Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2008 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1a 1b 1c 1di 1dii	2	3	4a 4b	Calificación

Ejercicio 1. En un experimento aleatorio se utilizan tres cajas. La Caja 1 contiene 2 bolas rojas y 2 azules, la Caja 2 contiene 3 bolas rojas y 1 azul, y la Caja 3 está inicialmente vacía. Se extraen al azar de manera independiente una bola de la Caja 1 y una bola de la Caja 2 y se las coloca en la Caja 3. Sea X la variable aleatoria que indica el número de bolas rojas en la Caja 3.

a) Indicar el recorrido de X y hallar su distribución de probabilidad.
b) Si se extrae al azar una bola de la Caja 3, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea roja?
c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja de la Caja 3 si sabe que en ella hay por lo menos una bola azul?
d) Se necesita decidir entre las siguientes dos hipótesis,

$$\begin{cases} H_0: \text{ las dos bolas en la Caja 3 son rojas} \\ H_1: \text{ al menos una de las dos bolas en la Caja 3 es azul} \end{cases}.$$

El criterio para decidir entre una u otra hipótesis es el siguiente: se hacen dos extracciones **con reposición** de la Caja 3 y no se rechaza H_0 en caso de que en las dos extracciones se obtenga una bola roja; se acepta la hipótesis alternativa H_1 en caso contrario.

i. ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar H_0 siendo H_1 verdadera?
ii. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar H_1 siendo H_0 verdadera?

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de media poblacional μ y dispersión conocida σ. Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño n. Deducir la expresión del intervalo de confianza para μ con una confianza del $(1-\alpha)100\%$. Justificar los distintos pasos de la demostración mencionando las propiedades usadas.

Ejercicio 3. Sean X y Y variables aleatorias independientes que tienen una varianza común, σ^2. ¿Cuál es la covarianza $Cov(X, aX - bY)$? Deducir la respuesta justificando sus pasos.
Recordar que si R y T son dos variables aleatorias $Cov(R,T) = E(RT) - E(R)E(T)$.

Ejercicio 4. Se dice que una variable aleatoria X es una variable de *spin* de parámetro h, y se denota $X \sim S(h)$, si X toma los valores $X=-1$ y $X=1$ con la siguiente distribución de probabilidad

$$P(X = x) = \frac{e^{hx}}{e^h + e^{-h}},\ x \in \{-1;1\},\ \text{con } h \in \mathbf{R}.$$

a) Calcular el valor esperado $E(X)$ y demostrar que $V(X) = \dfrac{4}{(e^h + e^{-h})^2}$.

b) El spin total de un conjunto de n partículas está definido por $M = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas y la variable $X_i \sim S(h)$ representa el spin de la partícula i para $i=1, 2, \ldots, n$. Se dice que un sistema de n partículas presenta magnetización cuando $M \geq \frac{2}{3}n$. Si n=900 y h=ln2, calcular la probabilidad de que el sistema presente magnetización (usar el Teorema Central del Límite y recordar que $e^{\ln a} = a,\ a \in \mathbf{R}_{>0}$).

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2008 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1a 1b 1c 1d	2	3	4a 4b 4c	Calificación

Ejercicio 1. Una caja contiene inicialmente 10 bolillas: 6 azules y 4 rojas. Se lleva a cabo el siguiente procedimiento: se elige una bolilla al azar de la caja; si la bolilla extraída es azul se la pinta de rojo y si la bolilla es roja se la pinta de azul. Luego se devuelve la bolilla a la caja. Sea X_1 la variable aleatoria que indica el número de bolillas rojas al final del procedimiento. A continuación se repite nuevamente el procedimiento anterior. Sea X_2 la variable aleatoria que indica el número de bolillas rojas que quedan luego de repetir las dos veces el procedimiento.

a) Calcular los recorridos y las funciones de probabilidad puntual de X_1 y de X_2.
b) ¿Son X_1 y X_2 independientes? ¿Cuánto vale la covarianza entre ambas?
c) Si al final de la doble ejecución del procedimiento quedan en la caja mas bolillas azules que rojas, alguien infiere que las dos veces se extrajeron bolillas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que esta inferencia resulte errónea?
d) ¿Cuál es la cantidad mínima de veces, k, que hay que realizar el procedimiento para que tenga probabilidad no nula el evento de tener todas bolillas rojas en la caja al concluir las k operaciones, esto es $X_k=10$? ¿Cuánto vale dicha probabilidad? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Sea un test de hipótesis para la media poblacional μ de una población normal con varianza σ^2 conocida, basado en una sola muestra aleatoria $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ con el siguiente planteo,

Hipótesis nula H_0: $\mu=\mu_0$ Hipótesis alternativa H_a: $\mu<\mu_0$.

Hallar la expresión del tamaño muestral n para el que la prueba tenga un nivel de significación α y, simultáneamente, una probabilidad de error tipo II igual a β cuando la verdadera media poblacional sea μ_v (con $\mu_v<\mu_0$). Justificar los pasos de la deducción y realizar un gráfico esquemático donde esté marcada la región de rechazo de H_0, e indicadas las áreas correspondientes a α y β.

Ejercicio 3. Dos componentes idénticas, A y B, están conectadas en paralelo para conformar un sistema S. Estas componentes funcionan (y también fallan) en forma independiente. El tiempo hasta la ocurrencia de una falla para las componentes A y B puede considerarse una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro α ($\alpha > 0$ en unidades de la recíproca de las del tiempo). Obtener las funciones de distribución acumulativa $F_T(t)$ y de densidad de probabilidad $f_T(t)$ para el tiempo, T, hasta la ocurrencia de falla del sistema S.

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2a}{x^2} & \text{si } 1 \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \text{ donde } a > ½ \text{ y } b > 1.$$

a) **i.** Mencionar dos características importantes de cualquier función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua. **ii.** Expresar a como función de b.
b) **i**. Definir la mediana de una variable aleatoria. **ii.** Calcular la mediana de X.
c) **i.** Definir lo que es un estimador insesgado. **ii.** Demostrar que X^2 es un estimador insesgado de b.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2008 – T3

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1a 1b 1c 1d	2a 2b 2c 2d 2e 2f	Calificación

Ejercicio 1. Para modelar la cantidad X de productos defectuosos que se encuentran en una línea de producción en determinado período de tiempo se utiliza un modelo de dos parámetros llamado “Poisson con Ceros Forzados” (*PCF*). Una variable aleatoria X que tiene distribución de Poisson con ceros Forzados, se simboliza con $X \sim PCF(\lambda;\ p)$, puede escribirse como $X = YW$ con Y y W variables aleatorias independientes tales que:

Y tiene distribución de Poisson de parámetro λ, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$

W tiene distribución de Bernoulli de parámetro p, $W \sim \mathcal{Be}(p)$

El modelo representa que si la producción tiene una muy baja tasa de errores, la probabilidad de que no haya defectuosos es más alta que en un modelo de Poisson tradicional.

a) Escribir el valor esperado, la varianza y la distribución puntual de probabilidades para cada una de las variables Y y W.

b) Hallar $P(X = k)\ \forall k \in \mathbf{N_0}$. Calcular por separado k=0 y k=1, 2, …

c) Se dice que X=0 es un “cero forzado” cuando ocurre Z=0. Dado que se observa X=0, hallar la probabilidad de que no sea un “cero forzado” (esto es Z=1).

d) Hallar $E(X)$ y $E(X^2)$. Mencionar las propiedades usadas para deducir dichas magnitudes.

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[\mu-1;\mu+1]$ donde μ es un parámetro desconocido; y sea $\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ una muestra aleatoria de X.

a) Definir que es una muestra aleatoria.

b) Demostrar que la variable aleatoria promedio muestral, $\overline{X}$, es un estimador insesgado de μ [esto es que $E(\overline{X}) = \mu$].

c) Demostrar que $V(\overline{X}) = \dfrac{1}{3n}$.

d) Deducir como se puede construir un intervalo de confianza aproximado para μ con una confianza del $(1-\alpha)100\%$ cuando la muestra es grande. Mencionar el/los teorema/s adecuados que dan validez a este planteo.

e) Si el intervalo de confianza para μ cuando n=300 es (2.4347; 2.5356), ¿cuál es la confianza con la que se trabajó?

f) Supongamos que se conoce que μ=2 y que X representa el tiempo de duración, en miles de horas, de una componente electrónica de modo que $\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ denota los tiempos de duración (en miles de horas) de n componentes de un mismo tipo. Si las n componentes se conectan en paralelo, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione menos de 2500 horas? Justificar claramente la respuesta. $X \sim U(1;\ 3)$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2009 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1a 1b	2a 2b 2c	3	4a 4b	Calificación

Ejercicio 1.

a) Dos personas lanzan una moneda equilibrada tres veces cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

b) Al lanzar una moneda la probabilidad de obtener cara es p con $0 < p < 1$. Dos personas lanzan la moneda n veces cada una con $n \in \mathbf{N}$. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras? Dar la expresión general a partir de variables aleatorias con distribución conocida que se adecuen a la situación. Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Un sistema que consiste en n componentes conectadas en serie trabaja si y solo si todas sus componentes trabajan. Sea X_i el tiempo de vida útil de la componente i-ésima. con i=1, 2, …, n. Entonces el tiempo de falla del sistema está dado por $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Se supone que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con una distribución exponencial de parámetro $\alpha \in \mathrm{R}_{>0}$.

a) Hallar la $P(Y > y)$ con $y \in \mathrm{R}_{>0}$

b) Encontrar la función de distribución acumulativa $F_Y(y)$ y calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$.

c) ¿Tiene la variable aleatoria Y una distribución conocida? En caso afirmativo, indicar cual. Indicar el valor esperado de Y.

Ejercicio 3. Sea la muestra aleatoria $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ correspondiente a una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-a; a]$, donde a es desconocido. Demostrar que

$$T = \frac{3}{n}\left(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2\right)$$

es un estimador insesgado de a^2. Mencionar las propiedades y/o resultados previos usados.

Ejercicio 4. Sea un test de hipótesis de nivel de significación α para la media poblacional μ de una población normal con varianza σ^2 conocida, basado en una sola muestra aleatoria $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ con el siguiente planteo,

Hipótesis nula H_0: $\mu=\mu_0$ Hipótesis alternativa H_a: $\mu>\mu_0$.

a) Identificar el estadístico de la prueba y deducir la región de rechazo de H_0.

b) Hallar la expresión de la potencia del test, esto es la probabilidad de declarar acertadamente que $\mu>\mu_0$. Graficar cualitativamente la potencia del test en función de $\mu=\mu_v$.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2007 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1	2a 2b	3	4a 4b	5a 5b	Calificación

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[a;b]$. ¿Cuál es la distancia máxima, d_{MAX}, en términos de la desviación estándar σ_X, a la que puede encontrarse un valor de X a partir de la media $E(X)$, esto es hallar el valor de r en la expresión $d_{MAX}=r\cdot\sigma_X$?

Ejercicio 2. En una línea de producción la fracción de unidades defectuosas, X, varía diariamente en forma aleatoria con un valor medio μ_X y un desvío estándar σ_X. A su vez, la producción diaria es también variable, Y, que es independiente de la anterior y tiene un valor medio de μ_Y unidades y un desvío estándar de σ_Y unidades El costo total diario tiene una parte fija de \$*a* por unidad producida (buena o defectuosa) más \$*b* por unidad defectuosa. Responder las siguientes cuestiones mencionando las propiedades utilizadas.

a) Hallar el valor esperado del costo total diario.
b) Demostrar que la covarianza entre la cantidad diaria de unidades producidas y la cantidad de unidades defectuosas es $\mu_X \sigma_Y^2$.

Ejercicio 3. Si A y B son dos eventos tales que $A\subset B$, A no es el evento nulo y B no es el evento cierto. ¿Puede verificarse que A y B sean independientes? Dar una demostración o un contraejemplo para justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Se plantea una prueba de hipótesis de nivel de significación α para la media μ de una población normal con desvío estándar conocido σ a partir de una muestra de tamaño n con la hipótesis nula H_0: $\mu=\mu_0$, y la alternativa H_a: $\mu>\mu_0$.

a) Demostrar que la probabilidad $\beta=\beta(\mu_v)$ de cometer error tipo II está dada por $\Phi\left(z_\alpha+\dfrac{\mu_0-\mu_v}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ donde $\Phi(z)=P(Z\leq z)$ es la función de distribución acumulativa para una variable normal estándar y $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$.
b) Deducir la fórmula para obtener el tamaño muestral n para que la prueba tenga un nivel de significación α y un valor $\beta(\mu_v)=\beta$ en el valor alternativo μ_v.

Ejercicio 5. En un tramo de una autopista los tiempos entre pasadas de autos son variables aleatorias independientes con distribución exponencial negativa de parámetro $0.5\,\mathrm{s}^{-1}$. Justificar el planteo de la resolución con las propiedades y/o teoremas adecuados.

a) Calcular la probabilidad de que la suma de todos los tiempos entre pasadas de 101 autos supere los 3 minutos.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre las 8:00 y las 8:03 pasen más de 101 autos?

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2007 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1a 1b 1c	2	3a 3b	4a 4b	5	Calificación

Ejercicio 1. Sean A y B dos eventos de un espacio muestral tales que $P(B) = 3P(A)$.

a) Si el evento A está incluido en el evento B, ¿cuál es el valor de $P(B/A)$?

b) Si el evento A está incluido en el evento B, ¿cuánto vale $P(A/B)$?

c) Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, ¿cuánto vale $P(B/A)$?

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de parámetro α con $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. Demostrar que la probabilidad de que X tome valores que se alejen en menos de un desvío estándar σ_X a partir de su valor esperado $E(X)$ no depende del valor de α.

Ejercicio 3. En una línea de producción la fracción de unidades vendidas al público, X, varía diariamente en forma aleatoria con un valor medio μ_X y un desvío estándar σ_X. A su vez, la producción diaria es también variable, Y, que es independiente de la anterior y tiene un valor medio de μ_Y unidades y un desvío estándar de σ_Y unidades El costo total diario tiene una parte fija de \$$a$ por unidad producida. El precio de venta al público de cada unidad producida en el día es \$3a. Si al final del día una unidad producida no se vende al público, la compra una empresa de reciclaje a \$0.8a. Responder las siguientes cuestiones mencionando las propiedades utilizadas.

a) Hallar el valor esperado de la ganancia total diaria.

b) Demostrar que la covarianza entre la cantidad diaria de unidades producidas y la cantidad de unidades vendidas al público es $\mu_X \sigma_Y^2$.

Ejercicio 4. Se plantea una prueba de hipótesis de nivel de significación α para la media μ de una población normal con desvío estándar conocido σ a partir de una muestra de tamaño n con la hipótesis nula H_0: $\mu=\mu_0$, y la alternativa H_a: $\mu>\mu_0$.

a) Demostrar que la probabilidad $\beta=\beta(\mu_v)$ de cometer error tipo II está dada por $\Phi\left(z_\alpha + \dfrac{\mu_0 - \mu_v}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ donde $\Phi(z)=P(Z\leq z)$ es la función de distribución acumulativa para una variable normal estándar y $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$.

b) Deducir la fórmula para obtener el tamaño muestral n para que la prueba tenga un nivel de significación α y un valor $\beta(\mu_v)=\beta$ en el valor alternativo μ_v.

Ejercicio 5. Una fábrica produce X_n artículos en el día n, donde las X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valor medio 5 y varianza 9, pero no se conoce la forma de la distribución. Hallar, aproximadamente, el mayor valor de n tal que

$$P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 200 + 5n\right) \leq 0.05.$$

Indicar en que propiedad y/o teorema se basa el planteo realizado.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Diciembre 2007 – T3

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1	2	3	4	5a 5b 5c	Calificación Propuesta

Nota Final: …………………………….

Ejercicio 1. A, B y C son eventos independientes. Demostrar que A y $B \cup C$ son independientes.

Ejercicio 2. Un fabricante tiene dos máquinas que producen un mismo artículo. Una de ellas trabaja con el 1% de defectuosos y la otra con el 4%. Cada lote lleva una fracción a de la primera máquina y $(1-a)$ de la segunda, con $0<a<1$. El cliente revisa 5 piezas al azar (con reposición) del lote, aceptándolo si son todas buenas. ¿Cuál deberá ser la fracción a para que se acepte el 90% de los lotes?

Ejercicio 3. El número de accidentes graves en una planta industrial es de diez por año. El gerente instituye un plan que considera efectivo para reducir el número de accidentes en la planta. Un año después de ponerlo en marcha, sólo han ocurrido tres accidentes. ¿Qué probabilidad hay de tres o menos accidentes por año, si la frecuencia promedio aún es diez? Después de lo anterior, ¿puede concluirse que, luego de un año, el número de accidentes promedio ha disminuido? Justificar la respuesta claramente.

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria con valor esperado $E(X)=\mu$ y varianza $V(X)=\sigma^2$. Al considerar una muestra aleatoria de tamaño 2 de dicha variable, $\{X_1, X_2\}$, la varianza muestral satisface que $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$. Demostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Mencionar todas las propiedades usadas.

Nota recordatoria. Dada una muestra aleatoria de tamaño n, $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, se denomina varianza muestral a la variable aleatoria definida por $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ donde $\overline{X}$ es la media o promedio muestral.

Ejercicio 5. En el control estadístico de un proceso se toma una muestra de tamaño n ($n>30$) y se diseña una prueba de hipótesis formulando que la media del proceso, μ, es igual a la media nominal, μ_0. Si la media de la muestra cae fuera de los límites $(\mu_0 - 2\sigma/\sqrt{n}, \mu_0 + 2\sigma/\sqrt{n})$, se rechaza la hipótesis. La constante σ es la dispersión poblacional y se supone conocida.

a) Plantear claramente la hipótesis nula y la hipótesis alternativa e indicar la propiedad y/o teorema que justifica la resolución de esta prueba de hipótesis.

b) Hallar la probabilidad de cometer error tipo I.

c) ¿Cuál es la probabilidad de error tipo II en este test si la verdadera media es $\mu_v = \mu_0 + \sigma/\sqrt{n}$?

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2008 – T1

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1a 1b	2	3a 3b	4a 4b	5	Calificación

Ejercicio 1. Sean A, B y C tres eventos definidos en un mismo espacio muestral E.

a) Justificar la validez de la igualdad: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(A^c\cap B)+P(A^c\cap B^c\cap C)$ donde A^c y B^c identifican los eventos complementarios de A y B, respectivamente.

b) Dar alguna condición bajo la cual sea cierta la igualdad: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de parámetro α con $\alpha\in\mathbf{R}_{>0}$. Indicar la función de densidad de probabilidad, su valor esperado $E(X)$ y su desvío estándar σ_X y demostrar que la probabilidad de que X tome valores que se alejen mas de un desvío estándar a partir de su valor esperado no depende del valor de α.

Ejercicio 3. En los miembros de cierta población se encuentra definida una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desvío estándar σ. El promedio de una muestra aleatoria de tamaño n extraída de esa población es una variable aleatoria. Se supone que la muestra se extrae con reemplazo o bien se cumple que el tamaño de la muestra es despreciable frente al de la población.

a) Describir la distribución de probabilidades de la media muestral indicando claramente recorrido, función densidad de probabilidad, valor esperado y varianza.

b) Deducir como se puede calcular el tamaño n de la muestra para obtener un intervalo de confianza para la media poblacional μ. La amplitud (semilongitud) del intervalo de confianza debe ser ε y el nivel de confianza $1-\alpha$.

Ejercicio 4. Se planea un testeo sanguíneo a 100 personas buscando vestigios de una enfermedad que posee el 1% de la población. Las muestras de sangre de 10 personas se mezclarán y se analizarán juntas. Si el test es negativo, un test fue suficiente para estas 10 personas. Si el test es positivo, cada una de las muestras de las 10 personas es testeada separadamente, requiriéndose entonces 11 pruebas de análisis para estas 10 personas.

a) Sea X el número de test necesarios para un grupo de 10 personas. Indicar el recorrido de X y su distribución de probabilidad puntual.

b) Sea Y el número de test necesarios para las 100 personas. Hallar $E(Y)$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 5. En el control estadístico de un proceso se toma una muestra de tamaño $n=9$ de una población normal con desvío estándar desconocido, y se diseña una prueba de hipótesis formulando que la media del proceso, μ, es igual a la media nominal, μ_0. Se rechaza la hipótesis nula si la media de la muestra es menor que $\mu_0-0.62\cdot S$,donde S es el desvío estándar muestral. Plantear claramente la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, indicar el tipo de distribución del estadístico usado en la prueba y hallar la probabilidad de cometer error tipo I.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2008 – T2

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

1	2a 2b	3	4a 4b 4c	5	Calificación

Ejercicio 1. Sean A y B dos eventos definidos en un mismo espacio muestral E. Si A y B son dos eventos estadísticamente independientes entonces $P(A/B)=P(A)$. Describir un experimento aleatorio, el espacio muestral correspondiente, y definir dos eventos A y B estadísticamente dependientes para los cuales $P(A/B)>P(A)$.

Ejercicio 2. Sea $\{X_1, X_2\}$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria con distribución normal estándar.

a) Decir la distribución de la variable $Y = a{\cdot}X_1 + b{\cdot}X_2$, definir su recorrido, y dar el valor esperado y la varianza de Y. Justificar la respuesta.

b) Calcular $E[(a{\cdot}X_1 + b{\cdot}X_2)^2]$ con a y b números reales no simultáneamente nulos.

Ejercicio 3. A partir de una muestra aleatoria de tamaño n se ha calculado un intervalo del 90% de confianza para la media poblacional μ de una variable aleatoria X con distribución normal y desvío estándar σ conocido. Si se desea tener un intervalo con la misma longitud pero con una confianza del 95%: ¿hay que agrandar o achicar la muestra?; ¿en qué porcentaje debe cambiarse el tamaño de la muestra? Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Agregando tres bits extras a una palabra de 4 bits de una manera particular (código de *Hamming*) se puede detectar y corregir hasta un error en cualquiera de los bits. Si la probabilidad de que un bit sea cambiado durante la transmisión (y por consiguiente se transmita con error) es 0.05 y esos cambios son independientes:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una palabra con bit de chequeo (de 7 bits en total) sea correctamente recibida (o sea con hasta un error)?

b) Si se enviaran 100 palabras utilizando la codificación Hamming, ¿cuántas palabras se espera que no lleguen correctamente? Justificar como se realizó este cálculo.

c) Si cada palabra de 4 bits no fuera transmitida con bits de chequeo (en este caso los 4 bits deben recibirse sin error para que la palabra llegue correcta), ¿cuántas palabras se espera que no lleguen correctamente entre 100 enviadas?

Ejercicio 5. En el control estadístico de un proceso se toma una muestra de tamaño $n=9$ de una población normal, se diseña una prueba de hipótesis formulando que la varianza del proceso, σ^2, es igual a la varianza usual σ_0^2. Se rechaza la hipótesis nula si la varianza muestral S^2 es mayor que $2.51125 \cdot \sigma_0^2$. Plantear claramente la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, indicar el tipo de distribución del estadístico usado en la prueba y hallar la probabilidad de cometer error tipo I.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo – Febrero/Marzo 2008 – T3

Alumno .... Especialidad: ....

Mes y año de aprobación de trabajos prácticos ………………………………………..

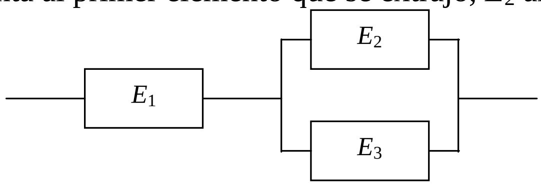
1a 1b	2a 2b	3	4a 4b 4c	Calificación

Ejercicio 1. Sean $\{X_1; X_2\}$ una muestra aleatoria de una población con distribución Poisson de parámetro λ. La variable W se define como $W = aX_1 + bX_2 + c$ donde a, b y c son números reales.

a) Calcular el coeficiente de correlación entre X_1 y W. Justificar la respuesta.

b) ¿Qué condiciones y/o relaciones deben satisfacer a, b y c para que la varianza de W sea igual a la varianza de X_1. Mencionar todas las propiedades usadas.

Ejercicio 2. Un pequeño lote de N componentes tiene 2 defectuosas. Se eligen al azar tres componentes del lote, sin reemplazo, con la finalidad de ensamblarlos en un sistema como se indica en el diagrama donde E_1 representa al primer elemento que se extrajo, E_2 al segundo y E_3 al tercero.



Se definen las variables aleatorias $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento no es defectuoso} \\ 0 & \text{si el } i\text{-ésimo elemento es defectuoso} \end{cases}, i = 1,2,3$.

a) ¿Tiene las variables X_1, X_2 y X_3 la misma función de probabilidad puntual? Si es la misma, justificar la respuesta; si son distintas, calcularlas.

b) Se define $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Sabiendo que Y=2, hallar la probabilidad de que el sistema funcione.

Ejercicio 3. Se desea estimar su varianza de una variable aleatoria normal X mediante un intervalo de confianza de nivel de confianza $1-\alpha$. Indicar el procedimiento que debe seguirse y deducir los límites del intervalo.

Ejercicio 4. En el control estadístico de un proceso se toma una muestra aleatoria $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ tal que su tamaño verifica que $n>30$. Se diseña un test de hipótesis formulando que la media del proceso, μ, es igual a la media nominal, μ_0. Si la media de la muestra, $\overline{X}$, es superior a $\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, se rechaza la hipótesis propuesta. La constante σ es la dispersión poblacional que se supone conocida.

a) Plantear formalmente el test de hipótesis detallado en el enunciado, justificando lo propuesto.

b) ¿Cuál es el error tipo I en el test del enunciado y cuánto vale la probabilidad de cometerlo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error tipo II en el test del enunciado, si la media del proceso verdadera fuera $\mu_V = \mu_0 + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$?