y  $n_Y$  de hipótesis nula es  $H_0: \mu_X - \mu_Y = \Delta_0$ . Deducción de las regiones de rechazo para las hipótesis alternativas  $H_a: \mu_X - \mu_Y > \Delta_0$ ,  $H_a: \mu_X - \mu_Y < \Delta_0$ ,  $H_a: \mu_X - \mu_Y \neq \Delta_0$ .
- Definición de valor P o nivel de significación a posteriori.

### **Unidad n° 8 Regresión lineal y cuadrados mínimos**

Modelo de regresión lineal. Error cuadrático medio. Método de cuadrados mínimos. Correlación. Ecuaciones generales y normales. Enfoque matricial del modelo de regresión lineal simple y generalización a orden n de las ecuaciones algebraicas.

- Lineamientos del método de cuadrados mínimos para el modelo de regresión lineal simple.
- Deducción de las ecuaciones generales y normales.
- Deducción de los estimadores de regresión para las rectas de regresión con ordenada al origen no nula.
- Deducción de los estimadores de regresión para las rectas de regresión que pasan por el origen.
- Definición  $SCTotal = SCE_{expl.} + SC_{res.}$  (SC: suma cuadrados)
- Demostración de las igualdades  $SC_{res.} = S_{yy} - [(S_{xy})^2 / S_{xx}]$ ;  $SCTotal = S_{yy}$ ;  $SCE_{expl.} = [(S_{xy})^2 / S_{xx}]$ ;  $(r)^2 = [(S_{xy})^2 / S_{xx} \cdot S_{yy}]$ .
- Valores notables de  $r^2$ , su significado.

### **Unidad n° 9 Confiabilidad**

Nociones de confiabilidad de un sistema. Tasa instantánea de falla o coeficiente de riesgo. Aplicaciones.