Probabilidad y Estadística. UTN – F. R. Haedo

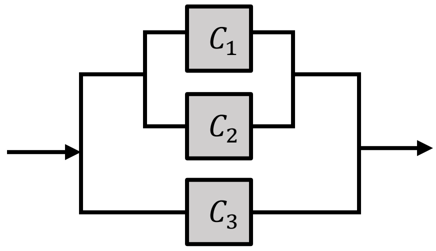
Apellido y Nombre .... Especialidad:............................

Año de cursado: ……………… Docente: ………………………………..

1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4	Calificación propuesta

Ejercicio 1. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarlo. En caso de ser falsa dar un contraejemplo o una clara justificación.

a) Sea el sistema de la figura constituido con tres componentes C_1, C_2 y C_3 del mismo tipo –de funcionamiento independiente una de las otras– cuya probabilidad de falla es $p > 0$. Sea X la variable aleatoria que indica la cantidad de componentes que funcionan en el sistema. Entonces X tiene distribución Binomial y la probabilidad de que el sistema falle es exactamente $P(X = 0)$.

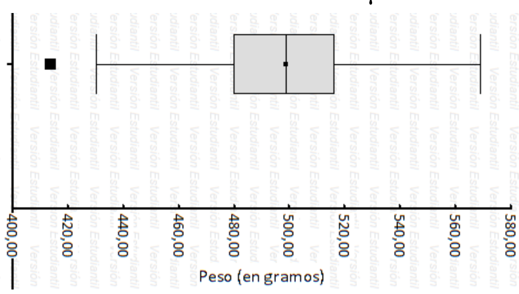


b) Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$.
Si $P(A/B) > P(A)$ entonces $P(B/A) > P(B)$.

Ejercicio 2. Una máquina para embolsar virutas de acero lo hace de modo que el peso (en gramos) del contenido en cada bolsa se puede modelar con una variable aleatoria normal de valor medio μ y desvío σ.

a) Se desea que al menos el 75% de las bolsas no excedan en valor de μ en más de 20 gramos. ¿Qué valor máximo debe tener σ?

b) Se pesan 150 bolsas con μ=500 gramos y los resultados obtenidos se representan en el diagrama de caja y bigotes. ¿Se cumple con lo deseado, expresado en **a)**? Justificar la respuesta.



Ejercicio 3. Resolver las siguientes cuestiones, en forma justificada.

Sea Y una variable aleatoria de distribución exponencial de valor esperado $1/\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{R} > 0$.
Se define una variable aleatoria discreta en la siguiente forma

$$X = k \quad \text{si} \quad k - 1 \leq Y < k \quad \text{con} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Encontrar $P(X = k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

b) A partir de lo obtenido en **a)**, ¿es verdadero o falso que

$$P(X = k) = (e^{-\alpha})^{k-1}(1 - e^{-\alpha}) \text{ con } k = 1, 2, 3, \cdots ?$$

c) Una variable aleatoria X para la cual la expresión dada en **b)** es verdadera, ¿qué distribución tiene y cuál es el parámetro que la define?

Ejercicio 4. Interesa probar en forma significativa si una moneda está o no balanceada en base al número de caras X obtenido en 36 tiros de la moneda (H0: p = 0,5 contra H1: $p \neq$ 0,5). Si se usa la región de rechazo

$$|X - 18| \geq 4,$$

¿cuál es el nivel de significación de la prueba de hipótesis? Justificar el planteo que se realice a partir de los datos, indicar la distribución de la o de las variables utilizadas, y los cálculos que conducen a la respuesta. Describir en el contexto del problema, los errores tipo I y II.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo

Alumno .... **Especialidad: ....**

Año de cursada: …………………… **Profesor: ……………………..**

1 a b c	2	3 a b	4	Calificación

Calificación Final: …………………………………….

Ejercicio 1. Una caja contiene 4 bolillas blancas y 6 bolillas negras. Un operador extrae de la caja una bolilla al azar, observa el color y la descarta. Luego elige una segunda bolilla al azar de la caja. Si esta bolilla es de color diferente de la bolilla anteriormente extraída, la vuelve a poner en la caja; si fuera del mismo color, la descarta. Sea X la cantidad de bolillas negras que quedan en la caja al finalizar el procedimiento. Sea Y la cantidad de bolillas blancas observadas en total por el operador (sea que la bolilla fuera descartada o devuelta a la caja).

a) Construir al tabla de distribución de probabilidades conjunta, $p_{X,Y}(x,y)$.

b) ¿Son independientes las dos variables aleatorias? Justificar la respuesta.

c) La experiencia completa se repite 100 veces. Sean X_1, X_2, … , X_{100} la muestra aleatoria correspondiente a la cantidad de bolillas negras que quedan en la caja al finalizar el procedimiento cada vez. Sea $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. ¿Cuál es la probabilidad de que T sea mayor a 500? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demostrarla y calcular el valor mencionado al final de la proposición. En caso de ser falsa, justificar la respuesta en forma clara o dar un contraejemplo.

"Sea X una variable aleatoria con Distribución Exponencial de la que se conoce que $P\left(X \geq 8\right) = e^{-2}$. Esta información es suficiente para calcular la varianza de $Y = 5X$."

Ejercicio 3. Un sistema electrónico montado con k componentes en serie falla cuando se produce un fallo en cualquiera de sus componentes. El fallo de cada componente se produce con probabilidad p igual para todos ellos.

a) Deducir la expresión de la fiabilidad P del aparato (probabilidad de que el sistema no falle expresada en %) sabiendo que cada uno de los k componentes fallan independientemente entre sí.

b) Si p=0,06, ¿cuál debe ser la cantidad de componentes máxima si se desea que la fiabilidad exceda el 75%?

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria normal con varianza conocida σ^2. Se desea probar la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ contra la alternativa $H_1 : \mu < \mu_0$, tomando α=0,05. Encontrar el tamaño mínimo de muestra necesario para rechazar H_0 en el caso de que μ sea realmente σ unidades menor a μ_0 con una probabilidad mayor a 0,90. Justificar la respuesta con un planteo adecuado.

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA **FECHA:…………………………………….**

ESTUDIANTE: ……………………………………………………………………………… **ESPECIALIDAD :……………………..**

AÑO DE CURSADO: ……………………………….. **DOCENTE :……………………..**

1	2	3	4a	4b	5a	5b	Calificación

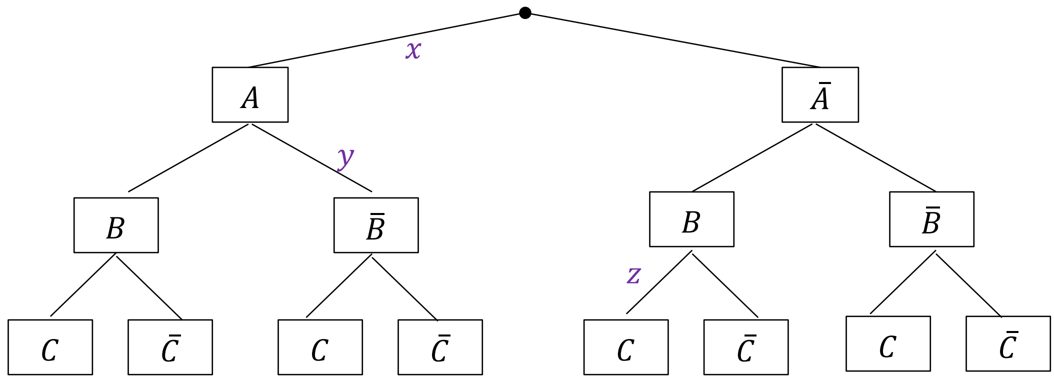
Ejercicio 1. Sean A y B dos eventos no imposibles de un mismo espacio muestral. Se conoce que:

$$P[B\ /\ (A \cup B)] = 0{,}6 \text{ y } P[(\bar{A} \cap B)\ /\ (A \cup B)] = 0{,}35.$$

Con esta información, ¿es posible hallar $P[A\ /\ (A \cup B)]$? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, dar el valor numérico de dicha probabilidad.

Ejercicio 2. ¿Qué probabilidades representan x, y, z en el siguiente árbol de probabilidad?

A, B, C son eventos



Ejercicio 3. Los mensajes que llegan a una computadora utilizada como servidor lo hacen de acuerdo con una distribución de Poisson con una tasa promedio de 0,1 mensajes por minuto. Determinar el intervalo de tiempo (mayor a 0) en el que la probabilidad de que lleguen 2 mensajes en ese lapso sea la misma de que lleguen 3 mensajes durante el mismo.

Ejercicio 4. Sea $\{X_1; X_2; \cdots; X_n\}$ una muestra aleatoria de una población representada por X cuya distribución de probabilidad es:

x	0	1	2
$P(X = x)$	$1 - a$	$a/2$	$a/2$

donde $0 < a < 1$

a) Analizar si $\hat{a} = \frac{2}{3}\bar{X}$ es un estimador insesgado de a.

b) Para $a = 4/9$, hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra (supuesto *n*>30) para que la probabilidad de que $\bar{X}$ difiera de su valor esperado en a lo sumo 1/6, sea por lo menos 0,90. Presentar una justificación y planteo adecuados.

Ejercicio 5. El responsable del proceso está decidido a invertir en una nueva materia prima sólo si recibe evidencia estadística de que el rendimiento medio del proceso con la nueva materia prima es superior a 60%. Para poder tomar esta decisión, se observaron datos correspondientes a 10 corridas de producción con la nueva materia prima. El rendimiento promedio de estas corridas fue de 64,8%. Estudios recientes indican que el rendimiento tiene distribución Normal y el desvío estándar de las mismas es de 9,8%.

a) Si le preguntaran a usted, ¿justificaría la inversión? Hacer el planteo de la prueba de hipótesis correspondiente y explicar en qué se basó su respuesta.

b) Si se trabaja con un nivel de significación 0,07, calcular la probabilidad de tomar la decisión incorrecta en caso de que con la nueva materia prima el rendimiento medio sea del 65%.

Probabilidad y Estadística. UTN – FRHaedo

Estudiante .... Especialidad: ....

Ciclo Lectivo de cursado: …………………… Docente: …………………………………..

1	2	3a	3b	4 i ii iii	Calificación

Ejercicio 1. Un jurado de tres miembros decide por mayoría. Dos miembros del jurado, que deciden independientemente el veredicto, tienen una probabilidad p de dar el veredicto correcto y el tercero lanza una moneda equilibrada. Por otra parte, un juez tiene una probabilidad p de acertar. ¿Cuál de estos dos sistemas (juicio por jurado o juez único) tiene mayor probabilidad de acertar en su sentencia? Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Sea $\{X_1; X_2; \cdots; X_n\}$ una muestra aleatoria de una población representada por X cuya distribución de probabilidad es:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$1-a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$

donde $0 < a < 1$.

Analizar si $\hat{a} = \frac{2}{3}\overline{X}$ es un estimador insesgado de a.

Ejercicio 3. El tiempo necesario para que una máquina complete la producción de un artículo tiene una distribución exponencial con un valor esperado de 10 minutos. La máquina realiza 49 de dichos artículos por día, con tiempos de producción independientes entre sí. Se realiza un artículo por vez y no hay tiempos ociosos entre la producción de cada artículo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total de operación de la máquina un día cualquiera sea mayor que 8 horas pero menor que 9 horas? Definir la/s variable/s usada/s para la resolución e indicar su/s respectiva/s distribución/distribuciones justificando adecuadamente.

b) ¿Qué tiempo total de operación de la máquina es superado en el 95% de los días?

.

Ejercicio 4. En una prueba de hipótesis cuyas hipótesis nula y alternativa se simbolizan por H_0 y H_1, identificar cada una de las siguientes probabilidades.

i) Equivocarse al rechazar H_0.

ii) Equivocarse al no rechazar H_0.

iii) No rechazar H_0 cuando H_0 es válida.