Unidad 3: Estática de los Fluidos

Ing. Nahuel Castello

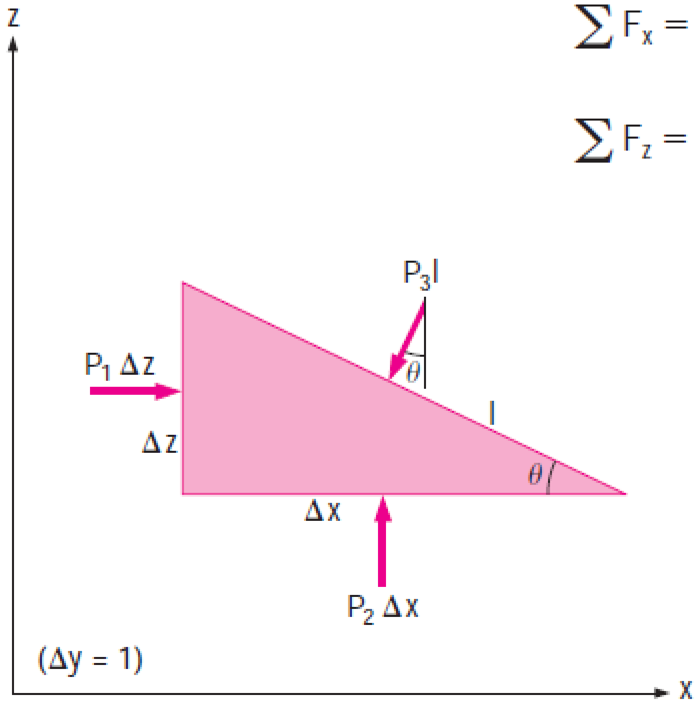
Mecánica de los fluidos - Departamento de Ingenieria Industrial
Universidad Tecnológica Nacional FRH

2018

Contenido de La Unidad

- **Condiciones de existencia del escalar Presión**
- **Definición de Fuerza superficial y tensión de contacto con un fluido viscoso en movimiento y sus componentes según los planos coordenados**
- **Aceleraciones de campo**
- **Fuerzas másicas**
- **Ecuaciones indefinidas, reducción a la estática**
- **Movimiento relativo**
- **Empuje sobre superficies planas y alabeadas.**
- **Flotación, equilibrio de un cuerpo flotante con una cupla perturbadora**

Condiciones de Existencia del Escalar Presión



$$\sum F_x = ma_x = 0: \longrightarrow P_1\,\Delta z - P_3 l \sin\theta = 0$$

$$\sum F_z = ma_z = 0: \longrightarrow P_2\,\Delta x - P_3 l \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g\,\Delta x\,\Delta z = 0$$

$$P_1 - P_3 = 0$$

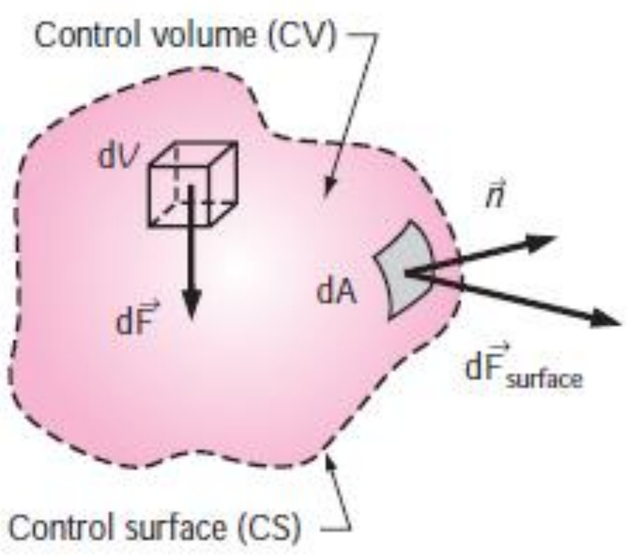
$$P_2 - P_3 - \frac{1}{2}\rho g\,\Delta z = 0$$

$$\Delta z \rightarrow 0$$

$$\boxed{P_1 = P_2 = P_3 = P}$$

"La Presión en cualquier punto del fluido es la misma en todas las direcciones"

Definición de Fuerza superficial y tensión de contacto con un fluido viscoso en movimiento y sus componentes según los planos coordenados



Las fuerzas que actúan sobre un volumen de control se dividen de la siguiente forma:

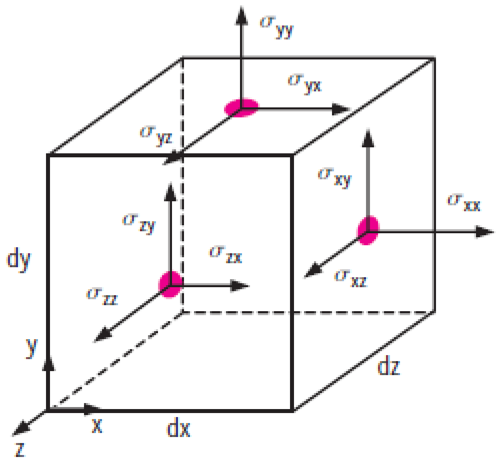
- Fuerzas Másicas (Fbody)
- Fuerzas Superficiales
    - Normales
    - Viscosas

Definición de Fuerza superficial y tensión de contacto con un fluido viscoso en movimiento y sus componentes según los planos coordenados

$$d\vec{F}_{\text{surface}} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\sum \vec{F}_{\text{surface}} = \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



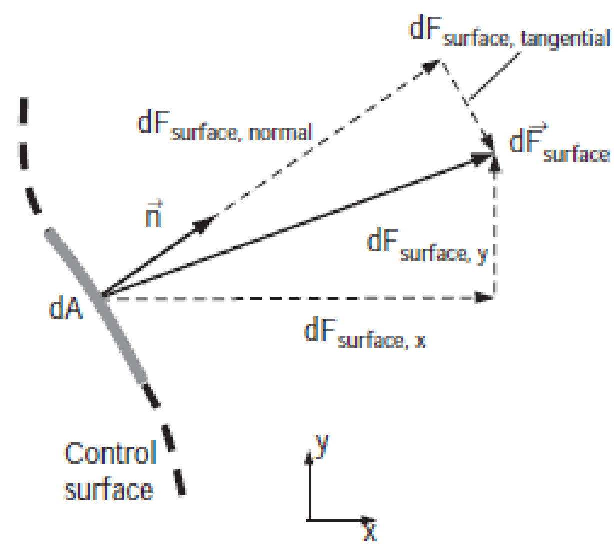
Las Fuerzas Superficiales Normales y Viscosas surgen a partir de **integrar en el área al tensor de tensiones**. Este tensor tiene como componentes en su diagonal a las **tensiones normales (Presiones) + las tensiones viscosas**. Fuera de su diagonal se encuentran las **tensiones de corte**.

Fluido en Movimiento

Fluido en Reposo

Tensor Viscoso (Desviador)

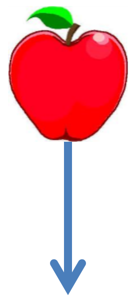
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

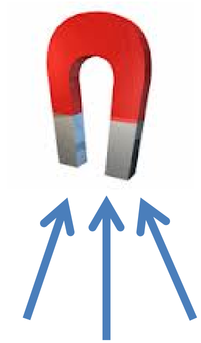


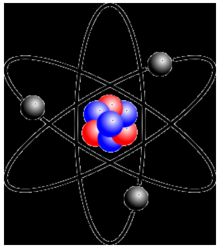
(a)

Aceleraciones de Campo

Aceleraciones de campo – Fuerzas másicas







$$\vec{g} = \lim_{m \to 0} \frac{\vec{F}}{m}$$

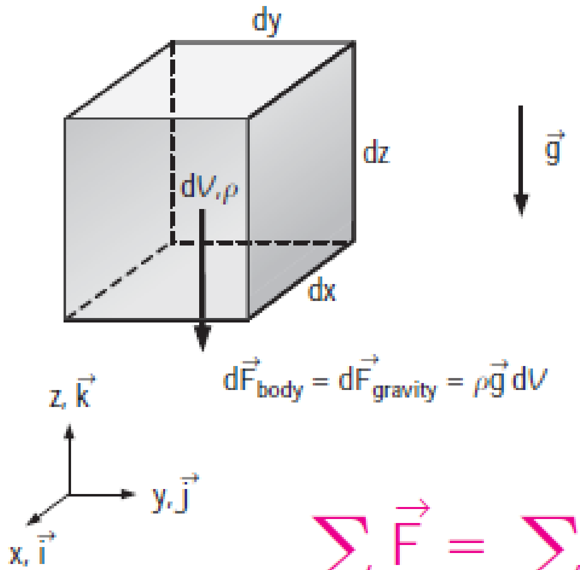
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Nuclear Fuerte
Nuclear Débil

$$d\vec{F}_{másicas} = \rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z})dVol$$

$$d\vec{F}_{másicas} = \rho(\vec{g})dVol$$

Fuerzas Másicas



$$\sum \vec{F}_{body} = \int_{CV} \rho\vec{g}\,dV = m_{CV}\vec{g}$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface} = \int_{CV} \rho\vec{g}\,dV + \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\,dA$$

Total force: $$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{total force}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{gravity}}_{\text{body force}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{pressure} + \sum \vec{F}_{viscous} + \sum \vec{F}_{other}}_{\text{surface forces}}$$

Ecuaciones Indefinidas, reducción a la estática

Ecuación de Cauchy a partir del Teorema de la divergencia

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface}$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface} = \int_{CV} \rho\vec{g}\, dV + \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})\, dV + \sum_{out} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \beta\dot{m}\vec{V}$$

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \rho\vec{g}\, dV + \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})\, dV + \int_{CS} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}\right] dV = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}}$$

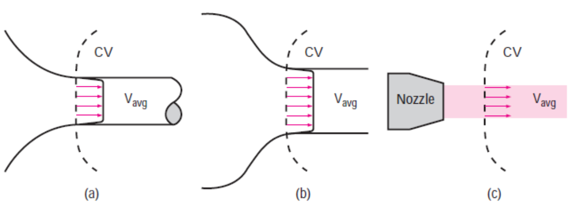
Ecuación de Cauchy

The Extended Divergence Theorem

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot G_{ij}\, dV = \oint_A G_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\int_{CS} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{CV} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V})\, dV$$

$$\int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{CV} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}\, dV$$



Momentum-flux correction factor: $\beta = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \left(\frac{V}{V_{avg}}\right)^2 dA_c$

Ecuaciones Indefinidas, reducción a la estática

Aplicando la regla de Producto:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = \rho\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \end{cases}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right] + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = \boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy en forma alternativa

Ecuaciones Indefinidas, reducción a la estática

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right]=\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}+\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy

$$\nabla\cdot\sigma_{ij}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-P & 0 & 0\\ 0 & -P & 0\\ 0 & 0 & -P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\end{pmatrix}\right)=\begin{matrix}-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\\ -\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\\ -\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\end{matrix}$$

$$\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\rho\frac{Du}{Dt}$$

$$\rho g_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=\rho\frac{Dv}{Dt}$$

$$\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{Dw}{Dt}$$

Se introduce un Nuevo tensor con las tensiones de corte como valores desconocidos

Ecuaciones Indefinidas de la Dinámica de Fluidos

$$\rho g-\nabla p+\nabla\cdot\tau=\rho\frac{DV}{Dt}$$

Ecuaciones Indefinidas, reducción a la estática

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau = \rho \frac{DV}{Dt}$$

Ecuaciones Indefinidas de la Dinámica de Fluidos

$$Si\ \frac{DV}{Dt} = 0\ \ y\ \ \mu = 0, \qquad \rho g - \nabla p = 0 \longrightarrow \nabla p = \rho\, g \longrightarrow$$

$$\mathrm{d}p = \rho\, g_x\, dx + \rho\, g_y\, dy + \rho\, g_z\, dz$$

Ecuación diferencial fundamental de la estática

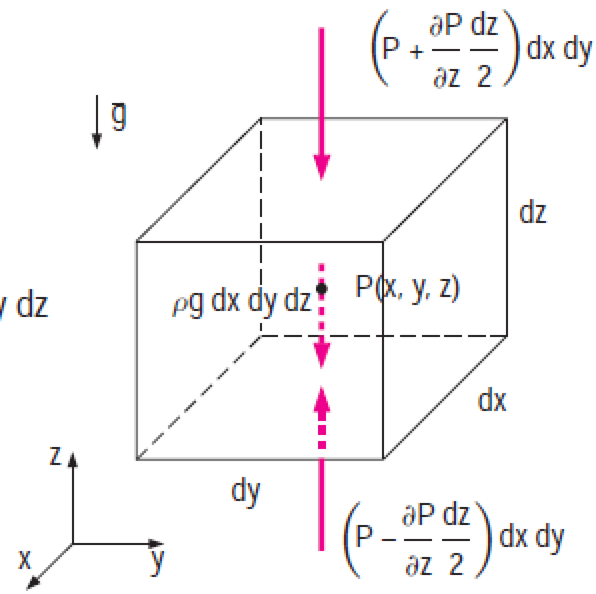
Movimiento Relativo

$\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a}$ Segunda Ley de Newton aplicada a un elemento diferencial de fluido

$$\delta F_{S,z} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy = -\frac{\partial P}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

$$\delta F_{S,x} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz \quad \text{and} \quad \delta F_{S,y} = -\frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy\, dz$$

$$\delta\vec{F}_S = \delta F_{S,x}\vec{i} + \delta F_{S,y}\vec{j} + \delta F_{S,z}\vec{k} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) dx\, dy\, dz = -\vec{\nabla}P\, dx\, dy\, dz$$



$$\vec{\nabla}P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$$

$$\delta\vec{F}_{B,z} = -g\delta m\vec{k} = -\rho g\, dx\, dy\, dz\vec{k}$$

$$\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_S + \delta\vec{F}_B = -(\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k})\, dx\, dy\, dz$$

Rigid-body motion of fluids: $\boxed{-\vec{\nabla}P - \rho g\vec{k} = \rho\vec{a}}$

Accelerating fluids: $\frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho a_y, \quad \text{and} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho(g + a_z)$

Movimiento Relativo

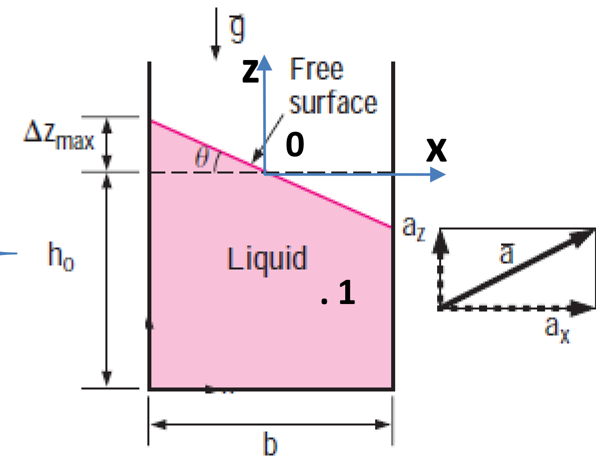
El recipiente se mueve en línea recta con componentes en x y z. Tomando el punto 0 en el origen, y el punto 1 en cualquier punto del campo no subscripto se tiene:

$$dP = \rho\, a_x\, dx + \rho\, a_z\, dz$$

$$\int_{P_0}^{P_1} dP = \rho\, a_x \int_{x_0}^{x_1} dx + \rho\, a_z \int_{z_0}^{z_1} dz$$

$$P_1 - P_0 = \rho\,(-a_x)\,(x_1 - x_0) + \rho\,(-a_z - g)\,(-z_1 - z_0)$$

$$\boxed{P_1 = \rho\,(-a_x)\,x_1 + \rho\,(a_z + g)\,z_1 + P_0}$$



La Superficie Libre es una Isobara, dP = 0

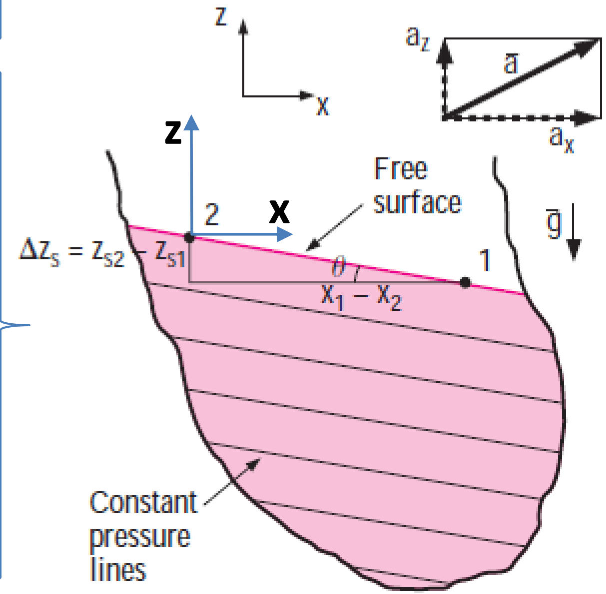
$$\rightarrow\ P_1 - P_2 = \rho\,(-a_x)\,(x_1 - x_2) + \rho\,(-a_z - g)\,(z_1 - z_2) = 0$$

$$(z_1 - z_2) = \frac{-a_x}{(-a_z - g)}\,(x_1 - x_2)$$

$$(z_1 - z_2) = \frac{a_x}{(a_z + g)}\,(x_1 - x_2)$$

$$\frac{dz_{isobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \text{constant}$$

$$\boxed{\text{Slope} = \frac{dz_{isobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\tan\theta}$$



Movimiento Relativo

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \longrightarrow dP = \rho\omega^2 r\, dr + \rho g\, dz$$

Si nos paramos en la superficie libre que es una isobara $dP = 0 = \rho\omega^2 r\, dr + \rho g\, dz$

$$dz_{isobar} = \int \frac{\omega^2 r}{g}\, dr$$

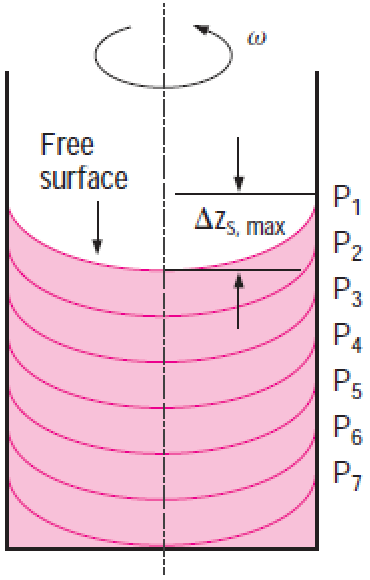
$$z_{isobar} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_1 \quad \begin{cases} r = 0 \\ z_{isobar}(0) = C_1 = h_c \end{cases}$$

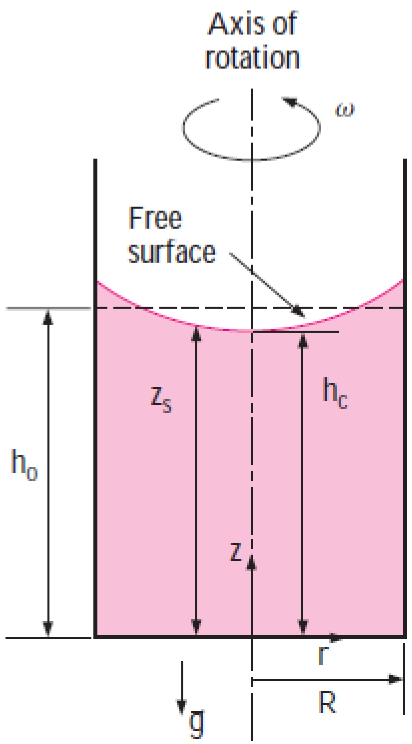
$$\boxed{z_s = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c}$$

$$V = \int_{r=0}^{R} 2\pi z_s r\, dr = 2\pi \int_{r=0}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c\right) r\, dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c\right)$$

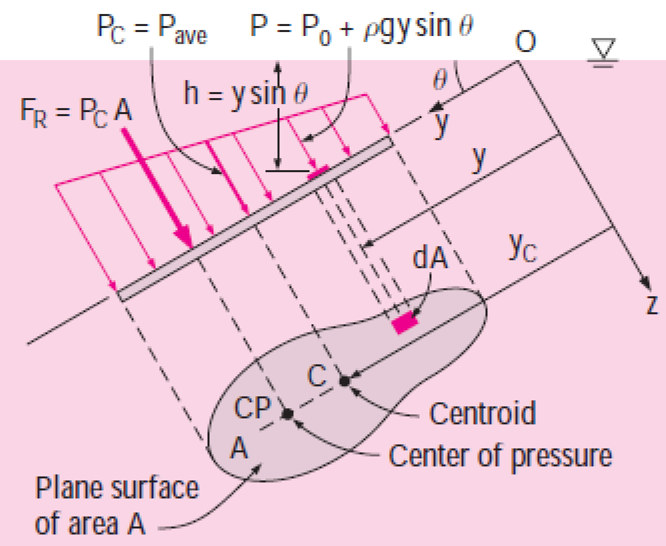
$$V = \pi R^2 h_0$$

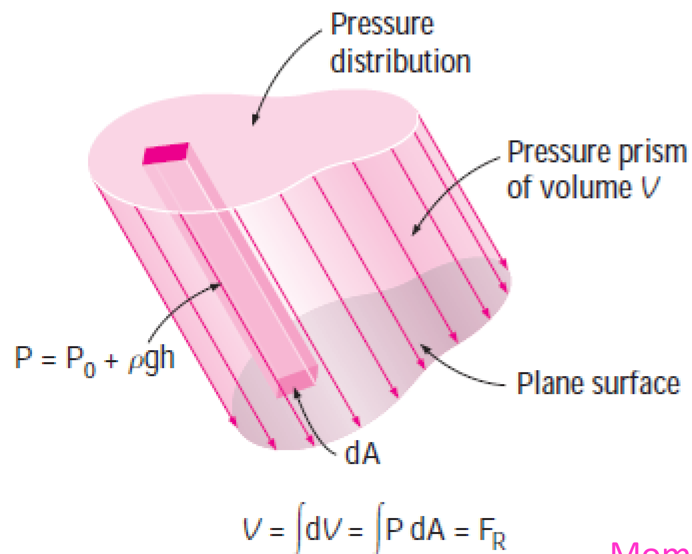
$$\boxed{h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}}$$





Empuje sobre superficies Planas





¨La **magnitud de la fuerza resultante** que actúa sobre una superficie placa plana completamente sumergida en un fluido homogéneo (densidad constante) es igual al **producto** de la **Presión en el centroide** de la superficie y el **área A Total de la superficie**¨

“Esta fuerza resultante actúa en el centro de presión, CP, NO en el centroide de Area C”

$$P = P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g y \sin\theta$$

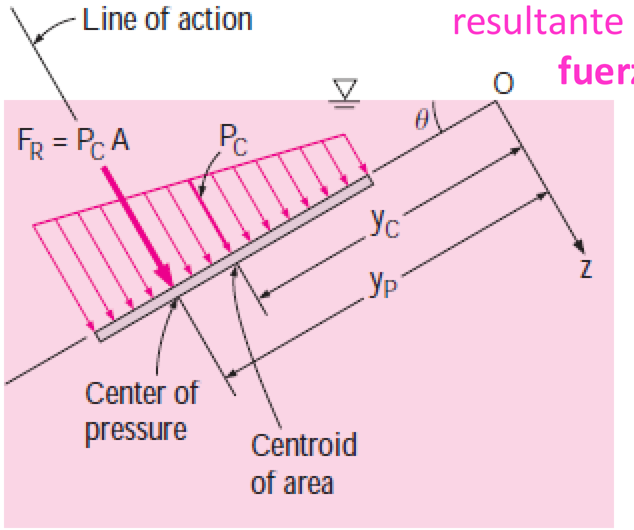
$$F_R = \int_A P\,dA = \int_A (P_0 + \rho g y \sin\theta)\,dA = P_0 A + \rho g \sin\theta \overbrace{\int_A y\,dA}^{\text{Momento de Inercia de Primer Orden}}$$

$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA$$ Coordenada Y del centroide de superficie C

$$\boxed{F_R = (P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C\,A = P_{ave}\,A}$$

Empuje sobre superficies Planas

"La **ubicación del centro de presión** (intersección de la línea de acción de la fuerza resultante y la superficie sumergida, se determina igualando el **momento de la fuerza resultante** al **momento de la fuerza de presión distribuida**"



$$y_P F_R = \int_A yP\, dA = \int_A y(P_0 + \rho g y \sin\theta)\, dA = P_0 \int_A y\, dA + \rho g \sin\theta \underbrace{\int_A y^2\, dA}_{\text{Momento de Inercia de Área o segundo orden}}$$

$$y_P F_R = P_0 y_C A + \rho g \sin\theta\, I_{xx,\,O} \qquad (1)$$

$$I_{xx,\,O} = \int_A y^2\, dA \qquad I_{xx,\,O} = I_{xx,\,C} + y_C^2 A \qquad (2)$$

$$F_R = (P_0 + \rho g y_C \sin\theta)A = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C A = P_{ave} A \qquad (3)$$

"**La presión en el centroide de una superficie sumergida equivale a la presión promedio que actúa sobre esta**"

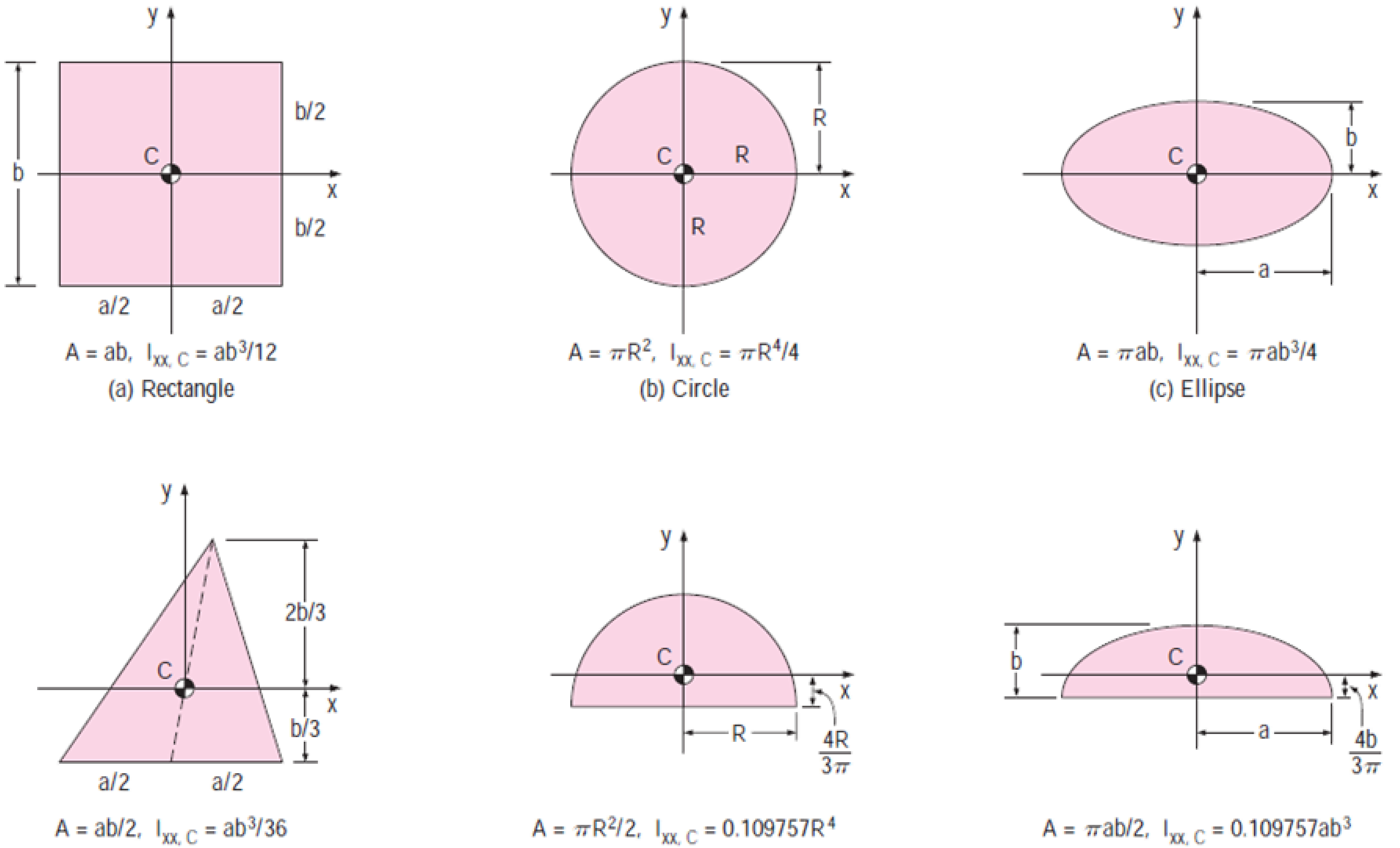
Introduciendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{[y_C + P_0/(\rho g \sin\theta)]A}$$

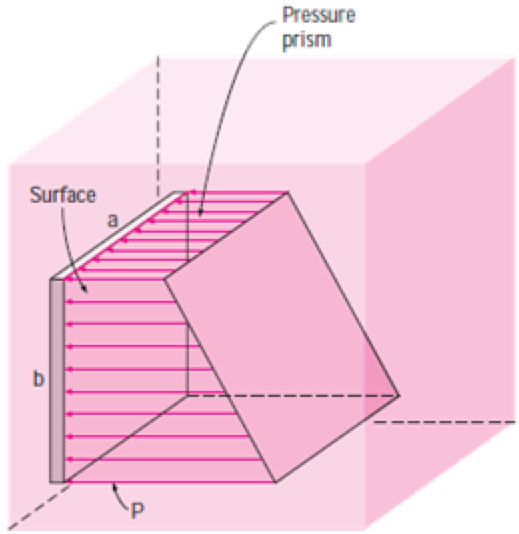
$$\boxed{y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{y_C A}}$$

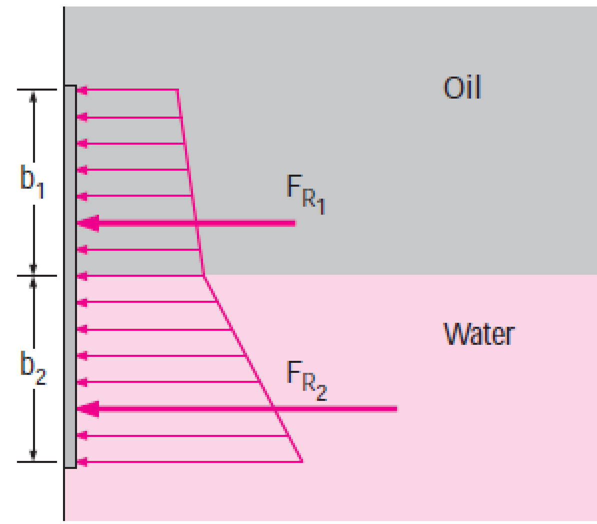
Para el caso de que se ignore P_0 y se considere la presión como manométrica

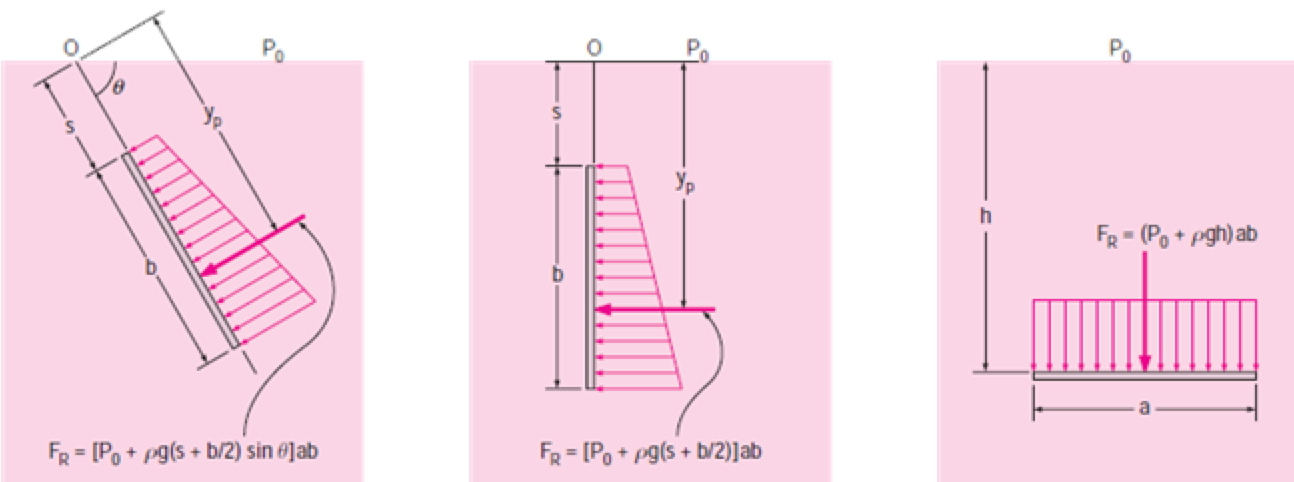
Empuje sobre superficies Planas



Empuje sobre superficies Planas

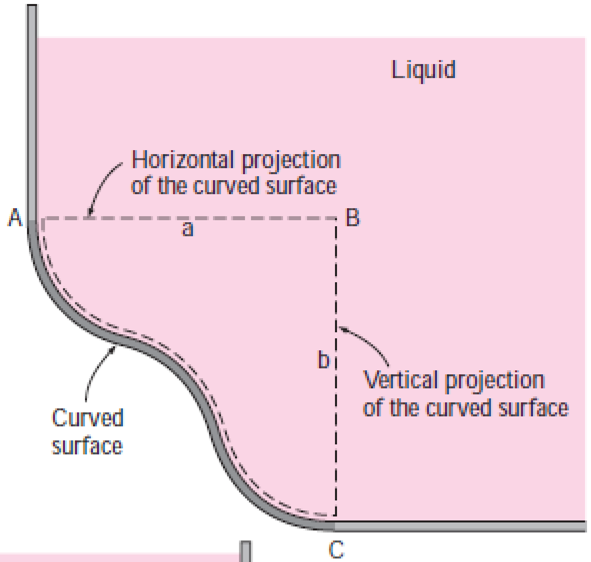


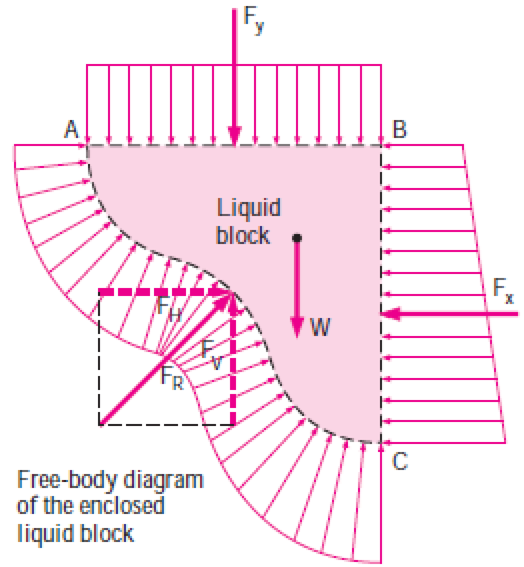


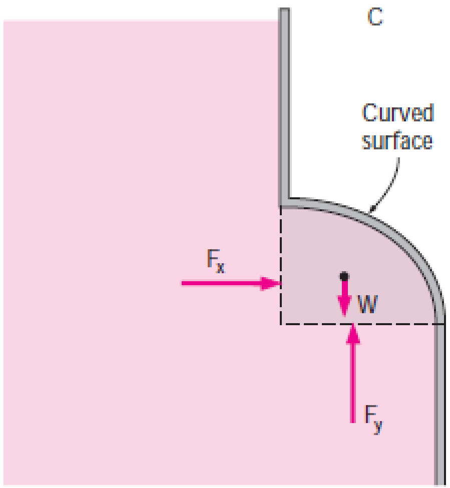


(a) Tilted plate (b) Vertical plate (c) Horizontal plate

Empuje sobre superficies Alabeadas







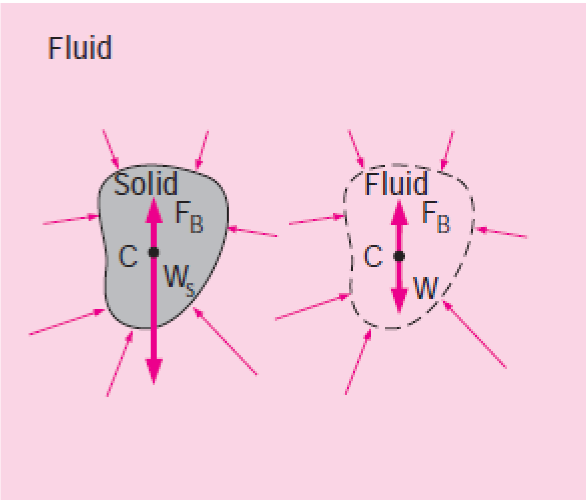
Horizontal force component on curved surface: $F_H = F_x$

Vertical force component on curved surface: $F_V = F_y + W$

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

$$\tan \alpha = F_V / F_H$$

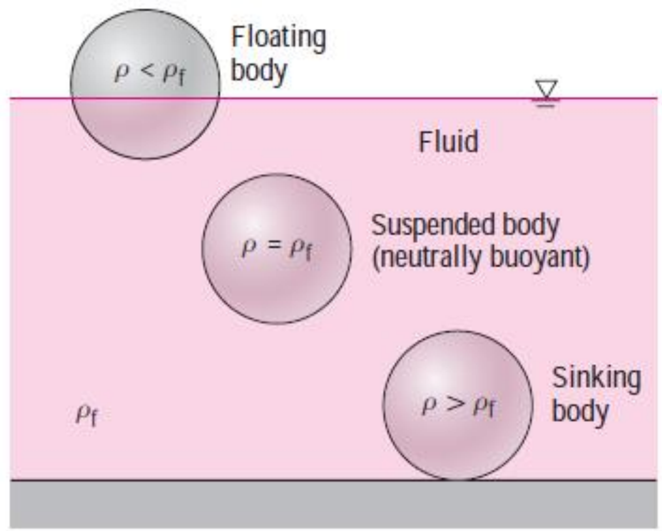
Flotación, equilibrio de un cuerpo flotante con una cupla perturbadora

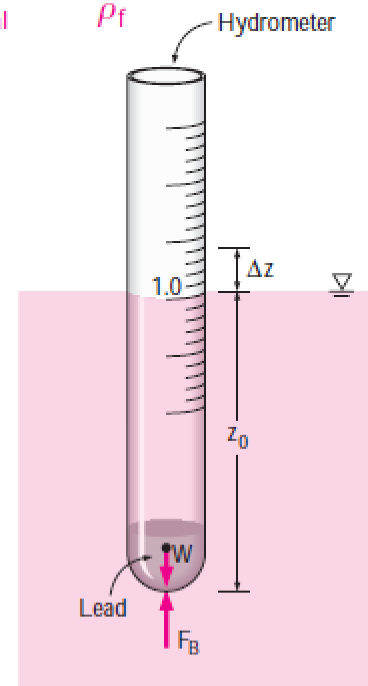


"Las fuerzas de empuje (F_B) que actúan sobre un cuerpo sólido sumergido en un fluido y en un cuerpo fluido de la misma forma en la misma profundidad es idéntica"

¨La razón de densidades determina el % del cuerpo sumergido Si es 1 o mayor a 1 el cuerpo se encuentra totalmente sumergido"

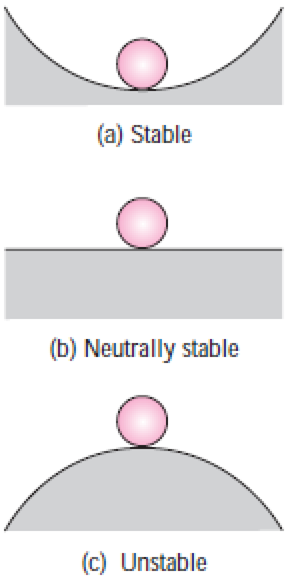
$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{sub} = \rho_{ave,\ body} g V_{total} \rightarrow \frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{ave,\ body}}{\rho_f}$$

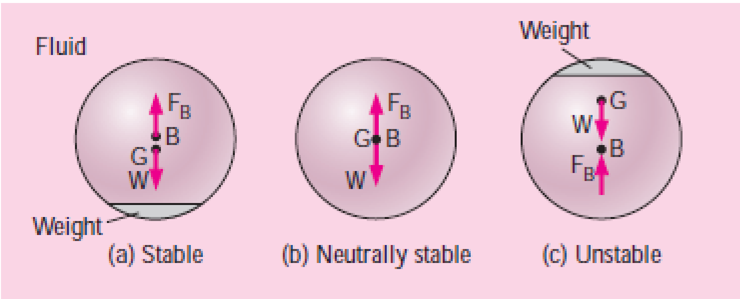


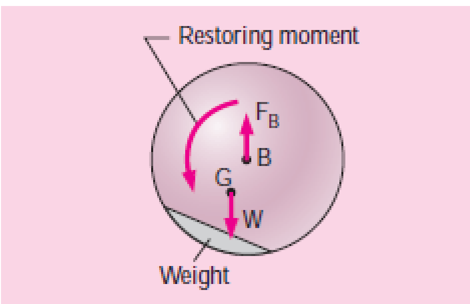


"La **fuerza de flotación** que actúa sobre un cuerpo sumergido en un fluido es **igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo**, y actúa hacia arriba a través del centroide del volumen desplazado"

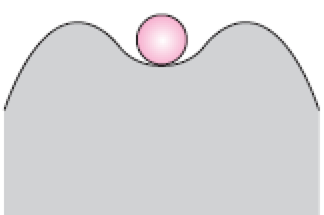
Flotación, equilibrio de un cuerpo flotante con una cupla perturbadora

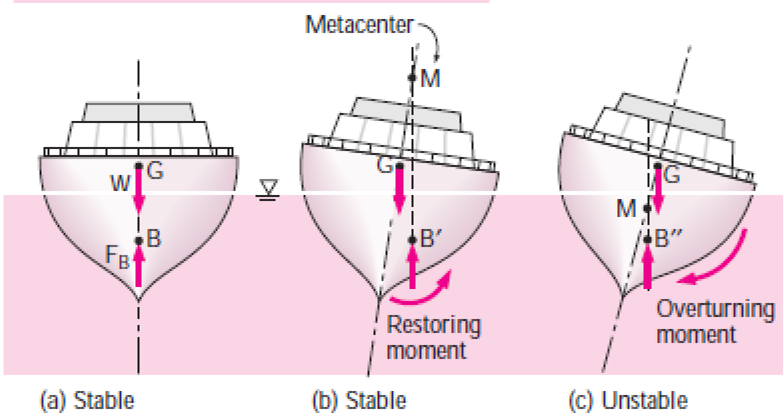






"Cuando el centro de gravedad G de un cuerpo inmerso totalmente, es no alineado verticalmente con el centro de flotabilidad B del cuerpo, no está en un estado de equilibrio y rotaría a su estado estable, incluso sin ningún disturbio"





(b) Un cuerpo flotante es estable si el cuerpo es de fondo pesado y por lo tanto el centro de gravedad G está debajo del centro de flotación B del cuerpo, o si el metacentro M esta sobre el punto G.

(c) Sin embargo, el cuerpo es inestable si el punto M está debajo del punto G.