Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Julio 2019

Alumno .... **Especialidad: ....**
Año de cursada: …………………… **Profesor: ……………………..**

1 a b	2	3 a b	4	Calificación

Calificación Final: ……………………………………

Ejercicio 1. En una caja, A, hay 2 bolillas negras y 3 rojas. En otra caja, B, hay 3 bolillas negras, 4 rojas y 2 verdes. Se extrae una bolilla de A y se la introduce en B. Posteriormente, se saca una bolilla de B.

a) Sea X la variable aleatoria que indica el número de bolillas rojas extraídas en total en este procedimiento. Especificar el recorrido de X y calcular la distribución de probabilidad.

b) En este procedimiento, ¿son los eventos "T_1: extraer una bolilla roja de A" y "T_2: extraer una bolilla verde de B" independientes? Justificar la respuesta.

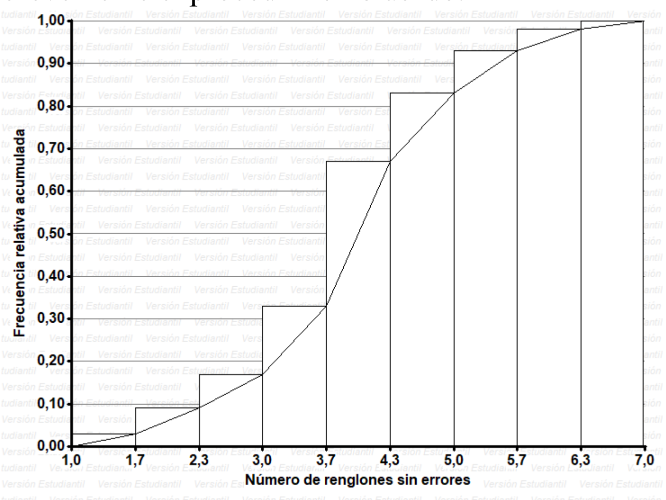
Ejercicio 2. Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demostrarla calculando el valor mencionado al final de la proposición. En caso de ser falsa, justificar la respuesta en forma clara o dar un contraejemplo.

Sea X una variable aleatoria con Distribución Poisson de la que se conoce que $P(X=3)=P(X=4)$. Esta información es suficiente para calcular la varianza de $Y=2X$."

Ejercicio 3. En una prueba de escritura se cuenta la cantidad de renglones sin errores de cada evaluado por minuto. Con los resultados obtenidos se realiza el histograma de Frecuencia relativa acumulada y su correspondiente polígono. Ver figura y tabla.

a) ¿Cuál es el número de renglones sin errores (dar el número aproximado; indicar al menos un decimal) que es superado por el 60% de los evaluados? Justificar la respuesta.

b) Se sabe que 50 evaluados tuvieron a lo sumo 3,7 renglones sin errores. Hacer una estimación del número de personas evaluadas en la prueba (dar un número entero por respuesta). Explicar brevemente el procedimiento usado.



Intervalo	Frecuencia relativa acumulada
[1,0 – 1,7)	0,03
[1,7 – 2,3)	0,09
[2,3 – 3,0)	0,17
[3,0 – 3,7)	0,33
[3,7 – 4,3)	0,67
[4,3 – 5,0)	0,83
[5,0 – 5,7)	0,94
[5,7 – 6,3)	0,98
[6,3 – 7,0)	1

Ejercicio 4. Desarrollar la deducción de un intervalo de confianza para la varianza de una variable aleatoria X con distribución normal. Escribir claramente el planteo del cual se parte y los pasos intermedios hasta llegar a definir el intervalo pedido.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Julio/Agosto 2019

Alumno .... **Especialidad:** ....

Año de cursada: …………………… **Profesor:** ……………………..

1 a b	2	3	4	5	Calificación

Calificación Final: …………………………………….

Ejercicio 1. Una caja contiene 4 bolillas blancas y 6 bolillas negras. Un operador extrae de la caja una bolilla al azar, observa el color y la descarta. Luego elige una segunda bolilla al azar de la caja. Si esta bolilla es de color diferente de la bolilla anteriormente extraída, la vuelve a poner en la caja; si fuera del mismo color, la descarta. Sea X la cantidad de bolillas negras que quedan en la caja al finalizar el procedimiento. Sea Y la cantidad de bolillas blancas observadas en total por el operador (sea que la bolilla fuera descartada o devuelta a la caja).

a) Construir al tabla de distribución de probabilidades conjunta, $p_{X,Y}(x,y)$.

b) ¿Son independientes las dos variables aleatorias? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demostrarla y calcular el valor mencionado al final de la proposición. En caso de ser falsa, justificar la respuesta en forma clara o dar un contraejemplo.

"Sea X una variable aleatoria con Distribución Exponencial de la que se conoce que $P\left(X \geq 8\right) = e^{-2}$. Esta información es suficiente para calcular la varianza de $Y = 5X$."

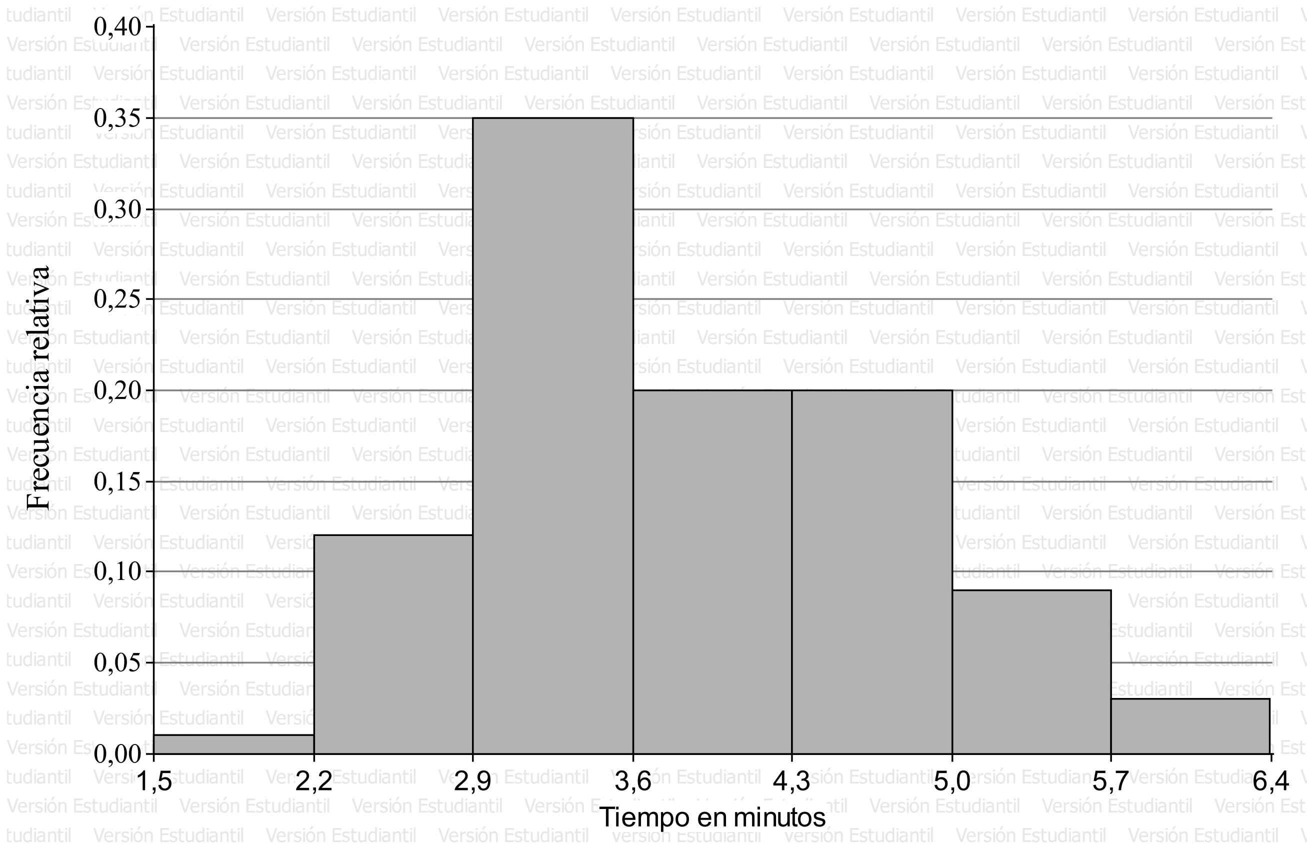
Ejercicio 3. En una prueba de aptitud se registra el tiempo (en minutos) que a los evaluados les lleva realizar una misma tarea. Con los resultados obtenidos se realiza un histograma de frecuencias relativas Se adjunta la tabla de construcción y el gráfico obtenido.

Intervalo	Frecuencia relativa
[1,5 – 2,2]	0,01
(2,2 – 2,9]	0,12
(2,9 – 3,6]	0,35
(3,6 – 4,3]	0,20
(4,3 – 5,0]	0,20
(5,0 – 5,7]	0,09
(5,7 – 6,4]	0,03

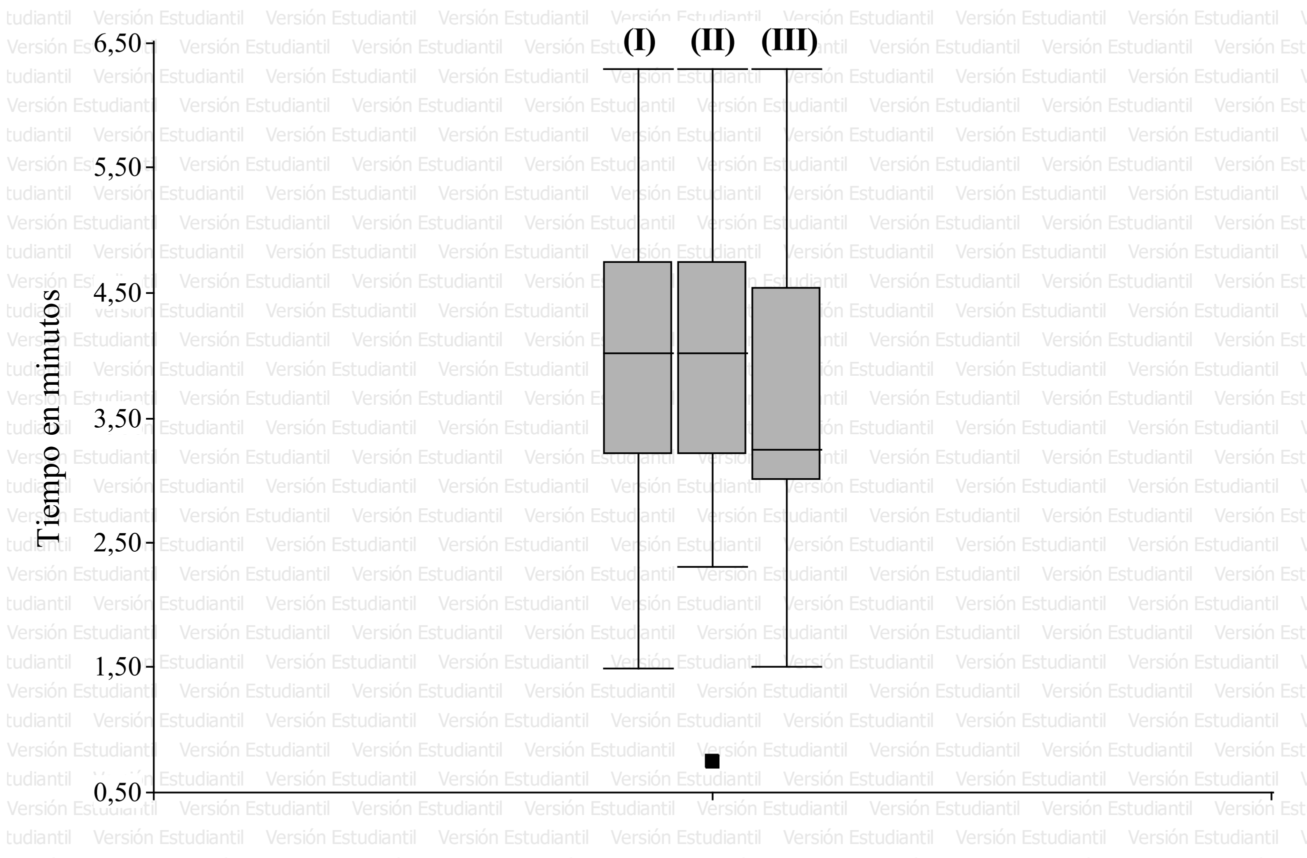
Se adjuntan tres diagramas de caja y bigote (box-plot) identificados como **(I)**, **(II)** y **(III)**. Uno solo de ellos es el que corresponde a los datos obtenidos (sin agrupar). Indicar cuál es y explicar claramente porqué se descartaron las otras dos opciones.

Ejercicio 4. Enunciar el Teorema Central del Límite y dar un ejemplo de su aplicación (no realizar cálculos innecesarios, sólo el planteo del problema que deje claro cómo se aplica el Teorema).

Ejercicio 5. Sea X una variable aleatoria normal con varianza conocida σ^2. Se desea probar la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ contra la alternativa $H_1 : \mu > \mu_0$, tomando α=0,05. Encontrar el tamaño mínimo de muestra necesario para rechazar H_0 en el caso de que μ sea realmente σ unidades mayor a μ_0 con una probabilidad mayor a 0,90.



0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
Frecuencia relativa
1,5
2,2
2,9
3,6
4,3
5,0
5,7
6,4
Tiempo en minutos



(I)
(II)
(III)
6,50
5,50
4,50
3,50
2,50
1,50
0,50
Tiempo en minutos

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Septiembre 2019

Alumno .... Especialidad: ....
Año de cursada: …………………… Profesor: ……………………..

1 a b c	2 a b	3 a b	4	Calificación

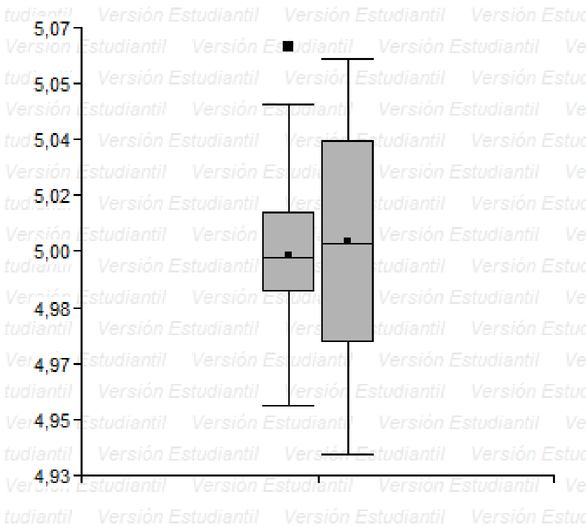
Calificación Final: ……………………………………..

Ejercicio 1. Un contratista encarga un gran número de vigas de acero con longitud media de 5 metros. Se sabe que la longitud de una viga es una variable aleatoria X normalmente distribuida con un desvío estándar de 0,02 metros. Después de recibir el embarque, el contratista selecciona 16 vigas al azar y medirá sus longitudes para decidir si acepta o rechaza el encargo. Él desea que la probabilidad de rechazar un embarque bueno sea de 0,04.

a) Plantear una prueba de hipótesis que permita decidir entre rechazar o no el embarque. Establecer las hipótesis, dar el estadístico, mencionar su distribución bajo la hipótesis nula y dar la región de rechazo. Supongamos que el promedio de las 16 longitudes medidas dio 4,87 metros. En base a esta muestra, ¿qué decisión toma el contratista?

b) ¿Cuál es el error Tipo II asociado a esta prueba? Hacer un gráfico cualitativo de la probabilidad de cometer este tipo de error en función de valor del parámetro de interés consistente con la hipótesis alternativa.

c) Se mide una muestra de 150 de estas vigas. Indicar cuál de dos los box-plot de la figura es más razonable que corresponda a las mediciones realizadas. Justificar la respuesta.



Ejercicio 2. Un alumno contesta una pregunta que ofrece cuatro soluciones posibles en un examen de opción múltiple. Supongamos que la probabilidad de que el alumno conozca la respuesta correcta es 0,8, y que la probabilidad de seleccionar la respuesta correcta al azar es 0,25.

a) Si el alumno contesta correctamente la pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado la respuesta al azar?

b) Por cada respuesta correcta se puntúa con 1, si es incorrecta con 0. El examen tiene 10 preguntas de las descritas en el enunciado general, de enunciados independientes. Se aprueba el examen con 8 puntos o más. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe el examen?

Ejercicio 3. Se tiene una urna con 2 bolillas rojas y 3 blancas. Se tira una moneda equilibrada: si sale cara se extraen dos bolillas con reposición de la urna y, si sale ceca, se extraen dos bolillas sin reposición de la urna. Se definen los eventos R_1: "la primera bolilla extraída es roja" y R_2: "la segunda bolilla extraída es roja".

a) Calcular $P(R_1 \cap R_2)$.

b) ¿Son R_1 y R_2 eventos independientes? Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demostrarla calculando el valor mencionado al final de la proposición. En caso de ser falsa, justificar la respuesta en forma clara o dar un contraejemplo.

Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Se consideran dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y $n_2=4n_1$, con medias muestrales $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$. El estadístico $Y = a\,\overline{X}_1 + (1-a)\,\overline{X}_2$ es insesgado y tiene varianza mínima cuando $a = 1/5$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2019

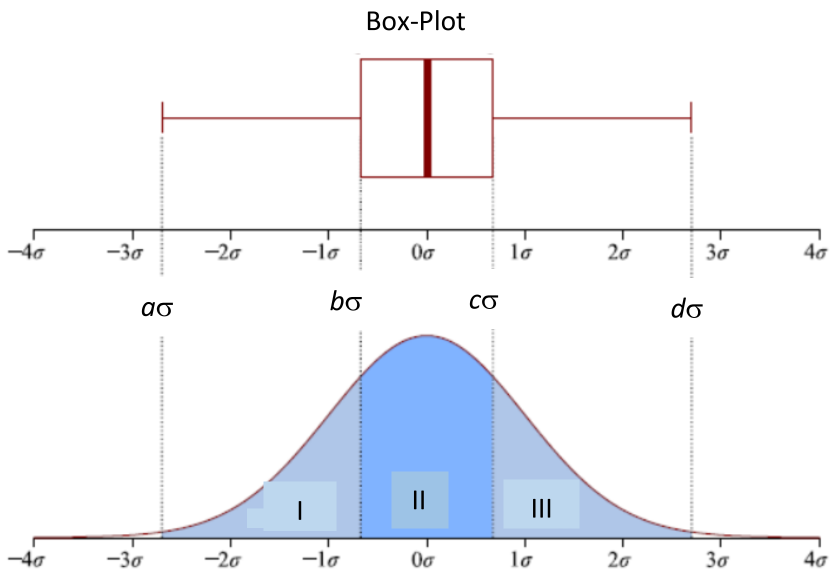
Alumno .... **Especialidad:** ....
Año de cursada: …………………… **Profesor:** ……………………..

1	2	3 a b	4 a b c	Calificación

Calificación Final: …………………………………….

Ejercicio 1. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $p=1/2$. Demostrar que la covarianza entre $U=X+Y$ y $W=|X-Y|$ es cero y, sin embargo, estas variables aleatorias no son independientes. Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. En la figura se representa la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal de valor medio 0 y desvío estándar σ y, en simultáneo, el box-plot correspondiente. Indicar los valores de a, b, c, d en la escala horizontal. Dar el valor de las áreas de las regiones identificadas como I, II y III.



Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demostrarla. En caso de ser falsa, justificar la respuesta en forma clara o dar un contraejemplo.

a) Una cierta hipótesis nula no se rechaza con un nivel de significación de 0,02. Con los mismos datos, tampoco se rechazará con un nivel de significación de 0,05.

b) Sea X una variable aleatoria con valor esperado $E(X)=\mu$ y varianza $V(X)=\sigma^2$. Al considerar una muestra aleatoria de tamaño 2 de dicha variable, $\{X_1, X_2\}$, la variable $W=\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$ es un estimador insesgado de σ^2.

Ejercicio 4. Se tiene una población determinada con $\sigma=8{,}4\,\text{cm}^2$ y se quiere probar la hipótesis nula $\mu=80{,}0\,\text{cm}^2$ contra la hipótesis alternativa $\mu<80{,}0\,\text{cm}^2$ en base a una muestra aleatoria de tamaño 100.

a) Si la hipótesis nula se rechaza para $\bar{x}\leq 78{,}2\,\text{cm}^2$, ¿cuál es el nivel de significación de la prueba? Justificar las propiedades o teoremas que avalan el cálculo.

b) Contextuar en el problema qué significa cometer un error de tipo II y calcular la probabilidad de cometerlo si el valor de μ difiere del propuesto en la hipótesis nula en $1{,}3\,\text{cm}^2$?

c) Si el valor P correspondiente a una muestra dio 0,011, ¿a qué conclusión se llega?

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – 14 febrero 2020

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de TP …………………… Profesor: ……………………..

1a	1b	2a	2b	2c	3	4a	4b	5	Calificación

Definir claramente las variables involucradas y su distribución de probabilidad. En los test de hipótesis e intervalos de confianza interpretar adecuadamente en términos del problema. La duración del examen es de 2 horas

1. Considere la siguiente situación. Ud. recibe una caja con 10 unidades de una pieza y desea ensayar la hipótesis: [Ho) Las 10 piezas son buenas], extrayendo una única unidad de la caja. La condición de rechazo es que la pieza extraída sea defectuosa. Si la pieza extraída es buena, Ud. no puede rechazar la hipótesis.
   a. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justifique: “Como bajo la hipótesis nula, no hay piezas defectuosas, es imposible en este caso rechazar la hipótesis nula y por ende el error de tipo I del ensayo es nulo”
   b. Calcule la probabilidad de cometer error de tipo II (ß) para las alternativas de que haya R=2 piezas defectuosas en la caja.

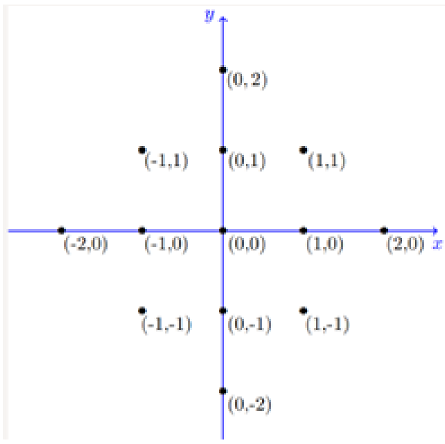
2. Un sistema electrónico montado con *k* componentes en serie falla cuando se produce un fallo en cualquiera de sus componentes. El fallo de cada componente se produce con probabilidad *p* igual para todos ellos.
   a. Deduzca la expresión de la fiabilidad *P* del aparato (probabilidad de que no falle expresada en %) sabiendo que cada uno de los *k* componentes fallan independientemente entre sí.
   b. Si *p*=0,92, ¿cuál debe ser la cantidad de componentes máxima si se desea que la fiabilidad exceda el 80%?

3. Sea X una variable aleatoria normal con media μ y desvío σ. Hallar el mínimo tamaño de muestra que se debe tomar si se quiere que la probabilidad de que la **media muestral** sea mayor que $\mu + \sigma / 16$, sea menor 0,01.

4. Considere el siguiente conjunto de puntos en el plano de acuerdo con la figura. Estos son puntos en el conjunto G definido como:

$$G = \{(x, y) / x, y \in Z, |x| + |y| \leq 2\}$$

   Suponiendo que se elige un punto (X, Y) al azar, de manera que cada punto tiene una probabilidad de 1/13 de ser elegido
   a. ¿Son X e Y independientes? Justificar claramente.
   b. Sea H la variable aleatoria dada por $H = X + Y$. Hallar la función de probabilidad de H, el valor esperado y su varianza.



5. Para estimar las características de las ventas diarias de un comercio se tomaron 10 días al azar y se contabilizaron las ventas obtenidas. Los 10 valores obtenidos, resultaron todos diferentes. A partir de esta información se calculó la media y varianza, que eran las medidas de interés. Una semana después se tomaron dos muestras adicionales y resultó que el primer valor obtenido era menor que todos los valores de la primera muestra y el segundo valor obtenido era mayor que todos los valores de la primera muestra. Para cada una de las 2 medidas (media y varianza), indique cuál de las siguientes afirmaciones es válida. Justifique.
   a. Se obtiene un valor menor con la muestra ampliada que con la muestra original
   b. Se obtiene un valor mayor con la muestra ampliada que con la muestra original
   c. Se obtiene el mismo valor con la muestra ampliada que con la muestra original
   d. Con la información disponible no es posible establecer la relación

UTN - FRH - Examen Final de Probabilidad y Estadística - 21/02/2019

Alumna/o: .... **Especialidad:** ………………………

Profesor con quien cursó: …………………………….. **Año de cursado:**………………..

1	2	3a 3b	4a 4b	5	Calificación

Ejercicio 1. Un borracho camina por la única calle de su pueblo, empezando en la esquina de su casa. Antes de comenzar a caminar, tira una moneda equilibrada: si sale cara se dirige hacia el oeste, si sale ceca hacia el este. Cada vez que llega a una esquina vuelve a tirar la moneda y repite el procedimiento. Camina en total 4 cuadras y se queda dormido. Probar que el lugar más probable para encontrarlo durmiendo es la esquina de su casa. Nota: Este modelo se llama paseo al azar.

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria geométrica de parámetro p con $0<p<1$. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a $P(X=k/X\le 2)$? Justificar la respuesta con el cálculo adecuado.

i) $\begin{cases} \dfrac{(1-p)^k}{1+(1-p)^2} & \text{con } k=0,1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$	**ii)** $\begin{cases} \dfrac{(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^2} & \text{con } k=1,2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
iii) $\begin{cases} \dfrac{(1-p)^{k-1}}{(1-p)} & \text{con } k=1,2,3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$	**iv)** $\begin{cases} \dfrac{(1-p)^{k-1}}{1+(1-p)} & \text{con } k=1,2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con parámetros $\mu_X=\mu$ y $\sigma_X=\sigma$, y sea $\{X_1;X_2;\cdots X_n\}$ una muestra aleatoria de X. Se definen:

$$W^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\mu\right)^2\right] \quad \text{y} \quad T^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right].$$

a) ¿Cuál de estas dos últimas variables aleatorias es un estimador sesgado de σ^2? Justificar.
b) ¿Cómo podría corregirse el sesgo?

Ejercicio 4. Dada una prueba de hipótesis correspondiente al clásico problema del control de calidad en la recepción de un producto habitual para la probabilidad p de un defecto si se analiza una muestra aleatoria. Éste es el planteo:

Hipótesis nula: H0: $p=p_0$ vs. Hipótesis alternativa: H1: $p>p_0$

a) ¿Qué significan los errores tipo I y tipo II en el contexto del problema?
b) Definir el estadístico de prueba y dar su distribución. Explicitar las condiciones necesarias. Obtener la expresión para el tamaño muestral n de manera tal que la prueba tenga un nivel de significación α y, simultáneamente, una probabilidad de error tipo II β cuando la verdadera media poblacional sea $p_v>p_0$. Justificar los pasos de la demostración.

Ejercicio 5. Para estimar las características de las ventas diarias de un comercio se tomaron 10 días al azar y se contabilizaron las ventas obtenidas. Los 10 valores obtenidos, resultaron todos diferentes. A partir de esta información se calculó la mediana y la dispersión, que eran las medidas de interés. Una semana después se tomaron dos registros adicionales y resultó que el primer valor obtenido era mayor que todos los valores de la primera muestra y el segundo valor obtenido era menor que todos los valores de la primera muestra. Para cada una de las 2 medidas (mediana y dispersión), indicar cuál de las siguientes afirmaciones es válida. Justificar.

a. Se obtiene un valor menor con la muestra ampliada que con la muestra original.
b. Se obtiene un valor mayor con la muestra ampliada que con la muestra original.
c. Se obtiene el mismo valor con la muestra ampliada que con la muestra original.
d. Con la información disponible no es posible establecer la relación.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero 2020 – T3

Alumno .... **Especialidad: ....**
Año de cursada: …………………… **Profesor: ……………………..**

1	2	3	4 a b c	Calificación

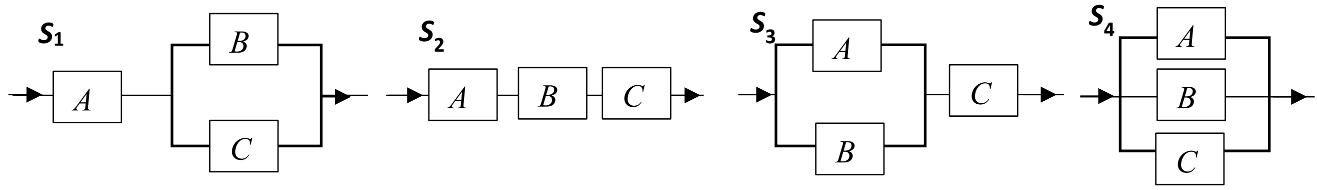
Calificación Final: ……………………………………

Ejercicio 1. Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ una muestra aleatoria de una variable con distribución Bernoulli de parámetro p con $0 < p < 1$. Indicar la expresión válida para

$$P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k\right) \text{ con } k = 0,1,\cdots,n .$$

Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Sean los siguientes sistemas cada uno de 3 componentes (*A*, *B* y *C*) las que funcionan o fallan en forma independiente. Sean los diagramas de eventos de la hoja anexa donde *FuA*, *FuB*, *FuC* y *FuS* identifican el funcionamiento de las componentes *A*, *B*, *C* y el del sistema *S* respectivamente. Vincular cuál diagrama (**D1**, **D2**, **D3**, **D4**) que se corresponde con cuál sistema (**S_1**, **S_2**, **S_3**, **S_4**).



Ejercicio 3. Las componentes del ejercicio 2 tienen un tiempo de funcionamiento sin fallas representada por una variable aleatoria *X* con distribución exponencial con valor esperado T_0 (el mismo modelo de variable para todas las componentes). Sea *T* el tiempo del funcionamiento sin fallas del sistema que conforman. Hallar la probabilidad de que **S_2** funcione por lo menos $2T_0$. Resolver en forma justificada.

Ejercicio 4. Para hallar un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para la media μ de una población normal, cuando el valor del desvío estándar σ se conoce, se trabaja con la propuesta

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha .$$

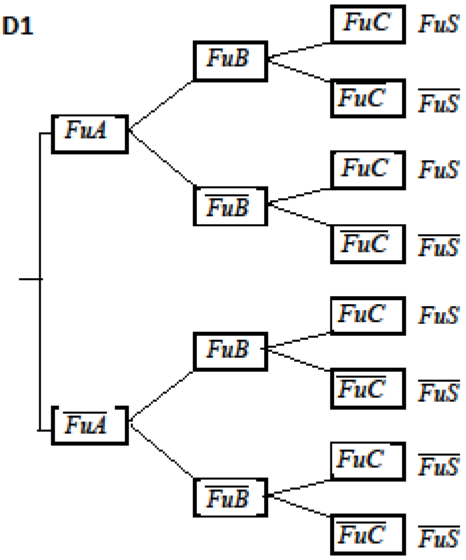
Una propuesta más general está dada por la expresión

$$P\left(-z_{\alpha_1} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha_2}\right) = 1-\alpha \quad \text{con } \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha .$$

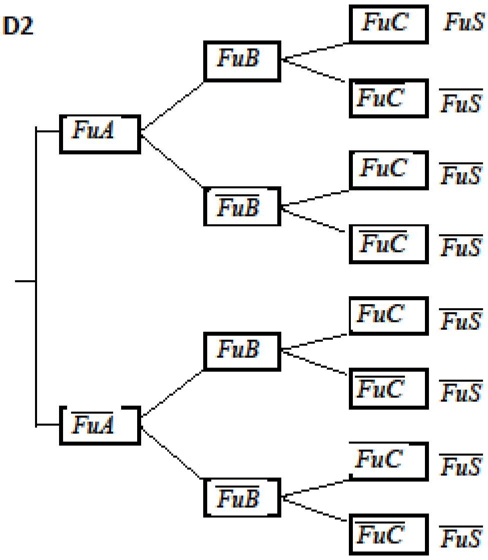
Sea $\alpha=0{,}05$ y $\alpha_1=\alpha/4$, $\alpha_2=3\alpha/4$. ¿El resultado que se obtiene es un intervalo de mayor, menor o igual longitud total que el intervalo obtenido con la primera propuesta dada? Justificar la respuesta con cálculos adecuados. ¿Cuál conviene?

Ejercicio 5.
Sea *X* una variable aleatoria normal con varianza conocida σ^2. Se desea probar la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ contra la alternativa $H_1 : \mu > \mu_0$, tomando $\alpha=0{,}05$. Encontrar el tamaño mínimo de muestra necesario para rechazar H_0 en el caso de que μ sea realmente σ unidades mayor a μ_0 con una probabilidad mayor a 0,90. Presentar la prueba de hipótesis correspondiente y el estadístico de prueba.

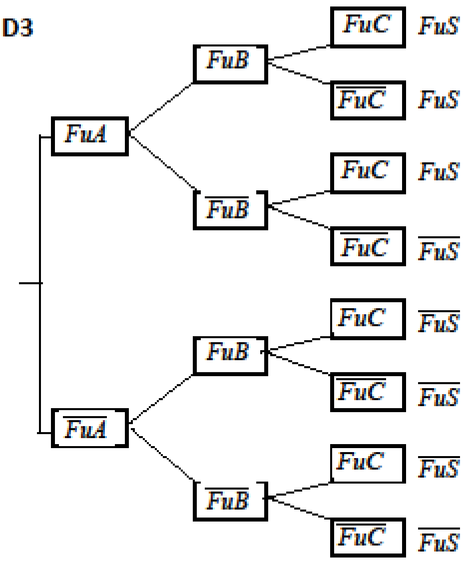
D1


FuA
$\overline{FuA}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuC FuS
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC FuS
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC FuS
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC $\overline{FuS}$
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$

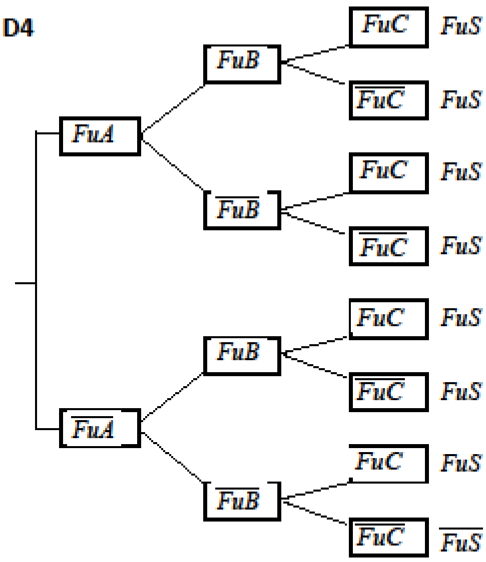
D2


FuA
$\overline{FuA}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuC FuS
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC $\overline{FuS}$
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC $\overline{FuS}$
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC $\overline{FuS}$
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$

D3


FuA
$\overline{FuA}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuC FuS
$\overline{FuC}$ FuS
FuC FuS
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC $\overline{FuS}$
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$
FuC $\overline{FuS}$
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$

D4


FuA
$\overline{FuA}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuB
$\overline{FuB}$
FuC FuS
$\overline{FuC}$ FuS
FuC FuS
$\overline{FuC}$ FuS
FuC FuS
$\overline{FuC}$ FuS
FuC FuS
$\overline{FuC}$ $\overline{FuS}$