<u>*REPASO DE VECTORES*</u>

Este apunte tiene por finalidad repasar las propiedades de los vectores para la realización de las actividades prácticas de fijación de los conceptos. El material se extrajo de la bibliografía **"MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. ESTÁTICA . de Ferdinand P. Beer- E. Russell Johnston, Jr- Elliot R. Eisenberg. Septima Edición. Mc Graw Hill".**

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1*a* y *b*, que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas **P** y **Q** que actúan sobre una partícula *A* (figura 2.2*a*), pueden sustituirse por una sola fuerza **R** que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2*c*). A esta fuerza se le llama *resultante* de las fuerzas **P** y **Q** y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2*b*, construyendo un paralelogramo con **P** y **Q** como lados. *La diagonal que pasa por A representa la resultante*. Esto se conoce como la *ley del paralelogramo* para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse ni derivarse de manera matemática.

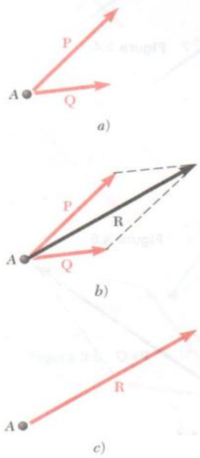


Figura. 2.2

2.3. VECTORES

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinarias. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y *no* una de 7 lb. Las fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, *velocidades*, *aceleraciones* y *momentos* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por *vectores*, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como *volumen*, *masa* o *energía* se representan por números ordinarios o escalares.

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo*. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas (**P**). En la escritura a mano, un vector puede representarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo ($\vec{P}$), o subrayando la letra ($\underline{P}$). La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector **P** se representa como *P*.

El vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector *fijo* o *ligado*, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les llama vectores *libres*. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítulo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o resbalar a lo

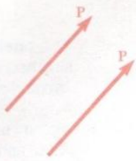


Figura 2.4

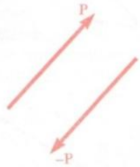


Figura 2.5

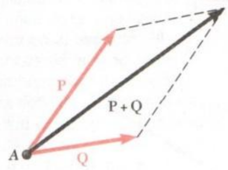


Figura 2.6

largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores *deslizantes*.[†]

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son *iguales*, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El *vector negativo* de un vector **P** se define como aquel que tiene la misma magnitud que **P** y una dirección opuesta a la de **P** (figura 2.5); el negativo del vector **P** se representa por **−P**. A los vectores **P** y **−P** se les llama vectores *iguales* y *opuestos*. Se tiene

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

2.4. ADICIÓN O SUMA DE VECTORES

En la sección anterior se vio que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a **P** y a **Q** (figura 2.6). La diagonal que pasa por A representa la suma vectorial de **P** y **Q**, y se representa por **P** + **Q**. El hecho de que el signo + se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector **P** + **Q** *no* es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores **P** y **Q**.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores **P** y **Q** no depende del orden en que **P** y **Q** se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es *conmutativa* y se escribe

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \tag{2.1}$$

[†] Algunas expresiones tienen magnitud y dirección pero no se suman de acuerdo con la ley de paralelogramo. Aunque tales expresiones se pueden representar por medio de flechas, *no* se pueden considerar vectores.

Un grupo de expresiones de este tipo son las rotaciones finitas de un cuerpo rígido. Coloque un libro cerrado enfrente de usted sobre una mesa de manera que se encuentre en la forma habitual, con la portada hacia arriba y el lomo hacia la izquierda. Ahora rote el libro 180° con respecto a un eje paralelo al lomo (figura 2.3*a*); esta rotación puede ser representada por una flecha orientada, como se muestra en la figura, cuya longitud es igual a 180 unidades. Tomando el libro tal y como se encuentra en su nueva posición, rótelo ahora 180° alrededor de un eje

Figura 2.3 Rotaciones finitas de un cuerpo rígido

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado *regla del triángulo* se obtiene como sigue: considérese la figura 2.6, donde la suma de los vectores **P** y **Q** ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a **Q** es igual a **Q** en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (figura 2.7*a*). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse *colocando* **P** y **Q** *de punta a cola y uniendo la cola de* **P** *con la punta de* **Q**. En la figura 2.7*b* se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

La *resta* de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector **P** − **Q** que representa la diferencia de los vectores **P** y **Q** se obtiene agregándole a **P** el vector negativo −**Q** (figura 2.8). Se escribe

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \tag{2.2}$$

Aquí se debe observar otra vez que aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la *suma de tres o más vectores*. La suma de tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtendrá, *por definición*, sumando primero los vectores **P** y **Q** y agregando el vector **S** al vector **P** + **Q**. De manera que

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \tag{2.3}$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

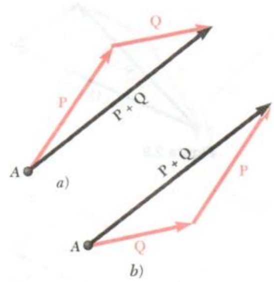


Figura 2.7

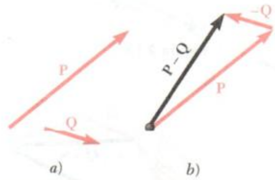
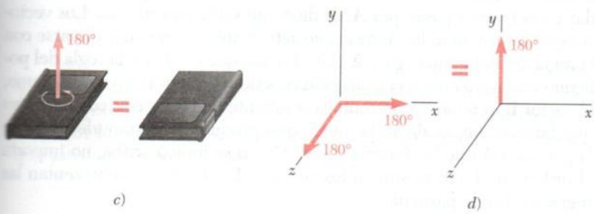


Figura 2.8

---

horizontal perpendicular al lomo (figura 2.3*b*); esta segunda rotación puede ser representada por medio de una flecha cuya longitud es igual a 180 unidades, orientada como se muestra en la figura. Sin embargo el libro podría haberse colocado en esta posición final aplicando una sola rotación de 180° con respecto a un eje vertical (figura 2.3*c*). Se concluye que la suma de las dos rotaciones de 180° representadas por flechas dirigidas, respectivamente, a lo largo de los ejes *z* y *x*, es una rotación de 180° representada por una flecha dirigida a lo largo del eje *y* (figura 2.3*d*). Es obvio que las rotaciones finitas de un cuerpo rígido no obedecen la ley del paralelogramo para la adición; por tanto, éstas *no* pueden ser representadas por medio de vectores.



FABIAN GERARDO PERGOLA
INGENIERO MECANICO - U.T.N.

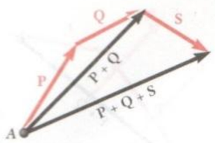


Figura 2.9

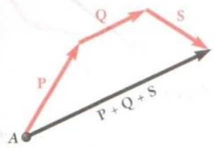


Figura 2.10

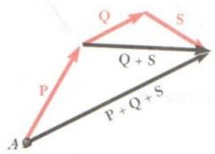


Figura 2.11

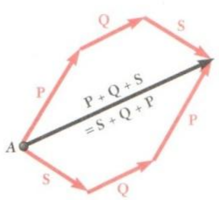


Figura 2.12

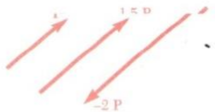


Figura 2.13

Si los vectores dados *son coplanares*, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtuvo en esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma **P** + **Q** de los vectores **P** y **Q**; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores **P** + **Q** y **S**. Sin embargo, la determinación del vector **P** + **Q** pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, *acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último*. Ésta se conoce como la *regla del polígono* para la adición de vectores.

Se observa que el resultado obtenido permanecería sin cambio si, como se muestra en la figura 2.11, los vectores **Q** y **S** se hubieran reemplazado por la suma de **Q** + **S**. Entonces se puede escribir

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \tag{2.4}$$

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, *muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa* (figura 2.12).

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma **P** + **P** como 2**P**, a la suma **P** + **P** + **P** como 3**P**, y en general a la suma de n vectores **P** iguales como el producto n**P**, se definirá el producto n**P** de un entero positivo n y un vector **P**, como un vector que tiene la misma dirección que **P** y magnitud nP (léase n veces P). Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada en la sección 2.3, se define el producto k**P** de un escalar k y un vector **P**, como un vector que tiene la misma dirección y sentido que **P** (si k es positivo), o la misma dirección pero sentido opuesto al de **P** (si k es negativo) y una magnitud igual al producto de P y el valor absoluto de k (figura 2.13).

2.5. RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

Considérese una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14a). Como todas estas fuerzas pasan por A, se dice que son concurrentes. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.14b). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector **R** obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas. Como se indicó arriba, no importa el orden en el que se sumen los vectores **P**, **Q** y **S** que representan las *fuerzas sobre la partícula*.

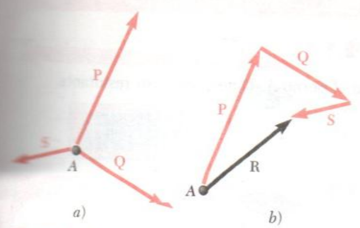


Figura 2.14

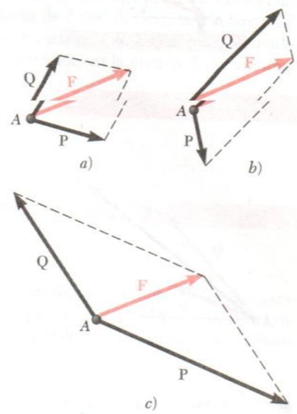


Figura 2.15

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama *componentes* de la fuerza original **F**, y al proceso de sustituirlas en lugar de **F** se le llama *descomposición de la fuerza* **F** *en sus componentes*.

En este sentido, para cada fuerza **F** existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de *dos componentes* **P** y **Q** son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere. Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza **F** puede descomponerse en sus componentes es ilimitado (figura 2.15). Dos casos son de especial interés:

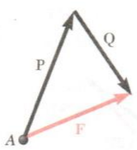


Figura 2.16

1. *Una de las dos componentes*, **P**, *se conoce*. La segunda componente, **Q**, se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de **P** a la punta de **F** (figura 2.16); la magnitud, la dirección y el sentido de **Q** se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que **Q** se ha determinado, ambas componentes **P** y **Q** deben aplicarse en *A*.
2. *Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes*. La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de **F**, paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.17). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas **P** y **Q**, que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

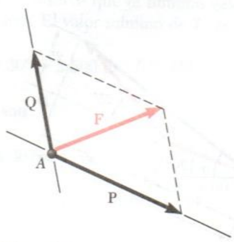
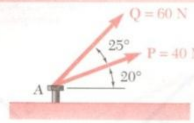


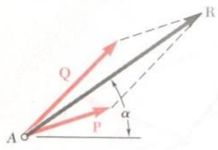
Figura 2.17

Pueden encontrarse muchos otros casos; por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.



PROBLEMA RESUELTO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno *A*. Determínese su resultante.



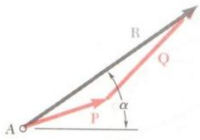
SOLUCIÓN

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35° \quad ◀$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola y otra vez se obtienen la magnitud y la dirección de la resultante por medición directa.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35° \quad ◀$$

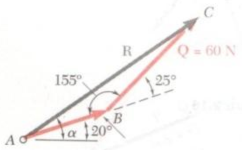


Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo de la resultante se conocen. Se aplica la ley de los cosenos.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73 \text{ N}$$

Ahora con la aplicación la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\text{sen } A}{Q} = \frac{\text{sen } B}{R} \qquad \frac{\text{sen } A}{60 \text{ N}} = \frac{\text{sen } 155°}{97.73 \text{ N}} \tag{1}$$



Al resolver la ecuación (1) para el seno de *A*, se tiene

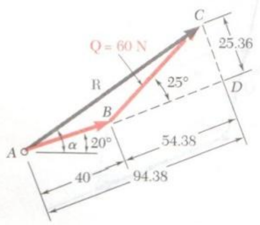
$$\text{sen } A = \frac{(60 \text{ N}) \text{ sen } 155°}{97.73 \text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Con el uso de tres cifras significativas para escribir el resultado (véase sección 1.6):

$$\mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0° \quad ◀$$



Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo *BCD* y se calcula

$$CD = (60 \text{ N}) \text{ sen } 25° = 25.36 \text{ N}$$
$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25° = 54.38 \text{ N}$$

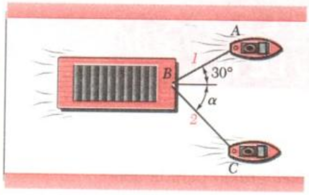
Al usar entonces el triángulo *ACD*, se obtiene

$$\tan A = \frac{25.36 \text{ N}}{94.38 \text{ N}} \qquad A = 15.04°$$

$$R = \frac{25.36}{\text{sen } A} \qquad R = 97.73 \text{ N}$$

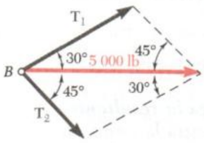
Otra vez, $\alpha = 20° + A = 35.04° \qquad \mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0°$ ◀

PROBLEMA RESUELTO 2.2



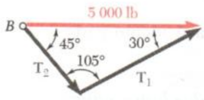
Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5 000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine: *a*) la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $\alpha = 45°$, y *b*) el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.

SOLUCIÓN



a.* Tensión para $\alpha = 45°$. *Solución gráfica. Se emplea la ley del paralelogramo; la diagonal (resultante) se sabe que es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas. Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\,700 \text{ lb} \qquad T_2 = 2\,600 \text{ lb} \quad ◀$$

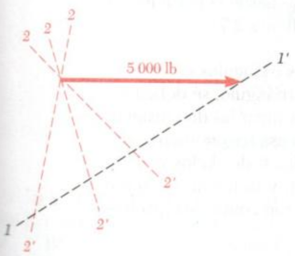


Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Obsérvese que el triángulo mostrado representa la mitad del paralelogramo que se presenta arriba. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\text{sen } 45°} = \frac{T_2}{\text{sen } 30°} = \frac{5\,000 \text{ lb}}{\text{sen } 105°}$$

Con calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por sen 45° y sen 30°, se obtiene

$$T_1 = 3\,660 \text{ lb} \qquad T_2 = 2\,590 \text{ lb} \quad ◀$$

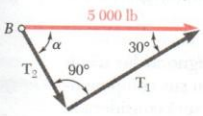


***b.* Valor de α para T_2 mínima.** Para determinar el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En el esquema mostrado, la línea *1-1'* es la dirección conocida de $\mathbf{T}_1$. Las líneas *2-2'* indican varias direcciones posibles de $\mathbf{T}_2$. Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son perpendiculares. El valor mínimo de T_2 es

$$T_2 = (5\,000 \text{ lb}) \text{ sen } 30° = 2\,500 \text{ lb}$$

Los valores correspondientes de T_1 y α son

$$T_1 = (5\,000 \text{ lb}) \cos 30° = 4\,330 \text{ lb}$$
$$\alpha = 90° - 30° \qquad \alpha = 60° \quad ◀$$



FABIAN GERARDO PERGOLA
INGENIERO MECANICO - U.T.N.